UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

CALCULO EN VARIAS VARIABLES.

PRIMER EXAMEN PARCIAL.

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ____ CODIGO ____________

NOTA: El exámen se califica sobre 100 puntos.

1. (15 ptos) De acuerdo con las siguientes condiciones reconstruya en $\mathbb{R}^3$ las siguiente condiciones que le permiten hallar las coordenadas de un punto $P(x, y, z)$.

   (a) El punto $P(x, y, z)$ está sobre el plano $z = 2$.

   (b) La proyección del punto P sobre el plano yz está sobre la recta $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (1 - t, t + 2, t + 1)$.

   (c) La distancia de P al origen es $\sqrt{29}$.

2. (24 ptos) Considere las curvas $\vec{\boldsymbol{c}}(t) = \cos(2\pi t)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \ln t\boldsymbol{k}$ y $\vec{\boldsymbol{x}}(t) = t^3\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j} + t - 1\boldsymbol{k}$.

   (a) Verifique que el punto intersección de las curvas $\vec{\boldsymbol{c}}(t)$ y $\vec{\boldsymbol{x}}(t)$ es $(1, 2, 0)$ y halle el coseno del ángulo de intersección entre ellas.

   (b) Determine el punto sobre la curva $\vec{\boldsymbol{x}}$ donde el plano normal es paralelo al plano $6x + 8y + 2z - 8 = 0$.

   (c) Encuentre el vector aceleración de la curva $\vec{\boldsymbol{x}}$.

   (d) Suponga que una partícula se mueve sobre la curva $\vec{\boldsymbol{c}}(t)$ hasta que se desprende súbitamente siguiendo la dirección de la recta tangente a la curva en $t = 1$. Calcule la posición de la partícula en $t = 3$.

3. (30 ptos) La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es $T(x, y) = 12 - 2x^2 - y^2$, donde x y y se miden en centímetros.

   (a) Describa y dibuje explícitamente el dominio de T. ¿Cúal es el rango de T?

   (b) Dibuje al menos tres curvas de nivel de T, encuentre ∇T en el punto $P(2, -2)$, dibújelo en el mismo plano con las curvas de nivel.

   (c) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel $T(x, y) = 0$ en el punto P y dibújela sobre las curvas de nivel.

   (d) Dibuje la trayectoria que seguiría para lograr el máximo incremento en la temperatura desde P hasta el origen.

   (e) ¿En qué dirección a partir de P aumenta más rápido la temperatura?¿Cúal es razón de cambio de la temperatura en el punto P en la dirección del punto $(1, 1)$?

4. (13 ptos) Sean f y g funciones diferenciables. Muestre que cualquier función de la forma $z = f(x + t) + g(x - t)$ es solución de la ecuación de onda
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5. (28 ptos) Para cada uno de los siguientes enunciados determine si es verdadero o falso, y argumente en cada caso el por qué de su respuesta:

   (a) Las gráficas de las funciones $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz$ y $g(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 2x + 2y + z$ son tangentes en el punto $(3, -2, -1)$.

   (b) Si $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ existen, entonces f es diferenciable en $(1, 2)$.

   (c) La función
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
   es continua.

   (d) Si $z = e^{xy}$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (xy + 1)e^{xy}$.

6. (OPCIONAL 10 ptos) Considere la función $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$. Pruebe que $f_y(0, 0) = 1$ y determine los puntos (si los hay) en los que f_y no existe.