UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN PARCIAL
Grupo 1

Profesor ANIBAL SOSA

NOTA: El examen se califica sobre 50 puntos.

1. (20 ptos) Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{a) } y \ln x \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2 \qquad \text{b) } (x + ye^{\frac{y}{x}})dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$$

$$\text{c) } t\frac{dq}{dt} + q = t^4 \ln t \qquad \text{d) } (x - y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)dx - (3xy^2 + 2y\cos x)dy = 0$$

2. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{du}{dt} = (u-4)^{\frac{3}{5}},\ u(1) = 4$$

   a) (5 ptos) Halle dos soluciones distintas de éste problema. Diga por qué ésta ecuación diferencial no es un contraejemplo del teorema de existencia y unicidad de soluciones.

   b) (2 ptos) Escoja una condición inicial con la cual se pueda garantizar la unicidad de la solución y dé el intervalo de definición I_0 mas grande que garantice dicha unicidad.

3. (8 ptos)

   a) Sabiendo que $y = c_1x + c_2xe^x$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $x^2y'' - (x^2+2x)y' + (x+2)y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Muestre que existen infinitas soluciones del problema de valor inicial formado por la ecuación diferencial dada y las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Argumente por qué en este caso no se contradice el teorema de existencia y unicidad de soluciones.

   b) Suponga que conocemos una solución y_1 de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = 0$$

   Explique de que forma debe definirse una segunda solución y_2 de manera tal que $\{y_1, y_2\}$ sea un conjunto fundamental de soluciones. Explique por qué al definir y_2 de dicha forma podemos afirmar que en efecto S es un conjunto linealmente independiente.

4. Un depósito se llena con 400 galones de agua pura. Se bombea al depósito salmuera que contiene 2 libras de sal por galón a razón de 4 gal/min. La solución bien mezclada se bombea hacia afuera a una rapidez de 8 gal/min.

   a) (2 ptos) Escriba el problema de valor inicial correspondiente al modelo que mejor se ajuste al problema.

   b) (8 ptos) Resuelva el problema de valor inicial y determine cuándo se vacía el depósito.

5. (15 ptos) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

   a) Las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^4 + 2$ no tienen extremos relativos, pero si cambian de concavidad en un punto.

   b) La ecuación diferencial $(x^2 + 1)y'' - xy' + y = 0$ tiene única solución para cualquier conjunto de condiciones iniciales.

   c) Suponga que $y_1, ..., y_k$ son soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden $k = n - 1$. Si y_{k+1} también es solución de la misma ecuación diferencial, entonces el conjunto de soluciones $\{y_1, ..., y_k, y_{k+1}\}$ es linealmente dependiente.

   d) Los siguientes conjuntos de funciones son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$: $S = \{2x + 1, 4x^3 + 6x + 3, 2x^3\}$ y $T = \{100, \operatorname{sen}^2 x, (\cos x)^2\}$.