UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL
EXAMEN FINAL

NOMBRE:____ CÓDIGO:________________

PROFESOR:_______________________________________ GRUPO:________________

NOTA: El valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **120** puntos.

SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. Considere la función $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(x, y, z, w) = (x + y + z + w, x + y - z, y + 2z - w)$$

   a) (6 ptos) Muestre que L es una transformación lineal. Encuentre una matriz que represente a la transformación lineal L.
   b) (7 ptos) Encuentre una base para el *nucleo*(L). Justifique su elección.
   c) (5 ptos) Encuentre una base para la *imagen*(L). Justifique su elección.
   d) (4 ptos) Calcule el *rango*(L) y la *nulidad*(L).
   e) (4 ptos) ¿Es L una transformación lineal uno a uno? ¿Es L una transformación lineal sobre? Justifique su respuesta.
   f) (6 ptos) Determine si el vector $(1, 1, -1, -1) \in Nucleo(L)$. Determine si el vector $(1, 1, 1) \in Imagen(L)$. Justifique su respuesta.

2. Considere la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2)$.

   a) (4 ptos) ¿Es A una matriz singular o no singular? Justifique su respuesta.
   b) (14 ptos) Diagonalice ortogonalmente la matriz A. Escriba la matriz diagonal D y la matriz ortogonal P, tales que $D = P^T AP$.

3. (20 ptos) Considere los siguientes puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, -1, 1)$ y $R(0, 1, 1)$.

   a) Encuentre la ecuación del plano π_1 que contiene a los puntos P, Q y R .
   b) Verifique que el punto $A(1, 0, 1)$ no pertenece al plano π_1 . Encuentre la ecuación de un plano π_2 paralelo al plano π_1 que pase por el punto $A(1, 0, 1)$.
   c) Calcule la distancia entre los planos π_1 y π_2.

4. (16 ptos)

   a) Sea A una matriz 6×4, sustente por qué el conjunto formado por las filas de A es un conjunto linealmente dependiente. De una condición necesaria para que el conjunto formado por las columnas de la misma matriz A, formen un conjunto linealmente independiente. Justifique su respuesta.

   b) Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to P_2$ definida por $T(a, b, c) = ct^2 + (a - b)t + (b + c)$ Explique por qué T es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y P_2.

   c) Suponga que B es una matriz simétrica de 6×6. Si todos los valores propios de la matriz B tienen multiplicidad algebraica 2, ¿cuál es la multiplicidad geométrica asociada al espacio propio de cada valor propio?

   d) Sea $S = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{w}_n\}$ una base para el espacio vectorial W. Verifique que $\{[\boldsymbol{w}_1]_S, [\boldsymbol{w}_2]_S, ..., [\boldsymbol{w}_n]_S\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

5. (24 puntos)

   a) Sean u y v soluciones del sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = 0$. Muestre que cualquier combinación lineal de u y v es también solución del mismo sistema homogéneo.

   b) Demuestre que si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tiene dos soluciones distintas, entonces tiene infinitas soluciones.

   c) Sean W_1y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Sea $W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2,\ \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2\}$. Muestre que $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

   d) Sea A una matriz $n \times n$. Demuestre que $\det A$ es igual al producto de los valores propios de A.

6. (10 puntos) Elija y resuelva uno y sólo uno de los siguientes items.

   a) Argumente por qué la matriz $T = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix}$ puede considerarse una matriz de transición regular de un proceso de Markov y encuentre el vector de estado estacionario para dicha matriz T.

   b) Determine una forma cuadrática h equivalente a la forma cuadrática $g(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 10yz$.