UNIVERSIDAD ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL.
PRIMER EXAMEN PARCIAL.
Grupo 7

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ______________________________ CODIGO ______________

1. (40 ptos) Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y el vector $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (a) Halle la solución general del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, esto es escriba su solución en la forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$ donde $\boldsymbol{x}_p$ es una solución particular del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado.

   (b) Determine si la matriz A es singular o no singular. Justifique su respuesta.

2. (20 ptos) Considere la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -4 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \lambda+3 \end{bmatrix}$

   (a) Determine todos los valores de λ tales que $\det(M) = 0$.

   (b) Si $\lambda = 2$, ¿Tiene el sistema $M\boldsymbol{x} = 0$ infinitas soluciones? Justifique su respuesta.

3. (40 ptos) Para cada uno de los siguientes enunciados determine si es verdadero o falso, y argumente en cada caso el por qué de su respuesta:

   (a) Sea A una matriz $n \times n$ entonces AA^T y $A + A^T$ son matrices simétricas.

   (b) Si $B = PAP^{-1}$, entonces $det(B) = det(A)$.

   (c) Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ tal que $A^3 = 0$, entonces $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

   (d) Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$. Se define la *traza* de A como $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Si $tr(AA^T) = 0$, entonces $A = O$.

   (e) Dada la siguiente matriz de adyacencia de un digrafo G el número de formas que tiene el individuo T_3 para acceder al individuo T_2 en tres etapas es 4.

$$A(G) = \begin{array}{c|ccccc} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ \hline T_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ T_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ T_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ T_4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ T_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

4. (Opcional 10 ptos) Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -10 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y la ecuación matricial $AY = B$, usted debe explicar como calcular Y sin necesidad de calcular A^{-1} y debe calcular la segunda columna de Y.