UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
Grupo 17

Profesor ANIBAL SOSA

NOTA: El examen se califica sobre 50 puntos.

1. Considere la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ -2 & -4 & 1 & -9 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

   a) (8 ptos) Encuentre un conjunto de vectores que formen una base para el espacio generado por las columnas de B y halle el $rango(B)$. Argumente por qué los vectores elegidos forman dicha base.

   b) (4 ptos) ¿Son las filas de B un conjunto linealmente dependiente de vectores en $\mathbb{R}^5$? Explique.

   c) (8 ptos) Encuentre un conjunto de vectores que formen una base del espacio nulo de la matriz B y halle la $nulidad(B)$. Argumente por qué los vectores elegidos forman dicha base.

2. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -9 & 14 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) (7 ptos) Calcule det A.

   b) (3 ptos) Sea $\boldsymbol{b}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^4$. ¿Es el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ consistente? Justifique su respuesta.

3. (10 ptos) Considere el conjunto $W = \{at^3 + bt^2 + ct + d : a = b + c, d = c - b\}$.

   a) Muestre que W es un subespacio de P_3.

   b) Encuentre una base para W y determine $dim(W)$.

4. (20 ptos) Elija CINCO y sólo CINCO de las siguientes afirmaciones para determinar si son verdaderas o falsas; argumente en cada caso su respuesta:

   a) Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores no nulos en $\mathbb{R}^3$. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no son paralelos entonces el conjunto $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

   b) Sea $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Los valores de λ para los cuales la matriz $M - \lambda I_3$ es singular son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = -3$.

   c) Toda matriz antisimétrica de $m \times m$ con m par es singular.

   d) Suponga que $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ es un conjunto de vectores que genera a $\mathbb{R}^n$ y que A es una matriz no singular $n \times n$. Entonces el conjunto $\{A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, ..., A\boldsymbol{v}_n\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.

   e) Si A es una matriz 4×6 y $rango(A) = 4$, entonces las filas de A forman una base de $\mathbb{R}^6$.

   f) Sea A es una matriz 6×4, entonces las columnas de A son linealmente dependientes.

5. (Opcional 6 ptos) Sea A una matriz $n \times n$ cuyas entradas son todas números enteros. Demuestre que si $\det(A) = \pm 1$ entonces todas las entradas de A^{-1} también son números enteros.