UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

Febrero 28 de 2007.

Cálculo de varias variables. Período Académico 071. G-11. Primer parcial.

Nombre ______________________________ Código __________

1. (10 puntos) a) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ en el punto $P(2,0,0)$.

   b) Halle la curvatura de la parábola $y = x - \frac{1}{4}x^2$ en $x = 2$.

2. (10 puntos) Considere la función $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$.

   a) Identifique la superficie $z = f(x,y)$. Trace la curva de nivel para $c = 0$ y encuentre un vector normal a dicha curva en el punto $(0,4)$.

   b) Calcule la derivada direccional de f en $(1,2)$ en la dirección de $u = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

3. (8 puntos) Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$. Muestre que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. (10 puntos) a) Sea $w = x^2 + y^2 + z^2$. Aplique la regla de la cadena para calcular $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ donde $x = t\operatorname{sen} s$, $y = t\cos s$, $z = st^2$.

   b) Suponga que $z = f(x,y)$ donde $x = u - v$ y $y = v - u$. Verifique que $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

5. (12 puntos) a) Pruebe que si $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)$ es una constante, entonces $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) = 0$.

   b) Encuentre las primeras derivadas parciales de z por derivación implícita de

$$3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$$

   c) ¿Si $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = 0$ para todo vector unitario $\mathbf{u}$? Justifique su respuesta.