



EXAMEN FINAL DE CÁLCULO EN UNA VARIABLE. 19 de mayo de 2011

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

PROFESOR: _____ GRUPO: _____

PRIMERA PARTE

1. (16 puntos)

(a) Dada la función: $f(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4}\right)^2$, calcule $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto (1,1) a la curva $1 + \ln(xy) = e^{x-y}$.

2. (18 puntos)

(a) Encuentre una función f tal que $f''(x) = 2x$ y la gráfica de f tiene una recta tangente horizontal en el punto (2,0).

(b) Calcule la integral $\int \frac{\cos x}{\text{sen } x(\text{sen } x - 1)} dx$

3. (12 puntos) Dibuje la gráfica de una función $y = f(x)$ que tenga las siguientes características:

$$f(0) = f(5) = f(7) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$$

$$f'(x) > 0 \text{ si } x < 2 \text{ ó } 6 < x < 8$$

$$f'(x) < 0 \text{ si } 2 < x < 4 \text{ ó } 4 < x < 6 \text{ ó } x > 8$$

$$f'(2) = f'(6) = f'(8) = 0$$

$$f''(x) < 0 \text{ si } x < 4 \text{ ó } x > 7; \quad f''(x) > 0 \text{ si } 4 < x < 7.$$

4. Considere las funciones: $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = x^2$.

(a) (4 puntos) Dibuje en el plano cartesiano la región **R** acotada por las gráficas de f y g . Debe identificar los puntos de intersección de las dos curvas.

(b) (11 puntos) Formule una integral que represente el área de la región **R**. (No evalúe la integral).

(c) (11 puntos) Formule una integral que represente el volumen del sólido que se obtiene cuando la región **R** se hace girar alrededor del eje y . (No evalúe la integral).

5. (10 puntos) Escoja y resuelva uno (sólo uno) de los siguientes problemas:

- (a) En un tanque cónico (con el vértice abajo), el agua entra a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El tanque mide 10 pies de diámetro en su parte más alta y tiene 12 pies de profundidad. Determine la razón de cambio del nivel de profundidad del agua, cuando dicho nivel es de 8 pies. (Nota: el volumen de un cono circular recto de radio R y altura H se calcula con la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$).
- (b) Determine el largo y el ancho del rectángulo de menor perímetro que tiene un área de 32 pies cuadrados.

SEGUNDA PARTE

Cada ítem tiene un valor de 6 puntos.

1. Verifique si el siguiente enunciado es correcto o incorrecto. Justifique su respuesta:

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sec^2 x \, dx = \tan(3\pi/4) - \tan(\pi/4) = -1 - 1 = -2$$

2. Encuentre una función f y todos los posibles valores de c tales que

$$\int_c^x f(t) \, dt = x^2 + x - 2$$

Sugerencia: derive a ambos lados de la igualdad utilizando el segundo teorema fundamental del cálculo. Después utilice el teorema fundamental del cálculo.

3. Demuestre que si $a > 0$ y n es un entero positivo, entonces la función polinomial $p(x) = x^{2n+1} + ax + b$ no puede tener dos raíces reales.