1a) ... $y+z=1$

1b) $\phi = \pi/6$

3b) $a_{n+1} = 3 - 1/a_n$

UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES.

EXAMEN FINAL. 29 de noviembre de 2005

NOMBRE: ______________________________ GRUPO: _____

1. (15 puntos)

   (a) Evalúe la integral $\iiint_E z\, dV$ donde E es la región del espacio acotada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, y $x+z=1$.

   (b) Considere la integral $I = \iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$ donde E es la región del espacio acotada debajo del cono $\phi/6$ y encima de la esfera $\rho = 2$. Describa explícitamente los límites de la integral I en el sistema de coordenadas que usted considere adecuado. NO evalúe la integral.

2. (8 puntos) Evalúe la integral $\iint_R \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}\, dA$, donde R es la región triangular con vértices (0,0), (2,0) y (0,2).

3. (16 puntos)

   (a) Si la n-sima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = \frac{n-1}{n+1}$, determine a_n y la suma de la serie.

   (b) Demuestre que la sucesión definida por $a_1 = 1$ y $a_n = 3 - \frac{1}{a_n}$ es creciente y que $a_n < 3$ para todo n. Deduzca que la sucesión es convergente y calcule su límite.

4. (24 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si la serie dada es convergente o divergente. Si es posible calcule la suma de las series convergentes.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^n}$

5. (13 puntos)

   (a) Encuentre el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante, con tres caras en los planos coordenados y y un vértice en el plano $x+2y+3z=6$.

   (b) Si $z = f(x,y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $x = r+s$ y $y = rs$, determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$

6. (24 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso explique por qué o de un ejemplo que lo refute.

(a) La recta tangente a la curva de intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 1 + y$, en el punto $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, está dirigida por el vector $\vec{u} = (1, 0, 0)$.

(b) La función $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ es una solución de la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(c) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n (x-3)^n}{n+3}$ es convergente en el intervalo $[5/2, 7/2]$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!} = \sqrt{2}$.