

**Taller #3
Econometría 06216**

Profesor: Julio César Alonso C.

Monitora: Valentina Gatti

Notas:

- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller puede subirse en la plataforma Moodle hasta la 7:10 del 17 de Agosto de 2009. **Sólo se recibirán talleres en formato pdf.** Cualquier otro formato no será calificado.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar **únicamente** el trabajo de la pareja.
- Si bien no es necesario reportar todos los números decimales, sí lo es hacer los cálculos con **todos** ellos.

El ministro de minas y energías de la República de Zelaya desea estudiar los determinantes de la producción minera de este país entre los años 1969 y 1984. Para tal fin, lo ha contratado a usted como asesor económico. Su primera tarea es construir un modelo econométrico que le explique los determinantes del PIB de este sector económico. Para esto usted cuenta con las siguientes series: P_t es el nivel de producción en el año t medido en millones de zelanies constantes de 1984; W_t es la cantidad de trabajadores empleados en la producción del año t , medido en millones de horas/hombre y C_t representa el stock de capital medido en miles de caballos de vapor.

El asesor económico anterior encontró que la forma funcional más adecuada para el modelo es la siguiente:

$$e^{P_t} = Y / e^{-(\beta_1 W_t + \beta_2 C_t)} \quad (1.1)$$

Con una muestra de datos del periodo 1969-1984 suministrada en el archivo T3-02-09.xls y teniendo en cuenta las conclusiones de los estudios previos, conteste las siguientes preguntas:

1. De acuerdo con la información anterior conteste:
 - a. El asesor económico anterior afirmó que la forma funcional (1.1) puede ser estimado con un modelo lineal. Justifique porqué la afirmación es correcta.
 - b. Determine el modelo econométrico a estimar e interprete los coeficientes *a priori*, al igual que sus signos esperados.

2. De acuerdo con la información consignada en el archivo T3-02-09.xls, conteste las siguientes preguntas:
 - a. Escriba las matrices $X^T X$ y $X^T Y$, explicando claramente a qué pertenece cada componente.
 - b. Estime los coeficientes.
3. De acuerdo con lo anterior:
 - a. Estime la varianza del término perturbación.
 - b. Encuentre la matriz de varianzas y covarianzas e indique a qué corresponde cada elemento.

Gracias al éxito que tuvo el econométra, al realizar el análisis correspondiente al PIB de la industria minera de la República de Zelaya, la empresa más grande de este sector se interesó en contratarlo para que realizara un estudio sobre la función de costos de ésta. El jefe del departamento de contabilidad afirma que la función de costos es:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \quad (1.2)$$

donde Y_t representa los costos totales de la empresa en el momento t (medido en miles de zelanies); X_{1t} representa el precio de alquiler de los equipos de producción (medido en miles de zelanies); X_{2t} representa el logaritmo del salario pagado a cada trabajador en el momento t (medido en miles de zelanies) y X_{3t} es la cantidad de toneladas producidas por la empresa en el momento t . Una muestra de los últimos 15 años arrojó los siguientes resultados:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 20 & 60 & 80 & 70 \\ 60 & 200 & 280 & 180 \\ 80 & 280 & 400 & 220 \\ 70 & 180 & 220 & 300 \end{bmatrix} \quad X^T Y = \begin{bmatrix} 292 \\ 908 \\ 1232 \\ 976 \end{bmatrix} \quad Y^T Y = 4314,97$$

Por razones teóricas se tiene que:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

4. A partir de la información anterior:
 - a. Interprete los coeficientes del modelo (1.2).
 - b. Muestre como sería el nuevo modelo, teniendo en cuenta la información teórica proporcionada.
5. Continuando con la pregunta anterior: Estime los parámetros $\beta^T = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_3]$ del nuevo modelo por medio del método de MCO. Muestre claramente el procedimiento, así como la construcción de las nuevas matrices
6. De acuerdo a sus resultados en el numeral anterior:
 - a. Interprete el significado de los coeficientes del nuevo modelo.
 - b. Estime σ^2 .

Taller #3
Econometría 06216
Respuestas sugeridas

Profesor: Julio César Alonso C.

Monitora: Valentina Gatti

Notas:

- o Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- o Este taller puede subirse en la plataforma Moodle hasta la 7:10 del 17 de Agosto de 2009. **Sólo se recibirán talleres en formato pdf.** Cualquier otro formato no será calificado.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar **únicamente** el trabajo de la pareja.
- Si bien no es necesario reportar todos los números decimales, sí lo es hacer los cálculos con **todos** ellos.

El ministro de minas y energías de la República de Zelaya desea estudiar los determinantes de la producción minera de este país entre los años 1969 y 1984. Para tal fin, lo ha contratado a usted como asesor económico. Su primera tarea es construir un modelo econométrico que le explique los determinantes del PIB de este sector económico. Para esto usted cuenta con las siguientes series: P_t es el nivel de producción en el año t medido en millones de zelanies constantes de 1984; W_t es la cantidad de trabajadores empleados en la producción del año t , medido en millones de horas/hombre y C_t representa el stock de capital medido en miles de caballos de vapor.

El asesor económico anterior encontró que la forma funcional más adecuada para el modelo es la siguiente:

$$e^{P_t} = Y / e^{-(\beta_1 W_t + \beta_2 C_t)} \quad (1.1)$$

Con una muestra de datos del periodo 1969-1984 suministrada en el archivo T3-02-09.xls y teniendo en cuenta las conclusiones de los estudios previos, conteste las siguientes preguntas:

1. De acuerdo con la información anterior conteste:
 - a. El asesor económico anterior afirmó que la forma funcional (1.1) puede ser estimado con un modelo lineal. Justifique porqué la afirmación es correcta.

Respuesta sugerida:

El asesor económico anterior está en lo cierto, pues se puede linealizar el modelo reparametrizando de la siguiente manera:

$$e^{P_t} = Y / e^{-(\beta_1 W_t + \beta_2 C_t)}$$

$$e^{P_t} = \gamma e^{(\beta_1 W_t + \beta_2 C_t)}$$

$$\ln(e^{P_t}) = \ln(\gamma e^{(\beta_1 W_t + \beta_2 C_t)})$$

$$P_t = \ln \gamma + \ln e^{(\beta_1 W_t + \beta_2 C_t)}$$

$$P_t = \ln \gamma + \beta_1 W_t + \beta_2 C_t$$

Por tanto la forma funcional encontrada es una línea recta con pendientes de β_1 y β_2 e intercepto $\ln \gamma$.

- b. Determine el modelo econométrico a estimar e intérprete los coeficientes a priori, al igual que sus signos esperados.

Respuesta sugerida:

El modelo econométrico tiene tanto una parte determinística como una estocástica o aleatoria, la forma funcional encontrada en el literal anterior es un modelo matemático, para ser un modelo de regresión lineal múltiple se le debe incluir el término de error. De esta manera el modelo econométrico es:

$$P_t = \beta_0 + \beta_1 W_t + \beta_2 C_t + \varepsilon_t$$

La interpretación de los coeficientes es la siguiente:

β_0 : en ausencia de trabajadores y de Stock de Capital en la República de Zelaya en el momento t , el nivel de producción de la industria minera es de β_0 millones de zelanies constantes de 1984. Se espera que su signo sea positivo, en caso de acumulación de existencias o cero.

β_1 : ante un incremento de los trabajadores empleados en 1 millón de horas/hombre en el momento t , el nivel de producción de la industria minera incrementa en β_1 millones de zelanies constantes de 1984. Se espera que su signo sea positivo.

β_2 : ante un incremento del stock de capital en mil caballos de vapor en el momento t , el nivel de producción de la industria minera incrementa en β_2 millones de zelanies constantes de 1984. Se espera que su signo sea positivo.

2. De acuerdo con la información consignada en el archivo T3-02-09.xls, conteste las siguientes preguntas:
 - a. Escriba las matrices $X^T X$ y $X^T Y$, explicando claramente a qué pertenece cada componente.

Respuesta sugerida:

Inicialmente es necesario construir la matriz $X^T X$:

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum(W_t) & \sum(C_t) \\ \sum(W_t) & \sum(W_t)^2 & \sum(W_t C_t) \\ \sum(C_t) & \sum(W_t C_t) & \sum(C_t)^2 \end{bmatrix}$$

Todas las entradas de la matriz pueden ser calculadas de la siguiente forma:

$n = 16$ (Tamaño de la muestra)

$\sum(W_t) = 2.386,3$

$\sum(C_t) = 34.686$

$\sum(W_t)^2 = 361.388,9$

$\sum(W_t C_t) = 5.032.538$

$\sum(C_t)^2 = 82.307.268$

Entonces se tiene que:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 16 & 2.386,3 & 34.686 \\ 2.386,3 & 361.388,9 & 5.032.538 \\ 34.686 & 5.032.538 & 82.307.268 \end{bmatrix}$$

Ahora es necesario construir la matriz $X^T Y$:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} \sum(P_t) \\ \sum(P_t) * (W_t) \\ \sum(P_t) * (C_t) \end{bmatrix}$$

Cada una de las entradas puede ser calculada de la siguiente forma:

$\sum(P_t) = 4.202,2$

$\sum(P_t) * (W_t) = 614.704,4$

$\sum(P_t) * (C_t) = 9.898.661$

Entonces se tiene que:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 4.202,2 \\ 614.704,4 \\ 9.898.661 \end{bmatrix}$$

b. Estime los coeficientes.

Respuesta sugerida:

Para estimar los coeficientes es necesario emplear la siguiente fórmula:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

donde,

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 14,35267 & -0,07098 & -0,00171 \\ -0,07098 & 0,00037 & 7,31E-06 \\ -0,00171 & 7,31E-06 & 2,851E-07 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la fórmula se tiene que:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 14,35267 & -0,07098 & -0,00171 \\ -0,07098 & 0,00037 & 7,31E-06 \\ -0,00171 & 7,31E-06 & 2,851E-07 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4.202,2 \\ 614.704,4 \\ 9.898.661 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} -231,41 \\ 1,32 \\ 0,14 \end{bmatrix}$$

3. De acuerdo con lo anterior:

a. Estime la varianza del término perturbación.

Respuesta sugerida:

Para estimar la varianza es necesario emplear la siguiente fórmula:

$$s^2 = \frac{Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T Y}{n - k}$$

$$Y^T Y = \sum(P_t)^2 = 1.206.241,1$$

$$s^2 = \frac{1.206.241,1 - \begin{bmatrix} -231,41 \\ 1,32 \\ 0,14 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 4.202,2 \\ 614.704,4 \\ 9.898.661 \end{bmatrix}}{16 - 3}$$

$$s^2 = \frac{1.206.241,1 - 1.195.860,352}{16 - 3} = 785,519$$

b. Encuentre la matriz de varianzas y covarianzas e indique a qué corresponde cada elemento.

Respuesta sugerida:

Para construir la matriz de varianzas y covarianzas se emplea la siguiente fórmula:

$$Var(\hat{\beta}) = s^2(X^T X)^{-1}$$

De literal anterior se tiene que $s^2 = 818,9382$, por tanto:

$$Var(\hat{\beta}) = 785,519 * \begin{bmatrix} 14,35267 & -0,07098 & -0,00171 \\ -0,07098 & 0,00037 & 7,31E-06 \\ -0,00171 & 7,31E-06 & 2,851E-07 \end{bmatrix}$$

$$Var(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 11.460,88 & -56,6787 & -1,2643 \\ -56,6786 & 0,2952 & 0,0058 \\ -1,3643 & 0,0058 & 0,0002 \end{bmatrix}$$

Para indicar a qué corresponde cada componente se tiene que:

$$Var(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} s_{\hat{\beta}_0}^2 & s_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1}^2 & s_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2}^2 \\ s_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1}^2 & s_{\hat{\beta}_1}^2 & s_{\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1}^2 \\ s_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2}^2 & s_{\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1}^2 & s_{\hat{\beta}_2}^2 \end{bmatrix}$$

De esta manera:

$$s_{\hat{\beta}_0}^2 = 11.460,88$$

$$s_{\hat{\beta}_1}^2 = 0,2952$$

$$s_{\hat{\beta}_2}^2 = 0,0002$$

$$s_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1}^2 = -56,6787$$

$$s_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2}^2 = -1,2643$$

$$s_{\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1}^2 = 0,0058$$

Gracias al éxito que tuvo el econométra, al realizar el análisis correspondiente al PIB de la industria minera de la República de Zelaya, la empresa más grande de este sector se interesó en contratarlo para que realizara un estudio sobre la función de costos de ésta. El jefe del departamento de contabilidad afirma que la función de costos es:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \tag{1.2}$$

donde Y_t representa los costos totales de la empresa en el momento t (medido en miles de zelanies); X_{1t} representa el precio de alquiler de los equipos de producción (medido en miles de zelanies); X_{2t} representa el logaritmo del salario pagado a cada trabajador en el momento t (medido en miles de zelanies) y X_{3t} es la cantidad de toneladas producidas por la empresa en el momento t. Una muestra de los últimos 15 años arrojó los siguientes resultados:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 20 & 60 & 80 & 70 \\ 60 & 200 & 280 & 180 \\ 80 & 280 & 400 & 220 \\ 70 & 180 & 220 & 300 \end{bmatrix} \quad X^T Y = \begin{bmatrix} 292 \\ 908 \\ 1232 \\ 976 \end{bmatrix} \quad Y^T Y = 4314,97$$

Por razones teóricas se tiene que:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

4. A partir de la información anterior:
 a. Interprete los coeficientes del modelo (1.2).

Respuesta sugerida:

$\hat{\beta}_0$: Representa los costos de la empresa en el momento t, que no depende ni del precio de alquiler de los equipos de producción, ni del logaritmo del salario pagado a cada trabajador, ni de la cantidad de toneladas producidas.

$\hat{\beta}_1$: ante un incremento de mil zelanies en el precio de alquiler de los equipos de producción, los costos totales de la empresa en el momento t incrementan en $\hat{\beta}_1 * 1000$ zelanies.

$\hat{\beta}_2$: ante un incremento de 1% en el salario pagado a cada trabajador en el momento t, los costos totales de la empresa incrementan en $\hat{\beta}_2 * \frac{1}{100} * 1000$ zelanies.

Dado que $Y_t = \ln(w_t)$ donde w_t es el salario pagado a cada trabajador, entonces:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial w_t} = \frac{\beta_2}{w_t}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial w_t} * w_t = \beta_2$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial w_t} * \frac{1}{100} = \beta_2 * \frac{1}{100}$$

$\hat{\beta}_3$: ante un incremento de 1 tonelada en la cantidad producida, los costos totales de la empresa incrementan en $\hat{\beta}_3 * 1000$ zelanies.

- b. Muestre como sería el nuevo modelo, teniendo en cuenta la información teórica proporcionada.

Respuesta sugerida:

Note que la restricción se puede escribir de la forma:

$$\beta_2 = 1 - \beta_1$$

Reemplazando la restricción en la función 1.2 tenemos:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + (1 - \beta_1) X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + X_{2t} - \beta_1 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - X_{2t} = \beta_0 + \beta_1 (X_{1t} - X_{2t}) + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

Renombrando las variables se obtiene:

$$W_t = \beta_0 + \beta_1 Z_t + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

donde $W_t = Y_t - X_{2t}$, $Z_t = X_{1t} - X_{2t}$.

5. Continuando con la pregunta anterior: Estime los parámetros $\beta^T = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_3]$ del nuevo modelo por medio del método de MCO. Muestre claramente el procedimiento, así como la construcción de las nuevas matrices

Respuesta sugerida:

Inicialmente es necesario construir la nueva matriz $X^T X$ para el modelo

$$W_t = \beta_0 + \beta_1 Z_t + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum(Z_t) & \sum(X_{3t}) \\ \sum(Z_t) & \sum(Z_t)^2 & \sum(Z_t X_{3t}) \\ \sum(X_{3t}) & \sum(Z_t X_{3t}) & \sum(X_{3t})^2 \end{bmatrix}$$

Todas las entradas de la matriz pueden ser calculadas de la siguiente forma:

$n = 20$. Tamaño de la muestra.

$$\sum(Z_t) = \sum(X_{1t} - X_{2t}) = \sum X_{1t} - \sum X_{2t} = 60 - 80 = -20$$

$$\sum(Z_t)^2 = \sum(X_{1t} - X_{2t})^2 = \sum(X_{1t}^2 - 2X_{1t}X_{2t} + X_{2t}^2) = \sum X_{1t}^2 - 2 \sum X_{1t}X_{2t} + \sum X_{2t}^2$$

$$\sum(Z_t)^2 = 200 - 2(280) + 400 = 40$$

$$\sum(Z_t X_{3t}) = \sum(X_{1t} - X_{2t}) X_{3t} = \sum X_{1t} X_{3t} - \sum X_{2t} X_{3t} = 180 - 220 = -40$$

Entonces tenemos que: $X^T X = \begin{bmatrix} 20 & -20 & 70 \\ -20 & 40 & -40 \\ 70 & -40 & 300 \end{bmatrix}$

Ahora es necesario construir la matriz $X^T W = \begin{bmatrix} \sum W_t \\ \sum W_t * Z_t \\ \sum W_t * X_{3t} \end{bmatrix}$ cada una de las

entradas viene dada por las siguientes sumatorias:

$$\sum W_t = \sum(Y_t - X_{2t}) = \sum Y_t - \sum X_{2t} = 292 - 80 = 212$$

$$\sum W_t * Z_t = \sum(Y_t - X_{2t})(X_{1t} - X_{2t}) = \sum Y_t X_{1t} - \sum Y_t X_{2t} - \sum X_{1t} X_{2t} + \sum X_{2t}^2 = -204$$

$$\sum W_t * X_{3t} = \sum(Y_t - X_{2t})X_{3t} = \sum Y_t X_{3t} - \sum X_{2t} X_{3t} = 976 - 220 = 756$$

Por tanto $X^T W = \begin{bmatrix} 212 \\ -204 \\ 756 \end{bmatrix}$

Ahora ya se puede calcular los coeficientes utilizando la siguiente fórmula:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T W$$

donde,

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 13/5 & 4/5 & -1/2 \\ 4/5 & 11/40 & -3/20 \\ -1/2 & -3/20 & 1/10 \end{bmatrix}$$

Remplazando en la fórmula se tiene que:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 13/5 & 4/5 & -1/2 \\ 4/5 & 11/40 & -3/20 \\ -1/2 & -3/20 & 1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 212 \\ -204 \\ 756 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1/10 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

6. De acuerdo a sus resultados en el numeral anterior:

- a. Interprete el significado de los coeficientes del nuevo modelo.

Respuesta sugerida:

β_0 : Representa los costos de la empresa en el momento t, que no depende ni del precio de alquiler de los equipos de producción, ni del logaritmo del salario pagado a cada trabajador, ni de la cantidad de toneladas producidas por la empresa.

β_1 : Es el monto en que incrementan los costos totales de la empresa cuando hay un incremento en 1000 zelanies en el precio de alquiler de los equipos de producción.

β_3 : Cuando incrementa la producción de la empresa en una tonelada, los costos totales de la empresa se incrementan en $\beta_3 * 1000$ zelanies.

- b. Estime la σ^2 .

Respuesta sugerida:

Para estimar la varianza es necesario emplear la siguiente fórmula:

$$s^2 = \frac{W^T W - \hat{\beta}^T X^T W}{n - k}$$

$$W^T W = \sum (W_t)^2 = \sum (Y_t - X_{2t})^2 = \sum (Y_t)^2 - 2 \sum (Y_t - X_{2t}) + \sum (X_{2t})^2$$

$$W^T W = 4314,97 - 2(1232) + 400 = 2250,97$$

$$s^2 = \frac{2250,97 - \begin{bmatrix} 10 \\ 1/10 \\ 1/5 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 212 \\ -204 \\ 756 \end{bmatrix}}{20 - 3} = \frac{2250,97 - 2250,8}{17} = \frac{0,17}{17} = \frac{1}{100} = 0,01$$