CALCULO EN VARIAS VARIABLES
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ____ CODIGO ________________

NOTA: El examen se califica sobre 50 puntos.

1.
   a) (8 ptos) Dibuje y exprese el volumen del sólido determinado por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $y = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ como una integral triple. NO! calcule el volumen.
   b) (10 ptos) Calcule $\int\int\int_R x \; dV$, donde R es la región de integración acotada por el paraboloide $x = 4z^2 + 4y^2$ y el plano $x = 4$.

2. (8 ptos) Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_{\operatorname{arc\,sen} x}^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 y}\, dy\, dx$$

3. Considere las siguientes curvas polares $r_1 = -2\cos\theta$ y $r_2 = 1 - 2\cos\theta$.
   a) (4 ptos) Dibuje las dos curvas polares en el mismo plano coordenado.
   b) (8 ptos) Calcule el área que está dentro de la curva r_1 y fuera del lazo interior de r_2.

4. (10 ptos) Determine los máximos y los mínimos absolutos de la función $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$, sobre el conjunto D acotado por el triángulo de vertices $(0, 0)$, $(0, 6)$ y $(6, 0)$.

5. (8 ptos) Encuentre las dimensiones de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante, tenga tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x+2y+3z = 12$. Usted debe argumentar por qué las dimensiones encontradas optimizan el volumen de la caja.

6. (OPCIONAL) Definimos la integral impropia I sobre $\mathbb{R}^2$ como

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx = \lim_{a\to\infty} \int\int_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

   donde D_a es el disco de radio a centrado en el origen.
   a) (6 ptos) Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \pi$.
   b) (4 ptos) En lugar del disco D_a en la definición de I utilice el cuadrado S_a con vértices $(\pm a, \pm a)$, para mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.