



CONTRIBUCIÓN AL APRENDIZAJE AUTÓNOMO DEL TEOREMA DEL COSENO  
BASADA EN EL DESARROLLO DE HABILIDADES DE FLUIDEZ Y COMPRENSIÓN

LECTORA

TRABAJO DE GRADO

YENNY ARAMBURO URBANO  
VICTORIA EUGENIA CORREA RIOS

UNIVERSIDAD ICESI  
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN  
SANTIAGO DE CALI

2018



CONTRIBUCIÓN AL APRENDIZAJE AUTÓNOMO DEL TEOREMA DEL COSENO  
BASADA EN EL DESARROLLO DE HABILIDADES DE FLUIDEZ Y COMPRENSIÓN  
LECTORA

TRABAJO DE GRADO

YENNY ARAMBURO URBANO  
VICTORIA EUGENIA CORREA RIOS

Asesor de investigación  
Ph.D ALEXANDER BONILLA

UNIVERSIDAD ICESI

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN  
SANTIAGO DE CALI

2018

### **Nota de Aceptación**

Aprobado por el comité de grado, en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Universidad ICESI para optar el título de Magíster en Educación.

---

Presidente del Jurado

---

Firma del Jurado

---

Firma del Jurado

Santiago de Cali, del 2018

## Tabla de contenido

Introducción .....	13
Estado del arte.....	15
Planteamiento del problema.....	33
Justificación .....	37
Objetivos .....	43
Objetivo general .....	43
Objetivos específicos.....	43
Marco de referentes conceptuales .....	44
Importancia de la comprensión lectora en el aprendizaje .....	44
El lenguaje en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas .....	45
La lectura como herramienta de aprendizaje autónomo en el aula de matemáticas .....	47
Enseñanza y aprendizaje del objeto matemático: Teorema del Coseno.....	49
Triángulo semántico. ....	49
Dificultades en el aprendizaje del Teorema del Coseno.....	54
Pensamientos matemáticos. ....	56
Sistemas matemáticos.....	57
Estándares básicos de competencia en matemáticas y lenguaje para la construcción del concepto: Teorema del Coseno.....	59
El aprendizaje autónomo y el aprendizaje de las matemáticas .....	59
Fases del aprendizaje autónomo. ....	60
Características del aprendizaje autónomo. ....	61
Los saberes previos relacionados con el objeto matemático. ....	61
Rol del docente y del estudiante-grados de autonomía. ....	62
Trabajo cooperativo. ....	64
Actividades para el desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora.....	67
Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación-TIC en la educación.....	71
Contexto institucional .....	75
Marco legal.....	77
Marco metodológico .....	80
Tipo de investigación .....	80
Alcance y diseño de la investigación .....	80

Participantes .....	81
Técnicas e instrumentos de recolección de datos .....	82
Categorías de análisis .....	89
Procedimiento.....	92
Consideraciones éticas .....	98
Presentación y Análisis de resultados .....	99
Resultados de la caracterización de la fluidez lectora.....	99
Caracterización de la comprensión lectora.....	100
Resultados obtenidos con base en los conocimientos sobre el Teorema del coseno .....	102
Actividades de alistamiento, creación de un ambiente para el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno.....	105
Estrategia para el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno.....	109
Discusión de los resultados.....	111
Caracterización de la fluidez, comprensión lectora y conocimientos sobre el Teorema del Coseno.....	111
Creación de condiciones para el desarrollo de la fluidez, comprensión lectora y aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno .....	115
Contribución al aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno .....	119
Conclusiones y recomendaciones .....	126
Referencias bibliográficas.....	132

## Figuras

<b>Figura 1.</b> Competencias evaluadas en matemáticas – grado noveno 2016 .....	39
<b>Figura 2.</b> Componentes evaluados en matemáticas – grado noveno 2016.....	41
<b>Figura 3.</b> Objeto matemático Teorema del Coseno.....	49
<b>Figura 4.</b> Estructura conceptual del Teorema del Coseno .....	50
<b>Figura 5.</b> Sistemas semióticos de representación.....	52
<b>Figura 6.</b> Fenomenología del Teorema del Coseno .....	53
<b>Figura 7.</b> Preguntas insertadas en ATLAS.ti .....	96
<b>Figura 8.</b> Resultados en ATLAS.ti.....	97
<b>Figura 9.</b> Resultados de los niveles de velocidad lectora.....	99
<b>Figura 10.</b> Resultados de preguntas de nivel literal .....	100
<b>Figura 11.</b> Resultados de preguntas de nivel inferencial .....	101
<b>Figura 12.</b> Resultados indicadores del aprendizaje autónomo .....	110
<b>Figura 13.</b> Condiciones necesarias para el aprendizaje autónomo.....	119
<b>Figura 14.</b> Aprendizaje Autónomo - Acuerdos convivenciales .....	120
<b>Figura 15.</b> Aprendizaje Autónomo - Activación de conocimientos previos.....	122
<b>Figura 16.</b> Aprendizaje Autónomo-Acompañamiento y guía del docente.....	122
<b>Figura 17.</b> Aprendizaje autónomo -Trabajo cooperativa .....	123
<b>Figura 18.</b> Aprendizaje autónomo - Apropiación de habilidades de comprensión lectora .....	124

## Lista de tablas

<b>Tabla 1.</b> Dificultades en el aprendizaje del Teorema del Coseno .....	55
<b>Tabla 2.</b> Roles del docente y el estudiante en el aprendizaje autónomo .....	64
<b>Tabla 3.</b> Velocidad de la lectura 7° y 8° básico .....	69
<b>Tabla 4.</b> Niveles de comprensión lectora .....	70
<b>Tabla 5.</b> Modelos para el manejo de la información .....	72
<b>Tabla 6.</b> Diario de campo .....	83
<b>Tabla 7.</b> Rejilla de seguimiento aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno .....	83
<b>Tabla 8.</b> Escala para medir la velocidad de lectura .....	85
<b>Tabla 9.</b> Características de las preguntas relacionadas con los niveles de comprensión lectora.....	86
<b>Tabla 10.</b> Características de las preguntas de los conocimientos previos para el aprendizaje del Teorema del Coseno.....	87
<b>Tabla 11.</b> Instrumento para validar el Test de comprensión lectora y Test de conocimientos sobre el Teorema del Coseno .....	89
<b>Tabla 12.</b> Operacionalización de las categorías de análisis .....	90
<b>Tabla 13.</b> Actividades desarrolladas en cada una de las etapas de investigación.....	97
<b>Tabla 14.</b> Análisis de ganancia de Hake de acuerdo con el número de respuestas acertadas por estudiante .....	103
<b>Tabla 15.</b> Análisis de ganancia de Hake relacionado con el número de estudiantes que respondieron acertadamente por pregunta .....	104
<b>Tabla 16.</b> Análisis de ganancia de Hake de acuerdo con las categorías según Errores y objetos matemáticos asociados al Teorema del Coseno.....	105
<b>Tabla 17.</b> Resultados diarios de campo.....	106

## Lista de anexos

<b>Anexo 1. Estándares básicos en la construcción del concepto Teorema del Coseno integrado a la comprensión lectora.....</b>	<b>137</b>
<b>Anexo 2. Consentimiento informado.....</b>	<b>139</b>
<b>Anexo 3. Clases realizadas en el desarrollo de la estrategia.....</b>	<b>141</b>
<b>Anexo 4 .Instrucciones generales para el (la) docente o evaluador .....</b>	<b>142</b>
<b>Anexo 5. Protocolo del lector .....</b>	<b>143</b>
<b>Anexo 6. Lectura con preguntas diseñadas con base en los niveles de lectura comprensiva .....</b>	<b>148</b>
<b>Anexo 7. Pre-test y post-test de conocimientos sobre el Teorema del Coseno .....</b>	<b>151</b>
<b>Anexo 8. Actividades que representan los contenidos previos y las habilidades de lectura comprensiva necesarias para el aprendizaje del Teorema del Coseno .....</b>	<b>157</b>
<b>Anexo 9. Estrategia de aprendizaje para movilizar los conocimientos en torno al Teorema del Coseno .....</b>	<b>164</b>
<b>Anexo 10. Resultados prueba de caracterización de la fluidez lectora. Velocidad .....</b>	<b>165</b>
<b>Anexo 11. Rúbrica de seguimiento aprendizaje autónomo .....</b>	<b>166</b>
<b>Anexo 12. Resultado de comprensión lectora del estudiante 16 .....</b>	<b>170</b>



## **Dedicatoria**

A Dios por brindarme la fortaleza espiritual necesaria para seguir el hermoso camino de educar, a mis hijas **Jessica** y **Valentina**, quienes comprendieron mis ausencias y me acompañaron en este proceso, a mi madre y mi hermano, seres inigualables, siempre apoyando y orientando mis decisiones, a Carlos, una persona muy especial que desde la distancia siempre me animó para continuar. Finalmente a toda mi familia, que a pesar de mi ausencia siempre me dieron un lugar en los momentos de diversión.

VICTORIA EUGENIA CORREA RIOS

Gracias a Dios por todas las bendiciones recibidas, a mis hijos **José David** y **Joshua**, a mi compañera de tesis, a mi familia y amigos, por el acompañamiento en el alcance de esta meta. A todos ellos dedico el fruto de este esfuerzo.

YENNY ARAMBURO URBANO

**“El verdadero arte del maestro es despertar la alegría por el trabajo y el conocimiento”**

**Albert Einstein**

## **AGRADECIMIENTOS**

Las docentes investigadoras de este trabajo quieren expresar sus más sinceros agradecimientos a quienes hicieron posible este logro.

A Dios, por regalarnos la sabiduría necesaria en cada momento a lo largo de este camino.

Al Ministerio de Educación Nacional de Colombia, por otorgarnos la beca para la cualificación de nuestra profesión como docentes a fin de alcanzar la calidad educativa.

A la Universidad ICESI por abrirnos sus puertas y brindarnos docentes idóneos para crecer intelectual y profesionalmente en el hermoso oficio de enseñar.

A la institución educativa Libardo Madrid Valderrama por acompañarnos en el proceso de adjudicación de esta beca y a nuestros compañeros docentes quienes estuvieron dispuestos a colaborarnos en lo que resultara necesario.

Finalmente a los estudiantes del grado 10-6, quienes de una u otra forma estuvieron dispuestos a apoyarnos con su compromiso y apoyo en cada momento, para la implementación de las diferentes estrategias que se desarrollaron en esta investigación.

## **Resumen**

El propósito principal del trabajo fue brindar herramientas prácticas a los estudiantes para potenciar el progreso de competencias lingüísticas que les permitiera aprender el Teorema del Coseno. Para tal fin, se caracterizó a los estudiantes con respecto a la fluidez (velocidad en la lectura), niveles de comprensión lectora (literal, inferencial y crítico) y los conocimientos sobre el tema. Con ello, posteriormente se diseñó un conjunto de actividades y una estrategia para el desarrollo de habilidades de lectura integradas en el aula de matemáticas a través del aprendizaje autónomo, con el objetivo de subsanar las debilidades encontradas. El estudio se realizó con enfoque mixto por estudio de caso, recolectando la información a través de diarios de campo, rejilla de seguimiento, ficha de caracterización, y test, de lo que se obtuvo datos cualitativos, estos analizados con el software ATLAS.ti y datos cuantitativos con el uso de la fórmula de ganancia normalizada de Hake. Se encontró que los estudiantes fortalecieron habilidades de lectura favoreciendo el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno.

Palabras claves: Estrategias de lectura, Fluidez y comprensión lectora, Aprendizaje autónomo, Teorema del Coseno.

## **Abstract**

The main purpose of the work was to provide practical tools to students to enhance the progress of language skills that would allow them to learn the “Coseno” Theorem. For this purpose, the students were characterized with respect to fluency (speed in reading), levels of reading comprehension (literal, inferential and critical) and knowledge about the subject. With this, a set of activities and a strategy for the development of reading skills integrated in the mathematics classroom through autonomous learning were subsequently designed, with the aim of correcting the weaknesses found. The study was carried out with a mixed approach by case study, collecting information through field journals, monitoring grid, characterization record, and test, from which qualitative data was obtained, these analyzed with the software ATLAS.ti and quantitative data with the use of Hake's normalized gain formula. It was found that the students strengthened reading skills by favoring autonomous learning of the “Coseno” Theorem.

Key words: Reading Strategies, Reading Fluency and Reading, Autonomous Learning, “Coseno” Theorem.

## **Introducción**

El desarrollo del pensamiento matemático incorpora diferentes conceptos, teorías y procedimientos trascendentales que se estructuran y relacionan a través de un lenguaje especializado. De esta forma, el lenguaje es más que un medio para comunicar una disciplina, es parte de ella (Norris & Phillips, 2003). Por tanto, es necesario ser consciente de la importancia de implementar estrategias de lectura en el aula de matemáticas para lograr el aprendizaje de calidad de los objetos matemáticos, siendo el presente trabajo de grado una muestra de una de las tantas formas en que esta pretensión se puede conseguir.

Uno de los alcances más significativos de la investigación está orientado a la importancia de caracterizar aspectos como la lectura y los conocimientos en torno a un tema, lo cual posibilita, al maestro el conocimiento de las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y las convierte en oportunidades de enseñanza.

En este orden, es relevante que el docente caracterice a los estudiantes para iniciar un nuevo conocimiento, después de superar los conceptos que anteceden a él. De acuerdo con esta experiencia se alcanzan mejores resultados porque el estudiante no tiene restricciones de tipo cognitivo para adquirir el nuevo saber.

Desde el punto de vista del desempeño escolar, las habilidades de lectura desarrolladas por los estudiantes permiten obtener mejores resultados en las diferentes disciplinas del currículo, así como en pruebas internas y externas.

Acorde con las apreciaciones anteriores, este trabajo constituye un punto de partida para futuras investigaciones, cuyo objeto de estudio sea la integración de la lectura en el proceso de

enseñanza de las matemáticas como una opción para desarrollar habilidades de aprendizaje autónomo en los estudiantes, contribuyendo así al avance de esta línea de investigación.

Con las ideas anteriores en mente, este documento presenta los aspectos más relevantes del proceso de investigación desarrollado. Este se encuentra dividido en seis apartados, el primero comprende el estado del arte y el planteamiento del problema, el segundo contiene el marco de referentes conceptuales que incluye aspectos como el lenguaje en la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje autónomo y el aprendizaje del Teorema del Coseno.

El tercer apartado abarca el marco metodológico, describiendo el enfoque mixto por estudio de caso y las técnicas e instrumentos que hicieron posible el desarrollo de la investigación. En los apartados cuatro y cinco se presentan, analizan y discuten los resultados. Finalmente en el apartado seis se plantean las conclusiones y las recomendaciones que emergen del estudio realizado.

## Estado del arte

De acuerdo con el rastreo realizado es evidente que existen investigaciones relacionadas con la importancia de la lectura para el aprendizaje en las diferentes disciplinas del currículo escolar, lo que vislumbra un panorama para las matemáticas. En este sentido, los antecedentes consultados abordan objetos de estudio como: *el lenguaje en la educación, el lenguaje en la educación de las matemáticas, la lectura como estrategia de aprendizaje de las matemáticas, la fluidez de la lectura, contexto nacional y de aula y el aprendizaje del objeto matemático Teorema del Coseno.*

En relación con, *el lenguaje en la educación* se mencionan trabajos como el de Haquin et al., (2013) quienes proponen un estudio documental enfocado en el contexto escolar asociados a una perspectiva multimodal, los cuales permiten el aprendizaje de los contenidos disciplinares desde diferentes nociones de representación y semiosis, no sólo a través de la escritura, sino también de dibujos, fotos, mapas, tablas, gráficos, entre otros Kress, Ogborn, y Martins (citado por Haquin et al., 2013b), que brindan nuevos aspectos de alfabetización. Para este estudio se usan diferentes ejemplos de textos multimodales, donde los estudiantes deben generar interpretaciones. Los autores concluyen que, la escuela cumple un papel fundamental en esta alfabetización, debido a que es en la etapa escolar donde el estudiante amplía su lenguaje y comienza a integrar diferentes comunidades y culturas que enriquecen su identidad. Adicionalmente, es importante para que los estudiantes desarrollen diversas capacidades y tengan la posibilidad de generar aprendizajes significativos y acordes con las características necesarias e indispensables para aprender mediante el uso de diferentes representaciones de textos en la sociedad actual que cada día exige más personas alfabetizadas, asociadas con la información, la comunicación y las tecnologías multimediales.

En este orden de ideas, Shanahan & Shanahan (2008) en su investigación sugieren hábitos de alfabetización disciplinar, que incluyen el uso de la lectura, razonamiento, investigación, conversación y escritura requerida para aprender y formarse en conocimiento de contenidos propios de acuerdo con las diferentes disciplinas para lo cual desarrolla un modelo en forma de pirámide que inicia en la parte inferior con la instrucción básica, donde predomina la decodificación y el conocimiento de palabras frecuentes. Luego asciende con la instrucción intermedia, que abarca el uso de estrategias generales y de fluidez para la comprensión y finalmente el tercer nivel, instrucción de la disciplina que aborda las habilidades específicas para cada área de conocimiento. Estos niveles se desarrollan desde la escuela primaria hasta la media. Este modelo evidencia el progreso de habilidades intermedias que finalmente se reflejan en “leer para entender”.

Asumiendo los estudios anteriores como premisa para este trabajo, puede aducirse que el lenguaje juega un papel importante en la comprensión de textos multimodales presentados en las matemáticas, estos abundan en los diferentes medios de comunicación que son de fácil acceso para los estudiantes de las escuelas que han sido dotadas de aulas TIC y que deben ser una herramienta de enseñanza para los docentes que pertenecen a estas. Así mismo, vislumbran la importancia de desarrollar habilidades de lectura para la selección de información dentro y fuera de la escuela.

Así pues, la alfabetización disciplinar que incluye el uso de la lectura, es una habilidad fundamental para la vida del individuo que asume nuevos retos en la sociedad del conocimiento, esta última exige el dominio de diferentes tipos de textos, los cuales son un medio de comunicación a través de la utilización de las tecnologías de información y comunicación. Para



ello es indispensable integrar el lenguaje en la educación de las matemáticas como se describe en las siguientes investigaciones.

Por otra parte, el segundo componente *el lenguaje en la educación de las matemáticas* es soportado por estudios como el de Jorba (2000) que en su trabajo de investigación diseña secuencias didácticas desde las áreas de las ciencias experimentales y las matemáticas. Este autor comprueba que la tarea de mejorar las habilidades lingüísticas en los estudiantes es una responsabilidad de todos los docentes desde las diferentes áreas de conocimiento y no exclusivamente del área de lengua castellana. Finalmente, concluye que la incorporación del lenguaje al aula de forma consciente e interactiva por parte de los docentes de las diferentes áreas, en el caso específico de las matemáticas; proporciona a los estudiantes habilidades de lectura, escritura y oralidad que evolucionan progresivamente hacia un lenguaje especializado.

Consecuentemente, Larson (2014) realiza un trabajo de investigación en el Departamento de Enseñanza y Aprendizaje con el profesorado en Educación de la Universidad de Nebraska – Lincoln, quien plantea que el aprendizaje de las matemáticas requiere de habilidades de lectura y escritura específicas indispensables para su comprensión. Dichas habilidades consisten en la alfabetización matemática, sin embargo, los docentes de esta disciplina necesitan este conocimiento, debido a que se encuentran en el “dualismo” entre enseñar contenido matemático o el uso de estrategias de alfabetización. Por esta razón, es importante examinar la formación que se imparte a los profesores de matemáticas en su desarrollo profesional para la integración de estos dos aspectos. El objetivo de este trabajo fue implementar de forma explícita la comprensión de la lectura y la escritura desde cada disciplina para incrementar el nivel de desempeño de los estudiantes. Para ello, se estructuraron ocho estrategias de lectura y escritura de textos. De los resultados se determina que, los docentes deben propiciar estrategias de alfabetización en los

estudiantes de educación básica secundaria y media sin depender de los conocimientos que ellos traen desde la primaria, los adolescentes necesitan estos conocimientos para su desarrollo profesional, así pues, si ellos son formados con las estrategias necesarias de alfabetización para entender un texto de cualquier disciplina, incluyendo su lenguaje especializado, estarán en condiciones para enfrentar las demandas académicas del siglo XXI.

Así mismo, Candela & Espinosa (2016) en su artículo sintetizan los diferentes aspectos que ofrece la literatura acerca de la introducción del lenguaje en el aula de ciencias, siendo este un inicio para la implementación desde las diferentes disciplinas, específicamente de las matemáticas. En este documento se realiza un rastreo acerca del uso de diferentes estrategias para aprender a través de la implementación del lenguaje en el aula, las cuales son referenciadas desde varios autores. Con el fin de dar respuesta al interrogante ¿Qué dice la literatura sobre la integración del lenguaje en el aula como una herramienta de pensamiento y aprendizaje? Se establecen cuatro categorías tales como: Influencia del lenguaje verbal y escrito dentro del aula, relaciones entre hablar, escuchar y aprender; la lectura como medio para el aprendizaje y finalmente la escritura como estrategia de pensamiento para el aprendizaje en el aula. Todas ellas relacionadas con la ciencia pero siendo extensivas a las diferentes disciplinas que integran el currículo escolar. De los resultados obtenidos, se concluye que la incorporación del lenguaje en el aula de matemáticas de forma explícita, interactiva y subsidiaria; posibilita el desarrollo consciente de habilidades lingüísticas, tales como la oralidad, la lectura y la escritura; además de la construcción del conocimiento, de la cual, emana la participación activa de los estudiantes a través de la comunicación que se establece en el aula.

Según los planteamientos de estos autores, fue posible obtener información relevante para la construcción del marco de referentes conceptuales que sustentan este estudio, se evidencia la

influencia del lenguaje como una estrategia de pensamiento y aprendizaje de los conceptos de las matemáticas. Igualmente, admite justificar la importancia de integrar el lenguaje en el aula de matemáticas como parte fundamental en el aprendizaje de los contenidos en esta disciplina. Para el desarrollo de habilidades de lenguaje se abordan diferentes aspectos tales como: oralidad, lectura y escritura.

De esta manera, es posible hablar de *la lectura como estrategia de aprendizaje de las matemáticas*, en este sentido, Oliveras & Sanmartí (2009) en su artículo analizan diferentes actividades aplicadas a estudiantes de educación secundaria. Estas orientadas a desarrollar la capacidad de leer críticamente, de discutir su fundamentación y de exponer las conclusiones con respecto a los resultados obtenidos. Para lo cual argumentan que, en la actualidad uno de los retos de la escuela es desarrollar en los estudiantes la capacidad para encontrar, comprender y leer críticamente la información, la cual será aplicada en diferentes contextos. Para el diseño de estas actividades se han ejecutado diferentes tipos de estrategias didácticas: la primera un cuestionario para confrontar la lectura del texto, el cual busca promover una lectura significativa y crítica. La segunda es tener en cuenta para el diseño de cada actividad tres fases del proceso del lector tales como: previa, durante y después de la lectura para esto es indispensable compartir con los estudiantes el propósito, el producto final esperado y el proceso para llegar a él, incluyendo las razones para lograrlo. Asumiendo estos planteamientos, en este trabajo se promueve el desarrollo de actividades de lectura en pequeños grupos cooperativos con el objetivo de que sus integrantes compartan, discutan sobre la actividad y establezcan conclusiones.

De acuerdo con los planteamientos anteriores, en la secuencia de tareas elaboradas para cada actividad es importante dar a conocer las razones por las cuales deben ser realizadas y lo

que se espera de ellas, propiciando la intervención de los estudiantes, formulando conclusiones con respecto al producto final, que para el caso particular fue una presentación en power point, esta posibilita la reorganización de sus ideas. Así pues, este tipo de actividades desarrollan competencias en los estudiantes, entendiendo que el lenguaje es una actividad social compartida.

En la misma línea, el Gobierno de Navarra (2003) en un artículo que tuvo como objetivo orientar al profesorado en la práctica diaria de la lectura comprensiva en todas las áreas del currículo, argumenta que el uso apropiado del lenguaje favorece el aprendizaje de cualquier disciplina. Esto no sólo implica la decodificación del texto, también implica un proceso de interacción entre lector y texto para interpretar y reflexionar a partir de él. Estas habilidades deben ser enseñadas por el profesor de manera intencional a través de estrategias de comprensión lectora, que consiste en técnicas para aprender a interpretar textos.

En su pretensión de ofrecer estas estrategias, el artículo referencia a Solé (2001) quien señala la activación de diferentes habilidades antes, durante y después de la lectura. Además, da relevancia a los tipos de textos y características del lenguaje especializado en cada disciplina. De lo anterior cabe resaltar, la activación de saberes previos en relación con la lectura y el propósito de esta, los cuales deben ser claros para el estudiante. Asimismo, este artículo presenta ejemplificaciones para trabajar la lectura de textos en el aula con orientaciones que facilitan la comprensión de textos en el estudiante tales como: activación de conocimientos previos, guías de lectura, actividades para estimular preguntas y respuestas, elaboración del resumen como una forma de identificar el proceso de comprensión lectora. Finalmente, la elección de textos por parte del profesorado.

De lo anterior se concluye que, de nada sirven los contenidos en cualquier disciplina si no se enseña el uso de estrategias de lectura, como un procedimiento de análisis e interpretación de

textos. Éste es el gran reto al que se enfrentan los profesores de las distintas áreas del currículo para que sus estudiantes adquieran estrategias de lectura, condición indispensable para el aprendizaje en la sociedad del conocimiento.

Por su parte, Monte (2008) realiza un estudio de investigación acción en el que planteó convertir el aula en un espacio donde se genere aprendizaje autónomo a través de la implementación de estrategias de lectura debido a la ausencia a clase de un 40% a 60% del tiempo dedicado a estas. No obstante, este estudio se enfoca en la lectura como una estrategia de aprendizaje de las matemáticas no sólo para estudiantes ausentes, sino además para los estudiantes que se encuentran en clase todos los días pero que necesitan desarrollar la habilidad de comprender textos de matemáticas, la cual será necesaria para su vida profesional en la búsqueda y selección de información. Para el logro de este objetivo, describió algunos elementos para la motivación como explicar la importancia de la lectura, premiar a los estudiantes con calificaciones, leer en clase o acomodar otras tareas de clase para leer y discutir las lecturas asignadas. Después de implementar la estrategia mencionada los estudiantes leen para aprender matemáticas, comunican sus ideas entre pares y al profesor, discuten en clase y reciben retroalimentación. El autor concluye que la lectura es una herramienta efectiva para el aprendizaje de las matemáticas y desarrolla habilidades para la construcción de conocimientos de manera independiente, las cuales, a largo plazo estarán en la capacidad de utilizar como miembros activos de la sociedad del conocimiento.

Igualmente, sobre el aprendizaje autónomo Burbat (2016) dice que en el contexto de la enseñanza-aprendizaje de una asignatura, para el caso particular de la lengua española, el concepto de autonomía suele tener connotaciones claramente positivas. Así se vincula la autonomía normalmente con una metodología innovadora en la que se redefinen los roles

tradicionales de la docencia. Del mismo modo, ser un estudiante autónomo se considera una virtud, y contar con este tipo de estudiantes en clase es sin duda alguna, una situación a la que aspira cualquier docente (p. 37). De aquí se destaca el hecho de que a nivel global el aprendizaje autónomo se referencia con pocas observaciones negativas, por el contrario, es el ambiente deseado para el aula de clase. Pero como lo expone el autor, es probable que no se observe claramente la noción de autonomía en la práctica de clases magistrales donde no se trabaja con el interés y conceptos previos de los estudiantes.

Consecuentemente, Martínez (2014) desarrolla una tesis de Maestría en la cual, parte de la descripción de las principales teorías de enseñanza y aprendizaje a modo de ofrecer homogeneidad en el conocimiento de las mismas por parte de los maestros, y elabora distintas estrategias enfocadas en la promoción de las habilidades de autonomía e interdependencia en los estudiantes, buscando que estos consigan desarrollar las competencias necesarias para que puedan ser “actores” y no simples “espectadores” en el ámbito de acción que están desempeñando; y en un futuro post-universitario continúen adquiriendo y generando conocimiento, gracias a la adquisición de destrezas de autonomía en su aprendizaje.

Lo mencionado hasta aquí, fortalece el pensamiento de realizar actividades de lectura que promuevan la autonomía en los estudiantes, para que se apropien de los conceptos que en matemáticas se constituyen en retos para el desarrollo del pensamiento a nivel superior.

Otro aspecto de extrema relevancia es la relación directa que en los últimos tiempos se le ha dado, al aprendizaje autónomo y el uso de las TIC, a lo que Martínez (2014) añade que las nuevas generaciones son nativas en el uso de la tecnología, de tal forma que dichas habilidades pueden ser potenciadas para favorecer su aprendizaje.

Por otra parte, Barton, Heidema & Jordan (2002) en su artículo realizan una revisión reflexiva acerca del desafío de enseñar a leer matemáticas, cuyo objetivo para enfrentarlo responde a la pregunta: ¿Es ser capaz de leer y comprender la información redactada en lenguaje matemático? Para ello, referencian algunos autores que plantean las razones por las cuales los estudiantes deben aprender a leer textos de matemáticas. Inclusive proponen la implementación de tres elementos interactivos de lectura como el papel del lector, el papel del clima y las características del texto. En el primer elemento se describe la importancia del manejo de los conocimientos previos, las implicaciones de la instrucción del profesor para ofrecer estrategias en la organización de la información y motivar a los estudiantes a aprender y practicar estas estrategias de lectura. En el segundo elemento, plantean que en el clima de aula más que la existencia de un entorno físico es indispensable fomentar la discusión y la colaboración entre los estudiantes. En el último elemento, establecen los tipos de textos presentados en matemáticas y el propósito para el cual son utilizados en su enseñanza.

Por tal razón, con la intercepción de los tres elementos nombrados los estudiantes logran su potencial como matemáticos mediado por la introducción de espacios de interacción en un proceso constructivo del conocimiento, de este modo son los maestros de matemáticas los llamados a enseñar a leer en el aula a través de la implementación de estrategias que conlleven a dicho logro.

Continuando con las ideas sobre la *lectura como estrategia de aprendizaje de las matemáticas* Carter & Dean (citados por Lamb, 2010) presentan un estudio donde exponen los métodos que los maestros utilizan en el aula de matemáticas para implementar exitosamente estrategias de leer con el fin de aprender, basados en procesos y habilidades de lectura. Los autores desarrollaron una investigación de corte cualitativo bajo un estudio de caso de las formas

en que ocho profesores de matemáticas con una amplia experiencia docente trabajaron con estudiantes de 5° a 12° grado.

Los resultados de este estudio mostraron que la mayoría de los maestros tenían conocimiento limitado de estrategias y habilidades en la lectura de textos de matemáticas. Por ejemplo, algunos maestros centraron su intervención en la definición de palabras desconocidas en la lectura, otros usaron la lectura en voz alta, organizadores de las ideas principales del texto. Luego del análisis, los autores clasificaron las lecciones de acuerdo con estas habilidades para la lectura de textos en matemáticas. Para terminar, identifican tres habilidades de lectura específicas siguiendo tres pasos para la comprensión del texto de matemáticas: el primero es la decodificación, que consiste en que los estudiantes tengan la capacidad de traducir palabras escritas y símbolos al hablar; el segundo, el conocimiento del vocabulario, relacionado con la manera en que los estudiantes entienden la terminología matemática y el significado de las palabras en el contexto particular; y por último la comprensión que se fundamenta en que los estudiantes activen su conocimiento previo y realicen conexiones con el conocimiento almacenado en su memoria. Los autores afirman que estas habilidades no están aisladas unas de otras y deben ser utilizadas con fluidez para subsidiar al lector en la construcción del significado del texto, lo cual se logra a través de la implementación de actividades que conlleven a la interacción entre los estudiantes.

Además, Eby & Eby (2016) desarrollan un trabajo cualitativo bajo un estudio de caso, documentado a partir de la investigación de enseñar a los estudiantes a leer en el aula de matemáticas, enfocada en una serie de estrategias y actividades utilizadas por el profesor. Para ello, acude a diferentes fuentes de recolección de datos entre las que se pueden mencionar las entrevistas, observación en el aula y recopilación de documentos, cuya información triangulada



aumentó la confiabilidad del estudio, durante el estudio en cuestión se enfatiza en la comunicación desde la lectura con las teorías constructivistas centradas específicamente en la zona próxima según Vigotsky (1995), el andamiaje y la enseñanza recíproca. Teniendo en cuenta la lectura de textos ilustrados y de diferentes géneros, con el fin de promover el uso de varias estrategias de lectura.

Los resultados de esta investigación subrayan la importancia de implementar estrategias de lectura en el aula de matemáticas, lo cual proporcionan modelos concretos para el diseño y uso de estrategias de lectura (por ejemplo, desarrollo del vocabulario, lectura de textos suplementarios y reflexión) para enseñar conceptos matemáticos, además de cambiar las actitudes de los maestros de matemáticas con respecto a la implementación de la lectura en el aula, cabe agregar que esta, no es una tarea solo del profesor de lenguaje.

De acuerdo a la relación existente entre la lectura y el nivel de logro en matemáticas, Lamb (2010) describe en su investigación basada en un Programa Piloto iniciado en 2005 USDOE (Modelo de Crecimiento del Departamento de Educación) como los estudiantes con dificultades de lectura obtienen bajo desempeño en el área de matemáticas. Para demostrar esta hipótesis analizó la evaluación y los datos disponibles según los ítems de Evaluación de Conocimientos y Habilidades de Texas (TAKS) en el 2006. Su pertinencia fue examinada por varios expertos antes de la prueba de campo. Estos resultados fueron confirmados por algunas organizaciones en diferentes estados entre ellas, la Agencia de Educación de Texas (TEA) en el año 2009 y el Departamento de Educación de Ohio (ODE) en el año 2007 a través, de medidas cuantitativas que comprobaron que existe una conexión entre la lectura y los logros en matemáticas.

Finalmente, Near (2014) establece en su estudio un marco extenso acerca de la importancia de implementar estrategias de lectura en el aula de matemáticas. Esta iniciativa nace ante la preocupación de los maestros, que después de analizar los resultados de las pruebas de Estándares Comunes de Aprendizaje Básico (CCLS) en el Estado de Nueva York, deducen que los estudiantes no alcanzaron el nivel esperado debido a las características de esta prueba, diseñada con lectura y algo de matemáticas. Para ello, se realiza una revisión exhaustiva de la literatura y los resultados de la investigación de esta, con el objetivo de responder a la pregunta: ¿Qué prácticas de instrucción en alfabetización, se aplican en matemáticas para producir resultados de rendimiento positivos en los estudiantes? Esta alfabetización se centra específicamente en la lectura, para lo cual se establecen cuatro categorías entre ellas cabe resaltar: la relación de la lectura con el desempeño en matemáticas y la enseñanza especializada de la lectura en el aula de matemáticas. Así pues, el análisis de estas categorías produce como conclusión que existe una relación directa entre el nivel de lectura y el desempeño en matemáticas, pero no de matemáticas a lectura, es decir, la lectura eficiente se traduce en un desempeño matemático competente. Por tal motivo, los maestros deberán aplicar prácticas efectivas de comprensión de lectura en matemáticas. Por último, el autor propone un conjunto de herramientas disponibles para los docentes que se enfocan en el uso de estrategias y prácticas de lectura en el aula de matemáticas con la intención de aumentar la conciencia de los maestros sobre el uso de estrategias de lectura que favorezcan el desempeño de los estudiantes en esta disciplina, las cuales pueden ser implementadas con los estudiantes en equipos de trabajo privilegiando la oralidad para comunicar sus ideas y compartirlas con sus compañeros.

El conjunto de investigaciones relacionadas anteriormente permite reconocer la importancia que aporta la implementación de la lectura en el aula como una herramienta para la

construcción del andamiaje de contenidos matemáticos a través de los conocimientos previos, el trabajo cooperativo y variadas estrategias de lectura. Asimismo, resulta evidente que la alfabetización en el desarrollo de habilidades de lectura, es esencial para la comprensión de textos matemáticos. Así, las investigaciones aportaron en la selección del caso de estudio, debido a que, facilitaron la identificación de las características indispensables para el aprendizaje de la lectura en el aula de matemáticas como una estrategia para contribuir al aprendizaje autónomo con la implementación del trabajo cooperativo, en el cual se privilegia la consulta individual y la comunicación a través de la discusión para la construcción del producto final, lo cual, paulatinamente potencia el aprender a aprender en el aula o fuera de ella.

En este orden de ideas, es importante reconocer que para fomentar la lectura como estrategia de aprendizaje en el aula de matemáticas es indispensable la *fluidez de la lectura*, en consecuencia, Outón (2011) en su artículo de investigación, plantea las dificultades de comprensión lectora detectadas en estudiantes de educación primaria que podrían ser debido a deficiencias en exactitud y/o automatización lectoras. La primera se refiere a la capacidad para reconocer o decodificar las palabras escritas correctamente y la segunda a reconocer las palabras con las que se encuentre durante la lectura. Para ello, elaboran dos pruebas con el objetivo de averiguar las dificultades de exactitud y velocidad lectoras en castellano y gallego. Cabe señalar que la lectura fluida según Logan (citado por Outón, 2011) se evidencia cuando el lector decodifica el texto sin esfuerzo e igualmente comprende lo que está leyendo, es decir que se combinan los tres elementos mencionados (exactitud, automatización y comprensión lectora).

De los resultados obtenidos se concluye que, existe una influencia directa de la exactitud y velocidad de la lectura en la comprensión de esta. De la misma manera, es importante

reflexionar acerca de la cantidad de tiempo y la enseñanza dedicados a la lectura en el aula y la pertinencia de las estrategias utilizadas para tal fin.

Particularmente, Barreyro & Fumagalli (2014) en su trabajo proponen establecer las habilidades subyacentes a la fluidez, que involucran aspectos relativos a la precisión lectora, la expresividad, la velocidad y la comprensión. Cuyo fin es obtener información para el diseño de una prueba que evalúe la fluidez a partir de textos. Para lograrlo, se evaluaron estudiantes de educación básica primaria sin dificultades para el aprendizaje de la lectura, a través de cinco tareas de manera individual en cinco sesiones en el aula de clase, a partir de las cuales debían leer un texto en voz alta y después de la lectura responder preguntas para obtener la puntuación acerca de la comprensión del texto. Estos estudiantes fueron caracterizados bajo dos procesos: la identificación de palabras o decodificación y la comprensión del texto. Los autores definen que para ser un lector eficiente es fundamental lograr habilidades de decodificación adecuadas y de velocidad de denominación. En este sentido, el estudio mencionado permite evidenciar que existe una relación directa entre los aspectos relativos a la fluidez de la lectura.

Las investigaciones descritas anteriormente son desarrolladas con estudiantes de educación básica primaria. Sin embargo, las deficiencias encontradas en la fluidez de la lectura se ven reflejadas en los estudiantes de educación básica secundaria y aún en la media, debido a que no son subsanadas durante estas etapas de escolaridad y difícilmente serán superadas en adelante. Análogamente, es evidente la influencia de la velocidad de la lectura en la comprensión de textos. Desde luego, estos aportes permiten justificar la caracterización de la fluidez lectora realizada a estudiantes de educación media como insumo para el presente trabajo.

A continuación se aborda la fluidez de la lectura en *el contexto nacional y de aula*, que se plantea desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN) a través de su Programa para la

Transformación de la Calidad Educativa “Todos a Aprender” (PTA), en el documento Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico-OCDE (2016), se menciona el diseño de estrategias implementadas para mejorar el nivel de aprendizaje de los estudiantes en la educación básica primaria en las áreas de lenguaje y matemáticas. Para ello, se han capacitado a docentes tutores que realizan acompañamiento a los docentes en sus prácticas de aula para el fortalecimiento de sus competencias en estas disciplinas. Este acompañamiento es efectuado en las instituciones educativas que presentan menores desempeños en las pruebas saber aplicadas por el Instituto Colombiano para la evaluación de la educación (ICFES) Además, se han dotado dichas instituciones de material físico para tal fin. Sin embargo, estos dos aspectos no articulan las disciplinas nombradas, sino que se promueven prácticas pedagógicas, en las cuales poco se implementa la lectura en el aula de matemáticas de manera consciente por parte del docente. Cabe resaltar que se plantea el aprendizaje en donde se focaliza al estudiante como el centro, prevaleciendo el trabajo cooperativo y de participación activa en el aula.

Dentro del proceso de acompañamiento desarrollado por el PTA, los estudiantes se ven enfrentados a diferentes diagnósticos, con los cuales se pretende que sirvan como insumo para detectar las debilidades en las áreas focalizadas, en este sentido, se realiza un análisis de la fluidez lectora mediante una prueba de caracterización diseñada por el ICFES, la cual permite identificar la velocidad, la calidad y el nivel de comprensión lectora de los estudiantes de grados 3° y 5°, esta prueba sirvió de referente teórico y procedimental para el diseño de una prueba de caracterización similar para estudiantes de educación media (Décimo) en el desarrollo del presente estudio.

La revisión de la literatura permitió referenciar un amplio panorama de investigaciones que muestran la necesidad de focalizar la utilización de un objeto matemático como pretexto

para la elaboración del presente trabajo. Por lo cual, se exponen las investigaciones relacionadas con *el aprendizaje del objeto matemático Teorema del Coseno*, cabe anotar que en el rastreo realizado para este componente la información es escasa, situación que llevó a tomar como referentes conceptos básicos de trigonometría que se relacionan directamente con el objeto matemático de estudio.

En este sentido se expone el trabajo de Fernández (2010) quien presenta una propuesta de Unidad Didáctica con respecto a trigonometría que inicia desde la parte histórica, estructura conceptual, representaciones, fenomenología, dificultades previsibles en el aprendizaje y propuestas de tareas destinadas al diagnóstico y la superación de las dificultades definidas. Con base en lo anterior, se enumeran quince dificultades: (a). Confundir tipos de triángulos o elementos de un triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa), (b). Problemas para detectar las tres alturas en un triángulo cualquiera, (c). Aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas (por ejemplo, confundir la definición de seno con la de coseno), (d). Confundir el lenguaje simbólico usado, (e). Utilización de resultados previos como el Teorema de Pitágoras o Thales, (f). Modelación incorrecta de un problema debido a una deficiente comprensión del enunciado, (g). Representación de ángulos negativos o mayores de  $360^\circ$  en la circunferencia, (h). Utilización de la regla de conversión entre grados y radianes, (i). Extensión de la definición de razones trigonométricas a ángulos no agudos, (j). Problemas con el cálculo “gráfico” de las razones de ángulos no agudos, (k). Interpretación y resolución de una ecuación trigonométrica, (l). Tratamiento algebraico de las razones trigonométricas, relaciones y fórmulas, (m). Trabajar en la calculadora de distintos modos (DEG y RAD), (n). Reconocer qué método es el más apropiado en cada problema con triángulos oblicuángulos y por último (o). Utilizar conocimientos geométricos básicos en la resolución de problemas. Con el objetivo de detectar las

dificultades presentadas por cada estudiante para la construcción del nuevo conocimiento, el autor recomienda aplicar una prueba diagnóstica para identificar el tipo de errores cometidos.

De manera que, Arenas et al. (2016). En una cartilla elaborada como herramienta para que el profesor de educación media pueda implementar en el aula una secuencia de tareas para el aprendizaje del concepto de razones trigonométricas, plantean los siguientes elementos: las competencias a desarrollar, la articulación de los contenidos, un listado de las capacidades que se potencian en los estudiantes y las posibles dificultades en que ellos pueden incurrir. Estas últimas, se definen como los errores causados por conocimientos parciales o erróneos, dichas dificultades son: utilizar las unidades de medida, utilizar los instrumentos para medir ángulos, verificar la veracidad de una razón trigonométrica, aplicar teoremas y propiedades trigonométricas, superar modelos implícitos, modelar situaciones problema, identificar elementos característicos de las figuras geométricas, identificar la correspondencia del lenguaje matemático de calculadoras y realizar transformaciones sintácticas en el sistema de representación simbólico. De cada una de ellas se desprenden diferentes posibles errores que los estudiantes podrían cometer.

Igualmente, Guerrero & Vega (2016) en su trabajo realizan una revisión con la recolección, análisis y categorización de las dificultades que emergen en la resolución de triángulos en trigonometría, además aplicaron una entrevista y encuesta para determinar las actitudes afectivas y emocionales que poseen los estudiantes acerca de las matemáticas y cómo estas influyen en la injerencia de estas dificultades. Para la elaboración de este estudio, los autores referencian a Socas (1997) quien plantea cinco dificultades, de las cuales se focalizan dos: la primera, dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, entre las cuales se encuentran: errores de algebra que se originan desde la aritmética, el uso inapropiado

de fórmulas y propiedades y manejo de las características propias del lenguaje especializado de las matemáticas. La segunda, dificultades originadas en actitudes afectivas y emocionales hacia esta disciplina.

Los estudios nombrados en los párrafos anteriores se usaron como referentes al momento de seleccionar los conocimientos previos que deben poseer los estudiantes para la construcción del nuevo concepto. Estos contribuyeron en la elaboración de las guías de lectura diseñadas y ejecutadas con el objetivo de subsanar las dificultades detectadas a través del test de conocimientos sobre el Teorema del Coseno (pre-test).

El presente estado del arte configura una serie de elementos que brindan a los autores el panorama de antecedentes y conceptualizaciones para el desarrollo del presente trabajo de grado. Por tal razón, a continuación se relacionan los hallazgos más significativos en el rastreo realizado con respecto a la influencia positiva de las habilidades de fluidez y niveles de lectura comprensiva en el aula de matemáticas, debido a la conexión existente entre pensamiento y lenguaje. Adicionalmente se presentan los resultados de la Institución ELMV en las pruebas Saber de matemáticas. Lo anterior con el objetivo de establecer el campo problemático, la pregunta de investigación y las razones por las cuales es pertinente realizar este estudio.



### **Planteamiento del problema**

Durante varios años en las aulas escolares, se ha separado la enseñanza del lenguaje de las diferentes disciplinas del currículo, ocasionando que en la mayoría de ellas, el manejo de éste solo se realice desde la lengua castellana, sin percibir que el lenguaje se relaciona con procesos avanzados de pensamiento en cualquier disciplina.

En concordancia con la idea anterior se sabe que el pensamiento y el lenguaje están conectados de forma inherente, lo que lleva a deducir que no podrían desarrollarse de manera independiente, es decir, constituyen una unidad (Vigotsky, 1995). Por consiguiente, el lenguaje desempeña un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento del sujeto y viceversa. Esta unidad, se evidencia en el significado de la palabra, para lo cual se realizan procesos de pensamiento. Como afirma Vigotsky (1995) “La unión del pensamiento y del lenguaje, en su forma más simple, es el significado de la palabra..... es a la vez un fenómeno verbal e intelectual” (p.168). Por lo tanto, se considera que el significado de una palabra está articulado con el fenómeno intelectual, que se conecta al desarrollo del pensamiento.

El lenguaje es necesario para el aprendizaje de cualquier disciplina, especialmente para las matemáticas. En concordancia, Jorba (2000) afirma que “El lenguaje forma parte del currículo, expresando que está integrado en él, como sistema de comunicación en el aula y en la escuela; como medio de aprendizaje (aprender los conocimientos de las diferentes áreas) y como objeto de aprendizaje” (p.24). Por tal razón, el lenguaje debe integrarse en el currículo de cada una de estas disciplinas.

Por consiguiente, el lenguaje asiste en el desarrollo del pensamiento matemático. Pues, incorpora diferentes conceptos, teorías y procedimientos, los cuales se estructuran y relacionan a través de un lenguaje especializado. Considerando que el pensamiento está ligado a la palabra -

oral y escrita- (Vigotsky, 1995). En consecuencia, el lenguaje es más que un medio para comunicar una disciplina, es parte de ella (Norris & Phillips, 2003). En este sentido, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se debe dar la oportunidad al estudiante para que lea, hable y escriba acerca de los contenidos matemáticos, lo que en ocasiones es difícil de lograr por lo complejo de algunos de sus conceptos.

Una de las habilidades del lenguaje de mayor utilidad para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la lectura, la cual acerca de una u otra forma al estudiante al aprendizaje de esta disciplina. En el aula de clase, se emplea frecuentemente lenguaje especializado y “códigos no verbales” (Abello y Montaña, 2013) ya sea a través del docente o en los libros de texto, lo que hace difícil su comprensión. Según Abello y Montaña (2013), “la principal dificultad no está tanto en la realización "mecánica" de las operaciones sino, sobre todo, en la falta de entrenamiento para comprender o interpretar los textos”(p. 62). Por lo anterior, es necesario dedicar sesiones en el aula a la integración de estrategias para el desarrollo de habilidades de lectura y comprensión de textos matemáticos. Sin embargo, para esto es indispensable disponer de tiempo en las clases programadas para estas estrategias, lo que en muchas instituciones se convierte en un obstáculo, por cuanto no se alcanza a cumplir el plan según lo dispuesto.

Conviene subrayar que, a lo largo de varios años en Colombia los ambientes de aprendizaje en el aula de matemáticas han brindado la oportunidad a los estudiantes de desarrollar las habilidades de lectura, sin embargo, esta situación ha estado informada por la intuición y no desde lo que afirma la literatura acerca de cómo enseñar a leer los recursos semióticos de las matemáticas (MEN, 2012). Del mismo modo, se ha evidenciado que, los docentes quienes desean asumir la enseñanza de las habilidades de lectura comprensiva en la

disciplina mencionada sienten tensión, dado que se encuentran en la dualidad entre desarrollar contenidos o habilidades de lectura comprensiva (Draper, Smith, Hall, & Siebertw, 2005)

Así mismo, aquellos estudiantes que no han logrado desarrollar las competencias, habilidades y destrezas en la comprensión lectora del sistema semiótico de las matemáticas (ej., fluidez, niveles de lectura comprensiva, entre otros), quizás tendrán restricciones en la comprensión de los pensamientos matemáticos que estructuran esta disciplina.

De acuerdo con lo anterior, se deduce que el hecho de no realizar la integración de habilidades de fluidez y niveles de comprensión lectora ocasiona dificultades que obstaculiza el aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos para los estudiantes, más aún cuando existen debilidades en el manejo de conocimientos previos que apalancan la construcción del aprendizaje de estos. Por esta razón, resulta importante brindarle la posibilidad al estudiante de que a través de los contenidos matemáticas comience a desarrollar de manera progresiva estas habilidades de fluidez y lectura comprensiva. Draper, Smith & Hall (2005) Consideran que acercarse a la enseñanza de contenidos a través de la integración de la lectura, reduce este “dualismo” y fomenta prácticas pedagógicas que se centren en el desarrollo de procesos de pensamiento más avanzados.

Adicionalmente, algunos docentes asumen que la lectura debe ser implementada únicamente por el especialista en lengua castellana. Sin percibir que las habilidades de fluidez y niveles de lectura comprensiva serán necesarias no solo en el aprendizaje de los contenidos de las diferentes disciplinas del currículo escolar, sino además para el desarrollo de destrezas indispensables para vivir como miembros activos en la sociedad de la información y el conocimiento. Así pues, los adolescentes que ingresan al mundo adulto en el siglo XXI deberán

poseer habilidades de lectura para desarrollar niveles avanzados de alfabetización, asumiendo los retos que les impone la sociedad actual y futura (Moore, Bean, Birdyshaw, & Rycik, 1999)

Por otro lado, la educación en Colombia según la Ley 115 de 1994, suscita la autonomía escolar y el compromiso de la educación en el desarrollo de las competencias básicas, laborales y ciudadanas, pretendiendo formar un individuo responsable con capacidad de asumir con responsabilidad y autonomía sus derechos y deberes (Colombia, 1994).

En este sentido, se pretende que en la escuela, el estudiante ejecute actividades que lo lleven a ser autónomo. No obstante, en las clases de matemáticas de la Institución Educativa Libardo Madrid Valderrama, se observa que las actividades en un buen número son guiadas de comienzo a fin, lo que no permite el desarrollo de habilidades del aprendizaje autónomo, siendo estas una necesidad, que el estudiante debe solventar, debido a que los aprendizajes matemáticos implican aprendizajes particulares que solo el estudiante puede construir.

Por lo anterior, en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, es fundamental que se promuevan actividades para el desarrollo de las habilidades y capacidades lingüísticas, esenciales para que los estudiantes aprendan de forma autónoma, por cuanto ellos deben asimilar conceptos matemáticos diversos, seleccionar las operaciones necesarias, interpretar enunciados en los que se combinan números, símbolos, signos y palabras. Poseer una eficiente competencia lingüística y lectora es importante para poder interpretar enunciados de problemas matemáticos, expresar adecuadamente lo que se ha comprendido y el proceso seguido para resolverlo y la respuesta elaborada. Esta descripción corresponde a una característica propia del aprendizaje autónomo, donde el estudiante aprende a aprender, como lo indica Manrique (citado por Massié, 2010).

Para ser consecuente en el uso de habilidades de lectura para el aprendizaje autónomo en el aula de matemáticas es necesario referenciar un objeto matemático, el cual se introduce basado en lo que la literatura muestra con respecto a las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo del pensamiento Geométrico-Métrico, específicamente en el contenido del Teorema del Coseno. Así pues, dicho concepto está configurado por símbolos, fórmulas, operaciones y representaciones, que lo convierte en un contenido difícil de hacerle lectura comprensiva en la educación media (Fernández, 2010).

Finalmente, para promover estas habilidades se requiere integrar en el aula la interacción entre los estudiantes y el profesor con el fin de privilegiar la oralidad, la lectura individual y el consenso de pequeños grupos para definir conclusiones asertivas después de propiciar espacios de discusión, donde sea el estudiante, quien construya su propio conocimiento como centro del aprendizaje.

A partir de los anteriores presupuestos se formula el siguiente interrogante general, el cual direccionará el desarrollo de este estudio:

*¿Cómo fortalecer habilidades de fluidez y comprensión lectora que medien el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno?*

### **Justificación**

*“La necesidad de fortalecer habilidades de fluidez y comprensión lectora que medien el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno”, (planteado por las autoras).*

Generalmente, en las aulas de matemáticas en educación media, las estrategias de enseñanza son diseñadas con el docente como centro, quien hace uso de la oralidad para representar conceptos matemáticos. En estos ambientes de aprendizaje los estudiantes

ocasionalmente hacen uso de manera consciente de la principal herramienta de pensamiento y aprendizaje, el lenguaje. De hecho, la lectura es utilizada por ellos para interpretar enunciados de problemas matemáticos sin hacer uso de manera explícita de las habilidades y estrategias de escritura y de comprensión lectora.

Por consiguiente, el no asumir el lenguaje desde la oralidad, la escritura y la lectura; como un elemento constitutivo del currículo de las matemáticas genera barreras para el desarrollo de procesos de aprendizaje. Sin tomar conciencia de la importancia del lenguaje como herramienta de aprendizaje para el desarrollo de procesos de pensamiento matemático. Por tal razón, estos elementos deben ser integrados en el aula de esta disciplina. De allí que, para este estudio se integra de manera consciente la fluidez y la comprensión lectora con un conjunto de estrategias para su desarrollo. Aunque cabe recalcar que estos tres elementos se entretujan para dar sentido al aprendizaje, es decir, de alguna forma se relacionan de manera implícita.

Por otro lado, es indispensable relacionar estas habilidades desde las competencias establecidas por el (MEN, 2006), las cuales se encuentran enmarcadas desde la comunicación y representación para dar sentido al aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Por esta razón, es necesario utilizar un objeto matemático que medie en el aprendizaje de las matemáticas, para este estudio es el Teorema del Coseno, cuyo aprendizaje se construye desde la educación básica primaria con varios conceptos que lo fundamentan. Estos conceptos se encuentran referenciados desde el componente Geométrico-métrico.

En este orden de ideas, se mencionan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado noveno de la IELMV en el área de matemáticas en las pruebas Saber desde la competencia

y el componente mencionado, basados en diferentes documentos que analizan y determinan los niveles de desempeño de los estudiantes en estos dos aspectos.

La competencia comunicar y representar, que desde la perspectiva de esta investigación se relaciona con el manejo del lenguaje, en particular desde la lectura. La cual se refiere a la capacidad de identificar la coherencia de una idea respecto a los conceptos matemáticos expuestos en una situación o contexto determinado; usar diferentes tipos de representación; y describir relaciones matemáticas a partir de una tabla, una gráfica, una expresión simbólica o una situación descrita en lenguaje natural. Además, se evalúa la habilidad para manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y formulas, es decir, el uso y la interpretación del lenguaje matemático (ICFES, 2013).

A continuación, se observan los resultados arrojados por las Pruebas Saber según la competencia mencionada (Figura 1).

**Figura 1.** Competencias evaluadas en matemáticas – grado noveno 2016



Recuperado

de: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>

De acuerdo con la gráfica anterior los estudiantes de la Institución presentan debilidad en la competencia comunicar y representar, debido a que no comprenden e interpretan

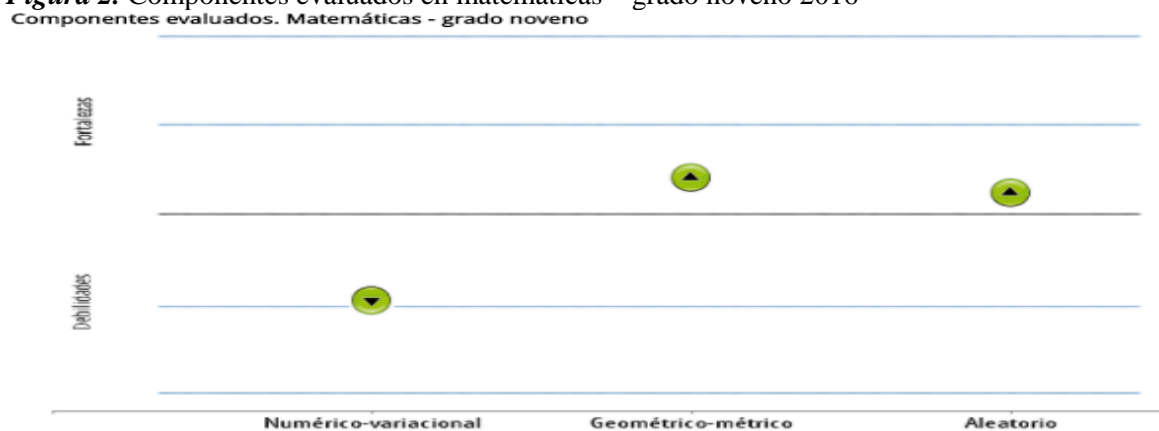
matemáticamente los enunciados. Por tal motivo no están en capacidad de resolver las preguntas propuestas en la prueba para esta competencia.

Por otro lado, se hace referencia al componente Geométrico-métrico que “se relaciona con la construcción y manipulación de representaciones de los objetos en el espacio, las relaciones entre estos y sus transformaciones; más específicamente, con la comprensión del espacio, el desarrollo del pensamiento visual, el análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación de patrones y regularidades, el razonamiento geométrico y la solución de problemas de medición, la construcción de conceptos de cada magnitud (longitud, área, volumen, capacidad, masa, etc.), comprensión de los procesos de estimación de magnitudes, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y el uso de unidades” (ICFES, 2013).

Las descripciones anteriores se relacionan con el objeto matemático Teorema del Coseno, el cual toma como base el espacio plano limitado por tres segmentos con sus medidas de longitud para los lados y medidas en grados o radianes para los ángulos, además de su uso en la representación y resolución de triángulos oblicuángulos con la utilización del lenguaje especializado de la disciplina. A continuación, se presenta la Figura 2 según el componente nombrado.



**Figura 2.** Componentes evaluados en matemáticas – grado noveno 2016



Fuente: Recuperado

de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp>

La gráfica anterior nos indica que los estudiantes de la institución presentan un nivel más alto en el componente Geométrico-métrico, es decir, que se encuentra por encima de los componentes Numérico-variacional y Aleatorio. Sin embargo, esto no significa que los estudiantes se relacionan e interactúan con el mundo exterior a través de la manipulación, construcción y análisis de objetos en dos o tres dimensiones, siendo capaces de aplicar estos conocimientos en las preguntas correspondientes, es decir, aún se debe fortalecer dicho componente.

De hecho puede aducirse a lo anterior que, los estudiantes no poseen un dominio de los conocimientos previos para el aprendizaje del Teorema del Coseno, por lo tanto, no están en condiciones de adquirir un nuevo aprendizaje. Según Barton, Heidema & Jordan (2002) es indispensable retomar los conocimientos previos para la construcción del nuevo concepto a través de la lectura. Lo cual, garantiza el aprendizaje continuo para el desarrollo del pensamiento relacionado con el lenguaje (Vigotsky, 1995).

De acuerdo con los aspectos descritos y los resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas externas se concluye que no se implementan de forma consciente estrategias de lectura en el aula de matemáticas, además existe una barrera en el aprendizaje de conceptos matemáticos que apalancan la construcción de conceptos más avanzados en los grados superiores.

Así mismo, debido a la falta de implementación de estrategias de lectura de forma consciente se presentará dificultad para el dominio del lenguaje abstracto, a partir del cual se desarrollan habilidades de comunicación entre ellas la lectura de textos matemáticos. Estos tienen unas características específicas, es decir, contienen un conjunto de conceptos más amplio por palabra, por oración o por párrafo que los textos de otras disciplinas (Barton, Heidema, & Jordan, 2002). Así pues, estas habilidades se reflejan en los resultados obtenidos debido a que al no tener la capacidad para comprender textos en lenguaje natural difícilmente podrán hacerlo en el lenguaje especializado de las matemáticas Lager (citado por Lamb, 2010).

Del mismo modo, el Centro de Educación Achievement (NCEA) (Citado por Near, 2014) plantea que las escuelas posicionadas en altos niveles de desempeño, enseñan las matemáticas con la integración de estrategias de lectura. Además, existen pruebas que establecen la conexión entre los niveles de lectura y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas (por ejemplo, Jerman & Mirman, 1974; Thompson, 1967; Walker et al., 2008).

Por consiguiente, resulta pertinente introducir al aula de matemáticas de manera explícita estrategias para desarrollar habilidades de fluidez y niveles de comprensión lectora, a través de los conocimientos previos, con las cuales se contribuye al aprendizaje autónomo, así pues, el estudiante estará en condiciones de aprender a aprender, ¿cómo? a través de estas habilidades de lectura, que son un aspecto clave para alcanzar este tipo de aprendizaje. Por consiguiente, se podría decir que el estudiante aprende a aprender con el desarrollo de habilidades lectoras. Es así

como el estudiante, además de obtener mejores resultados en las pruebas externas implementadas por el MEN, también será un ciudadano autónomo preparado para asumir los retos que exige la sociedad actual y futura.

## **Objetivos**

### **Objetivo general**

Potenciar el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno a través del desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora.

### **Objetivos específicos**

Caracterizar la velocidad de lectura, la comprensión lectora y los conocimientos relacionados con el Teorema del Coseno en los estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Libardo Madrid Valderrama (IELMV).

Aplicar un conjunto de actividades de aprendizaje, diseñadas para la creación de condiciones necesarias que faciliten el desarrollo de habilidades de fluidez, comprensión lectora y la apropiación del objeto matemático: Teorema del Coseno.

Implementar una estrategia de enseñanza para el fortalecimiento de habilidades de fluidez y comprensión lectora que potencien el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno mediada por el uso de las TIC.

### **Marco de referentes conceptuales**

De acuerdo con la pregunta que orientó el presente trabajo de investigación, se presentan a continuación algunos referentes legales y conceptuales que permitieron el desarrollo teórico y metodológico del estudio.

#### **Importancia de la comprensión lectora en el aprendizaje**

La escuela es la encargada de propiciar ambientes donde se dé lugar al desarrollo de niveles superiores de pensamiento, para ello, debe apoyarse en el lenguaje como medio fundamental. Así pues, Vigotsky (1995) plantea la existencia de diversos planos del lenguaje uno interno (semántico) y otro externo (vocal, fonético) que, aunque coexisten unidos avanzan de forma independiente, de tal forma que la estructura del lenguaje no refleja la del pensamiento. Dicha situación hace que la comunicación por medio del lenguaje esté en función de la diferenciación de significados, entendida esta como la actividad de la mente, lo que puede traducirse como el pensamiento. (Vigotsky, 1995).

Es así como, en los diferentes procesos de enseñanza aprendizaje, deben integrarse habilidades que permitan el desarrollo del lenguaje en las diferentes disciplinas del currículo escolar, como es el caso de las matemáticas. Cabe recalcar que no solo desde el lenguaje derivado sino además el lenguaje fundamental, debido a que este último es clave tanto del contenido propio de una disciplina como de las interacciones al interior de ella. (Norris & Phillips, 2003).

Con respecto a la importancia del lenguaje fundamental, es evidente que el objetivo de la comunicación escolar es la creación de significados, es decir, conocimientos específicos de acuerdo con una disciplina (Jorba, 2000). Por ello, el lenguaje debe ser un elemento constitutivo del currículo, teniendo en cuenta, que existen habilidades del lenguaje necesarias para que los

estudiantes construyan conocimiento en las áreas del saber. Estas habilidades de leer, hablar, escribir, escuchar, así como comprender los mensajes que se transmiten con cada una de ellas, son abordadas en la escuela mediante la implementación de diversas estrategias. No obstante, el uso efectivo de actividades de escucha, habla, lectura y escritura que se desarrollan usualmente, se hacen de forma intuitiva y mecánica. Hodson (citado por Candela & Espinosa, 2016). Por lo anterior, es difícil adquirir en el contexto escolar niveles superiores de pensamiento sin el manejo de habilidades que propicien el desarrollo del lenguaje.

Los planteamientos anteriores, ponen de manifiesto que la lectura fluida y comprensiva es una herramienta básica para el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje en la escuela, además, es una herramienta para continuar aprendiendo en la vida. (Delors, Amagi, Carneiro, Chung, & Geremek, Gorham, 1996); por esta razón, enseñar a leer comprensivamente se considera una necesidad, que permite al estudiante acercarse al conocimiento a través de la realización de actividades centradas en él, reconociendo la relevancia del papel del estudiante en el proceso educativo, el cual debe desarrollar actitudes y aptitudes, es decir, que le faciliten aprender de forma autónoma, como protagonista de su propio aprendizaje.

### **El lenguaje en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**

En palabras de Halliday (1997) el lenguaje surge en la vida de un individuo mediante un intercambio continuo de significados con otros significantes, este es el producto de un proceso de construcción social; no consiste pues en simples oraciones, consiste en el intercambio de significados en contextos interpersonales de uno u otro tipo. Estos contextos en los cuales se intercambia significado no se eximen de un valor social; pues un contexto verbal es en sí una construcción semiótica con una forma derivada de una cultura que capacita a los participantes

para predecir características del registro de un registro prevaleciente y, por lo tanto, para comprenderse los unos a los otros (p.9-10).

Desde la perspectiva del mismo autor, es posible concebir el lenguaje en las matemáticas como el discurso que usan tanto el docente como el estudiante, el cual está determinado por las formas de aprehensión y constitución de los objetos matemáticos, que por su naturaleza abstracta requieren sistemas semióticos para su constitución, manipulación, expresión y aprehensión (García, et al., 2013).

Lo anterior, sustenta que en el aula de matemáticas se configure una oportunidad para la comunicación, la cual tiene en cuenta las relaciones matemáticas expresadas en el lenguaje natural, para la exploración de sus propiedades y formulación se requiere el uso de un lenguaje más formal, lo que obliga a que se deban usar, según lo expresado por García, et al. (2013) entre muchos otros que podrían ser usados. En este orden de ideas, es indispensable más de un sistema semiótico para elaborar un conocimiento matemático, que pueda usarse como herramienta de aprehensión y transformación en el escenario pedagógico del aula.

De esta forma, el aula de matemáticas se convierte en un escenario donde los estudiantes construyen conocimiento a partir de saberes previos y no con aquellos que el profesor presenta en el desarrollo de sus clases, como lo expresa Solórzano (2017) “los papeles del estudiante y el profesor se difuminan o bien se intercambian continuamente” (p. 246) el docente posibilita un ambiente propicio que le permite al educando aprender de forma autónoma.

Para continuar en este seguimiento, es indispensable acceder desde el lenguaje a través de sus componentes, que se entrecruzan para el desarrollo del pensamiento, estos componentes se establecen como oralidad, escritura y lectura. De los cuales se enfatiza en la lectura como parte

fundamental de este estudio. Por tal razón, esta es integrada como herramienta de aprendizaje en el aula de matemáticas.

### **La lectura como herramienta de aprendizaje autónomo en el aula de matemáticas**

Pensar en la lectura como herramienta de aprendizaje en el aula de matemáticas implica pensar en estrategias que permitan decodificar, comprender y aplicar algoritmos, este tipo de lectura implica ciertos cambios en la metodología.

Lo anterior se soporta debido a que los textos de matemáticas son de carácter discontinuo, es decir, combinan información textual con gráficos, figuras e imágenes en menor proporción; constituyen textos organizados de un modo distinto al de los textos continuos, por tanto, la comprensión de estos requiere del uso de estrategias de lectura no lineal. (Santos, 2013).

Según Santos (2013) la lectura de las matemáticas requiere además de comprender las palabras del lenguaje natural, entender el sentido, el significado de los símbolos y las fórmulas, así pues, se puede conceptualizar la comprensión lectora en esta disciplina como una actividad social que requiere de un proceso psicológico superior, puesto que, genera la construcción de significados que permite dar sentido global al conocimiento escrito de un texto matemático. Para ello, deben incluirse estrategias de lectura específicas que permitan autorregular los aprendizajes.

La lectura de un texto matemático no es lo mismo que leer una novela, un cuento o una historieta, puesto que el lenguaje matemático requiere como ya se ha dicho antes de tablas, diagramas, expresiones simbólicas y gráficas muchas veces de forma paralela (Freitag, 1997, p. 17). En esta lectura particular, el lector estudiante requiere hacer transformaciones simbólicas, mediante un conjunto de símbolos del lenguaje verbal para configurar una representación escrita

(esquema o gráfica) que exprese esa idea verbal, de ese modo mostrar las concepciones y experiencias que se tienen en relación con un concepto (D'Amore, 2006).

Por consiguiente, el lector requiere del manejo de conocimientos previos como afirman Barton, Heidema & Jordan (2002) el aprendizaje de textos es inadecuado, si los conocimientos previos no están organizados o son inaccesibles en la memoria a largo plazo. Como se discute en el Manual del Maestro de TRCA, el alcance de nuevos conocimientos y habilidades está ligado a la experiencia.

Adicionalmente, este lector además de condicionar sus ideas previas para relacionarlas con el texto debe hacer interpretaciones con ellas y adoptar una postura crítica. Antes de la lectura propiamente dicha es importante compartir con el alumnado su propósito, el producto final esperado y el proceso para llegar a él a través de un cuestionario de preguntas que orienten la construcción del conocimiento. Lo anterior es viable, inicialmente con el trabajo autónomo y luego en el marco de pequeños grupos cooperativos, de modo que sus miembros compartan y discutan para finalmente diseñar un producto final, el cual puede ser textos escritos, una carta a un periódico o una presentación en Power Point para dar a conocer sus diferentes concepciones con respecto al tema a sus compañeros de clase (Oliveras & Sanmartí, 2009), siendo indispensable incluir la solución de problemas en este producto final para el desarrollo de competencias matemáticas.

Acorde con lo antes mencionado, la competencia matemática debe incluir la solución de problemas, para lo cual utiliza varias metodologías, entre ellas, una acción inicial es el manejo de conocimientos previos y niveles de lectura para comprender la situación presentada MEN (2006), esto se logra mediante el uso de la lectura que abarca los niveles de comprensión inferencial y crítico, siendo estos los que garantizan encontrar la solución, así la comprensión



lectora entra en acción en las sesiones de construcción de conceptos matemáticos, desde una perspectiva constructivista y bajo un enfoque por competencias.

De este modo se evidencia que la lectura se convierte en un elemento para acceder al conocimiento, especialmente para el aprendizaje autónomo, que se involucra como una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas.

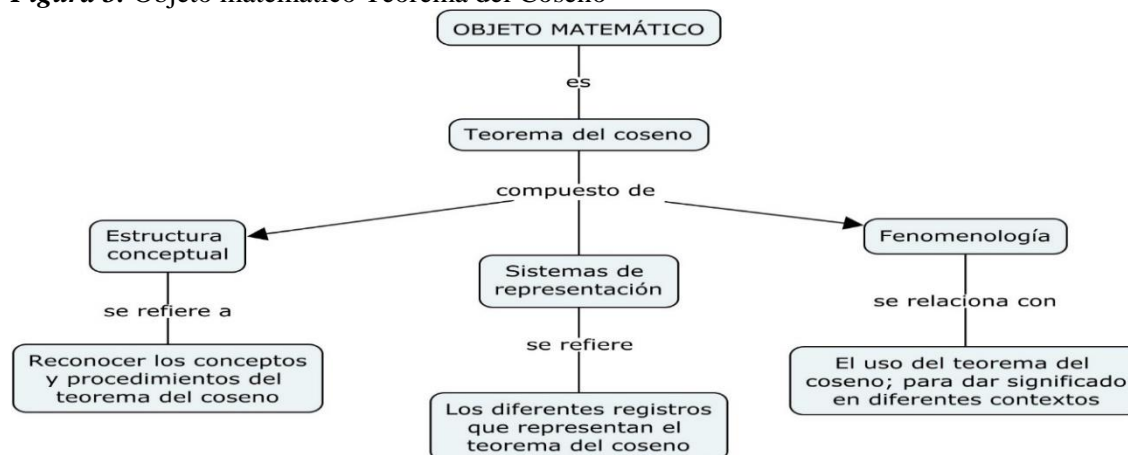
### Enseñanza y aprendizaje del objeto matemático: Teorema del Coseno

El propósito de este componente es relacionarse con el objeto matemático: Teorema del Coseno, identificar las dificultades que presentan los estudiantes en su aprendizaje y cómo se construye este aprendizaje a lo largo de la escolaridad en sus diferentes etapas para integrarlo con la comprensión de la lectura en el aula de matemáticas.

#### Triángulo semántico.

Para relacionarse con el objeto matemático es indispensable analizarlo desde sus tres dimensiones: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología, tal como se presentan en la Figura 3.

**Figura 3.** Objeto matemático Teorema del Coseno

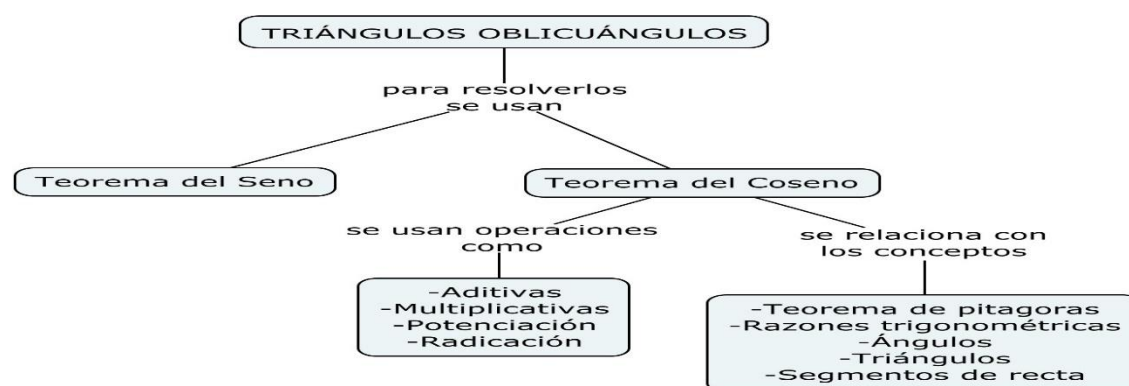


Fuente: Adaptado de García B., Coronado A., Giraldo A. (2005)

### ***Estructura conceptual.***

Se aborda con el fin de reconocer los conceptos y procedimientos que se relacionan con este objeto matemático para dar sentido a su significado en las matemáticas de acuerdo con los conceptos que posibilitan su construcción como se muestra en la Figura 4.

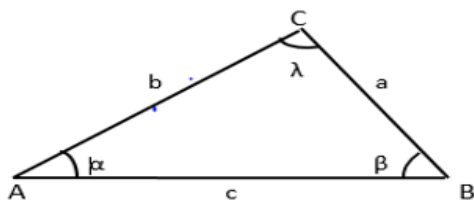
**Figura 4.** Estructura conceptual del Teorema del Coseno



*Fuente: Adaptado de García, Quiroga, Coronado y Giraldo (2015)*

El Teorema del Coseno es una generalización del Teorema de Pitágoras en los triángulos no rectángulos que se utiliza en trigonometría, estos triángulos son denominados oblicuángulos. Dicho teorema relaciona a un lado del triángulo con los otros dos y con el coseno del ángulo formado entre ellos, definiéndose de la siguiente forma:

Dado un triángulo ABC, siendo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , los ángulos, y a, b, c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos, lo cuales se presentan como sigue.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

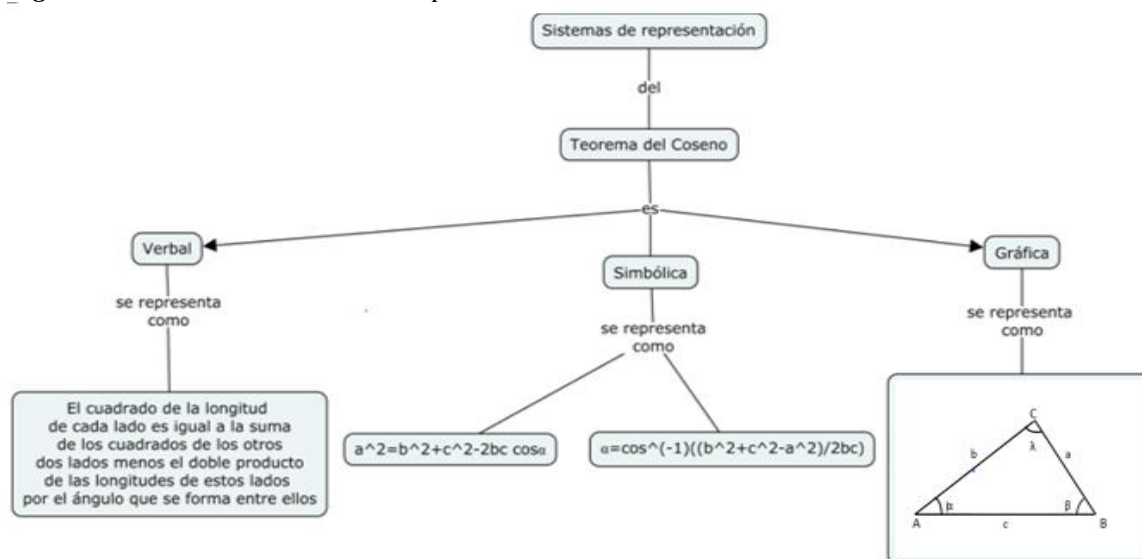
$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$$

### ***Sistema semiótico de representación.***

Se define el sistema semiótico de representaciones matemáticas de este objeto de estudio para el desarrollo del pensamiento, dando prioridad más a dichas representaciones que al propio concepto como expone Duval (2004) “los tipos de representaciones semióticas utilizadas en matemáticas, nos referimos siempre los objetos matemáticos y no a los conceptos”; el mismo autor dice. “la noción de objeto es, quizás, más importante que la de concepto para comprender la actividad matemática “No se trabaja sobre conceptos; se trabaja sobre los objetos (números, funciones...) que tienen propiedades”. En otros términos lo importante es la dupla (signo, objeto) o (representación semiótica, objeto)” (p. 9-15).

Los diferentes registros de representación matemática (Figura 5) evidencian las formas de pensar y comprender esta disciplina. Estos registros son indispensables para el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje, con ellos se accede al conocimiento desde varias perspectivas, sin ser aisladas o excluyentes entre sí, son usados de acuerdo con la situación planteada para el logro de las competencias matemáticas. A continuación, se señalan los registros de representación: verbal, simbólica y gráfica para definir el objeto matemático.

**Figura 5.** Sistemas semióticos de representación



Fuente: Adaptado de García B., Coronado A., Giraldo A. (2005)

### **Fenomenología.**

Para continuar con el seguimiento realizado al objeto matemático, el cual asiste este trabajo, es importante plantear su fenomenología (Figura 6), que se refiere al desarrollo histórico y la utilización de este objeto en diferentes disciplinas tales como: la aeronáutica, navegación, astronomía y situaciones que implican el cálculo de área de figuras resolubles por triangulación aplicables en las ingenierías, además de medidas indirectas o medidas de distancias inaccesibles, que pueden aparecer en arquitectura, ingenierías, cartografía.

El desarrollo histórico del Teorema del Coseno, se construye desde la aparición de los triángulos y con estos la trigonometría; la cual se hace indispensable para la solución de estos, a través de la historia en diferentes civilizaciones. Inicialmente en Egipto con la edificación de las pirámides, en Babilonia con la tablilla Plimpton 322 para dar aproximaciones a la secante. Luego durante la segunda mitad del siglo II a.C. fue compuesta la primera tabla trigonométrica por Hiparco de Nicea, dicha tabla mostraba la razón entre el arco y su cuerda en una circunferencia

para una serie completa de ángulos. A mediados del siglo XVII, Isaac Newton representa las funciones matemáticas usando series infinitas de potencias de la variable  $X$ ; así encontró las series para  $\text{sen}(x)$ ,  $\text{cos}(x)$  y  $\text{tan}(x)$ . Desde este recorrido histórico se construye el Teorema del Coseno para acceder a la solución de triángulos en el avance de la humanidad (Fernández, 2010).

En este orden de ideas, para continuar con la fenomenología, es importante hacer referencia a las observaciones y análisis que se han realizado en varios años de experiencia en clase con los estudiantes, donde se puede concluir que para algunos de ellos se hace difícil relacionar el objeto matemático con la realidad a través de la cotidianidad y las diferentes disciplinas o ciencias. Por lo tanto, es fundamental incluir la utilidad que presenta este para la formación de ellos como futuros profesionales e integrantes activos de la sociedad. Es común escuchar a los estudiantes decir que eligen profesiones que no tengan relación con la disciplina en mención; por tal motivo es importante mostrar cómo las matemáticas son aplicables en diferentes contextos. A continuación se alude a algunas de estas aplicaciones.

**Figura 6.** Fenomenología del Teorema del Coseno



Fuente: Adaptado de García., Coronado y Giraldo, (2005).

Para concluir este seguimiento del objeto matemático se reconoce que la clase de matemáticas es el espacio propicio para dar significado a dicho objeto y a partir de este, conducir

al estudiante al desarrollo de habilidades de lenguaje, en este caso particular habilidades de fluidez y comprensión lectora, a las cuales hace referencia este trabajo. Cuya estrategia aborda la aplicación del Teorema del Coseno en la cotidianidad. Como afirma Bishop (citado por García, et al., 2013) “la clase de matemáticas como escenario privilegiado para compartir y desarrollar el significado matemático sobre la base de la comunicación y la negociación cultural entre los sujetos” (p. 34). Teniendo en cuenta que se prioriza la relación del estudiante con su contexto en un aprendizaje situado para darle sentido al conocimiento de las matemáticas.

En este orden de ideas, la fenomenología en relación con otros objetos matemáticos menciona los conocimientos previos indispensables para la construcción conceptual del objeto matemático que asiste este trabajo, los cuales podrían ser una barrera para el aprendizaje. De ahí, que se referencien las posibles dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de este concepto.

### **Dificultades en el aprendizaje del Teorema del Coseno.**

Para este estudio es indispensable considerar las posibles dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto: Teorema del Coseno, con el fin de subsanarlas a partir de la comprensión lectora. Socas (1997) agrupa las dificultades en cinco categorías, las dos primeras se refieren a la disciplina específica "objetos matemáticos y procesos de pensamiento, la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los estudiantes y una quinta, relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas” (p. 126). Estas dificultades se abordan desde las dos primeras categorías (Tabla 1).

**Tabla 1***Dificultades en el aprendizaje del Teorema del Coseno*

1. Dificultad para utilizar las unidades de medida: medidas de ángulos y de longitud
Error 1.1. Asignar erróneamente una unidad de medida que no corresponde a la magnitud sobre la que se pregunta.
2. Dificultad en la utilización de instrumentos para medir ángulos
Error 2.1 Asignar una medida equivocada a un ángulo por la forma como se ubica el transportador.
3. Dificultad para manejar el lenguaje funcional de la trigonometría
Error 3.1 Omitir la inscripción de símbolos que son relevantes en expresiones trigonométricas
4. Dificultad para aplicar operaciones funcionales de la trigonometría
Error 4.1 Interpretar y aplicar la razón inversa del coseno
Error 4.2 Interpretar y aplicar razón trigonométrica del coseno
5. Dificultad para aplicar jerarquización en las operaciones matemáticas y sus propiedades
Error 5.1 Interpretar y usar operaciones de forma inadecuada.
6. Dificultad para modelar situaciones problema
Error 6.1. Representar gráficamente (mediante triángulos) de forma equivocada una situación problema que involucra el Teorema del coseno.
Error 6.2. Representar inadecuadamente con expresiones simbólicas una situación
Error 6.3. Confundir el vocabulario utilizado (ángulos, lados) con los elementos de la representación gráfica-pictórica-geométrica que se utilizan
Error 6.4. Colocar equivocadamente los datos conocidos en la representación gráfica del problema
Error 6.5. Asignar incorrectamente los ángulos en la representación gráfica de un problema trigonométrico.
Error 6.6. Confundir las longitudes dadas en un problema dentro de su representación gráfica
7. Dificultad para identificar elementos característicos de las figuras geométricas
Error 7.1. Desconocer triángulos oblicuángulos
Error 7.2. Representar en lo bidimensional figuras de tercera dimensión sin conservar las perspectivas propiedades.
Error 7.3. Trazar incorrectamente la relación entre los ángulos y los lados
Error 7.4. Desconocer que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180^\circ$

*Fuente: adaptado de Gómez, P. & Torres, F. (2016)*

### **Pensamientos matemáticos.**

En la construcción conceptual de este objeto matemático, se definen los dos pensamientos involucrados. El primero, pensamiento métrico que “hace referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones dentro de su contexto”. (MEN, 2006, p.63).

El segundo, el pensamiento espacial, el cual “es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales”.(MEN, 2006, p.61).

Resulta evidente que los pensamientos mencionados son afines con el trabajo puesto que dentro la construcción social del objeto matemático implica promover la aplicación de este en diferentes contextos.

El MEN (2006) afirma que:

La relación con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo, en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.). (p.61)

Lo anterior, se demuestra en la utilización del objeto en mención a través del trabajo cooperativo realizado por los estudiantes, donde se selecciona información acerca de situaciones de la realidad en las cuales tiene aplicación el Teorema del Coseno.

Los pensamientos descritos anteriormente se entrecruzan con los sistemas matemáticos, los cuales se definen a continuación.



### **Sistemas matemáticos.**

En este orden de ideas, los pensamientos planteados anteriormente abarcan el uso de sistemas matemáticos entre ellos los geométricos y de medida. El primero, se relaciona con el contexto de la situación propuesta o formulada por el estudiante y la construcción de la representación del triángulo realizada por este y el segundo, conformado por las diferentes unidades de medida, de acuerdo a las condiciones establecidas. De ahí que, estos pensamientos se relacionan de tal forma que no sería posible separar uno del otro para dar sentido al objeto matemático. Estos sistemas se encuentran definidos por el MEN (2006) así:

...Los sistemas geométricos tienen tres aspectos: los elementos de que constan, las operaciones y transformaciones con las que se combinan, y las relaciones o nexos entre ellos. Estos sistemas se expresan por dibujos, gestos, letras y palabras que se utilizan como registro de representación diferentes que se articulan en sistemas notacionales o sistemas simbólicos para expresar y comunicar los sistemas geométricos y posibilitar su tratamiento, para razonar sobre ellos y con ellos y, a su vez, para producir nuevos refinamientos en los sistemas geométricos. (p.62).

Sistemas de medida, es importante el reconocimiento del conjunto de unidades de medida que se utilizan para cada una de las diferentes magnitudes (la velocidad, la densidad, la temperatura, etc., y no sólo de las magnitudes más relacionadas con la geometría: la longitud, el área, el volumen y la amplitud angular). (p.62).

Del mismo modo, es importante hacer referencia a las competencias matemáticas, el desarrollo de estas es promovido por el docente de matemáticas, al aproximarse al contexto a través de esta disciplina, al relacionarse y apropiarse a ella. Adicionalmente, los docentes “favorecen la capacidad de formular, resolver y modelar fenómenos de la realidad; comunicar, razonar, comparar y ejercitar procedimientos para fortalecer la adquisición de conocimientos, habilidades, actitudes y comprensiones del pensamiento matemático, relacionándolos entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido”. (MEN, 2006, p.50).

Seguidamente, para el presente estudio se desarrolla la competencia matemática comunicación, donde el estudiante desarrolla habilidades tales como:

Realizar explicaciones sencillas; expresar resultados y argumentar su proceso de solución; reconocer cantidades, figuras, magnitudes, etc.; establecer diferentes tipos de relaciones entre objetos matemáticos, sus propiedades, valores, operaciones, etc.; describir situaciones escolares y extraescolares en las que se usen expresiones matemáticas; interpretar diferentes tipos de gráficas; enunciar, demostrar y explicar; interpretar y ejemplificar; diferenciar y argumentar; diseñar, formular y aplicar, entre otros procesos matemáticos. (MEN, 2006). En síntesis, la comunicación debe evidenciar que los estudiantes, de manera interpersonal e interactiva, se encuentran en capacidad de formular preguntas, responder y argumentar sobre estas en matemáticas y con las matemáticas para compartir sus conclusiones desde los procesos de aprendizaje que se generan en el aula.

De lo anterior se deduce que estos aspectos se reflejan en el objeto matemático (Teorema del Coseno), de un lado por la figura plana limitada por tres lados con características definidas que es el triángulo oblicuángulo, por su lenguaje simbólico y la fórmula que lo define. De otro lado, por las unidades de medida de los lados del triángulo, además de la amplitud de sus ángulos y la habilidad de comunicación para expresar y representar el lenguaje simbólico de las matemáticas a través del objeto en mención.

Cabe agregar que, el Teorema del Coseno es construido desde la educación básica con algunos conocimientos previos desde los pensamientos y sistemas descritos, los cuales para este estudio se relacionan con la lectura. Por lo anterior, se nombran los estándares básicos de competencia en las disciplinas de matemáticas y lenguaje como aporte para el desarrollo de este trabajo de investigación.

### **Estándares básicos de competencia en matemáticas y lenguaje para la construcción del concepto: Teorema del Coseno.**

El diseño del currículo se basa en los estándares por grados. Para este trabajo se referencian los estándares básicos de competencia desde la integración de las matemáticas y el lenguaje. Los cuales son esenciales en la construcción del objeto Teorema del Coseno y la comprensión e interpretación de textos.

En los primeros grados de escolaridad en matemáticas, la clasificación de polígonos y la medida de los ángulos y los lados, integrados con el lenguaje en la comprensión de textos que tienen diferentes formatos y finalidades y la producción textual enmarcada en la oralidad para la exposición de diferentes ideas por parte de los estudiantes. Posteriormente se reúnen los estándares básicos en la construcción del Teorema del Coseno (Anexo 1) que facilitan el andamiaje de los conocimientos previos para llegar finalmente al objeto que asiste este trabajo.

Para el aprendizaje autónomo de este objeto matemático, es necesario abordar los elementos que faciliten la autonomía en los estudiantes, mediante la implementación de estrategias que estén fundamentadas en condiciones pedagógicas y didácticas para aprender a aprender, en este caso se tienen en consideración las características y elementos del aprendizaje autónomo, actividades para el desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora y el uso educativo de las TIC.

### **El aprendizaje autónomo y el aprendizaje de las matemáticas**

Hasta este momento se han presentado referentes teóricos como el lenguaje y la lectura para el aprendizaje de las matemáticas, así como la conceptualización del Teorema del Coseno, conceptos que dan sustento a la presente investigación, ahora, para una mejor comprensión de la estrategia propuesta, es necesario conocer aspectos básicos del aprendizaje autónomo tales como:

fases, características, los saberes previos, rol del docente y del estudiante, trabajo cooperativo y actividades para el desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora.

### **Fases del aprendizaje autónomo.**

Burbat (2016) plantea unas fases de aprendizaje autónomo que se resumen en una de *Reconocimiento*, donde se activan los conocimientos previos que trae el estudiante; otra de *Profundización*, en la cual, se generan procesos de aprendizaje desde la comprensión y no desde la sola repetición; finalmente la *Transferencia*, en la que se propician espacios para que el estudiante aplique los conocimientos adquiridos en la solución de problemas reales de su entorno (pp. 47-48). Estas fases llevan al estudiante a que aprenda de forma independiente como si estuviera con el docente en el aula de clase, aunque, para que el estudiante viva verdaderamente un aprendizaje autónomo, uno de los principales aspectos que debe procurar es un grado de alta responsabilidad y constancia, para llegar a progresar en sus diferentes desempeños, así como el desarrollo de habilidades que le faciliten abandonar el apoyo que hasta ahora ha tenido del maestro.

Con el anterior ejemplo se puede definir el aprendizaje autónomo como el aprendizaje realizado con motivación, unos contenidos, unas técnicas y la evaluación que surgen de la misma persona que aprende y son realizados por esta. En las aulas de clase, muchas veces la forma como el docente planea sus actividades no permite que los estudiantes trabajen de forma autónoma, por tanto, el maestro debe pensar en actividades necesarias para que este se materialice. Desde esta perspectiva, este aprendizaje autónomo viene a ser aplicable a todos los contextos en los que se desarrolla el ser humano, debido a que este tipo de aprendizaje proporciona libertad y capacidad crítica frente a lo que se vivencia y se experimenta (Massié, 2010).

### **Características del aprendizaje autónomo.**

Las características del aprendizaje autónomo permiten definir como éste conlleva a la libertad y solvencia del estudiante. Estas son cinco, la primera es la *Autodirección*, con la cual la persona tiene el compromiso de organizar, planificar, ejecutar y evaluar sus trabajos. Luego, *la reflexión crítica*, que le permite al estudiante desarrollar habilidades como el análisis y la solución de problemas, que en dúo pueden promover la autonomía. Otra de las características, le permite al estudiante ser consciente de su proceso de aprendizaje, hasta el punto de comprender que no depende de nada, ni nadie, solamente quien estudia sabe que depende de el mismo, a esta se ha denominado *responsabilidad personal*. *La motivación* es otro rasgo importante para el fortalecimiento de la autonomía ya que es el motor de todo el proceso de aprendizaje autónomo, para mantenerse en éste, debe existir voluntad y aspiración, para que, con la práctica, este aprendizaje se convierta en un hábito de estudio. Por último, el *autoconcepto* influye en que tan gratificante o decepcionante es el proceso de aprendizaje para el estudiante, una característica que está relacionada con lo afectivo y lo emocional. Un autoconcepto pobre de sí mismo, se refleja en escasas de motivación, por lo que no se presentan resultados favorables. Las características anteriores se asumen por ser consideradas pertinentes para la investigación a pesar de que pueden variar de acuerdo a la literatura. Así pues, el aprendizaje autónomo presenta elementos esenciales que lo fortalecen, entre ellos se encuentran los saberes previos, los roles de los actores que intervienen en el proceso según los grados de autonomía y el trabajo cooperativo.

### **Los saberes previos relacionados con el objeto matemático.**

Los procesos de enseñanza en los que se pretende promover aprendizajes significativos implican tener en cuenta los saberes o conocimientos previos de los estudiantes. Estos han sido

ampliamente estudiados por diversos científicos entre ellos es posible mencionar Ausubel (1983) quien ha señalado su importancia en el aprendizaje de las ciencias exactas y naturales.

Acorde con lo anterior, Ausubel (1983) dice que cuando el estudiante adquiere nueva información esta depende considerablemente de las ideas “pertinentes” que él ya ha construido en su estructura cognitiva, así las nuevas ideas interaccionan con las existentes produciendo el tan deseado aprendizaje significativo.

En la enseñanza de las matemáticas es fundamental que los docentes corroboren los saberes previos de los estudiantes dado que de ellos depende la construcción de los nuevos conceptos, siendo que, si las ideas previas están mal concebidas, los nuevos aprendizajes pueden fundarse en ideas erróneas que no permitirán avances significativos, por cuanto estos, según López (citado por Mota y Valles, 2015) son resistentes al cambio.

En este trabajo resulta imperante que el docente se preocupe por algunos aspectos entre ellos, que el estudiante domine los conocimientos necesarios relacionados con el objeto matemático, además, de tener presente el modo como el estudiante relaciona los conocimientos que trae, con aquellos que se le plantean durante el proceso de enseñanza, que hasta entonces no conocía. Se espera que la interacción entre estos produzca un aprendizaje significativo, dado que, los conocimientos previos también debieron serlo, como lo afirman, Mota y Valles (2015) puedan evocarlos y utilizarlos cuando sea oportuno. Razón por la cual, son asumidos como parte importante de la presente investigación.

### **Rol del docente y del estudiante-grados de autonomía.**

El aula es el espacio, donde se desarrollan procesos de enseñanza-aprendizaje, en el que el docente extiende sus recursos didácticos, pedagógicos y personales para dar cuenta de su

trabajo, teniendo una relación directa con los estudiantes, quienes se encuentran allí para aprender, educarse, y convertirse en personas socialmente adaptables (Gutiérrez, 2003). Estas consideraciones resultan importantes y llevan a plantear cuál es el rol del docente y del estudiante en el aprendizaje autónomo, para esto es necesario establecer el grado de autonomía del estudiante, el cual se desarrolla gradualmente con la ayuda del docente. Para Mateos (2001) esta gradualidad se presenta en cuatro etapas a saber, instrucción explícita, práctica guiada, práctica cooperativa y práctica individual. Sin embargo, la gradualidad en esta investigación se evidenció en tres etapas.

La primera, explicación directa que dio cuenta de las estrategias usadas en el proceso de enseñanza. La segunda, práctica guiada, esta se realizó con la colaboración del profesor que actúa como guía. Por último, la práctica individual-cooperativa, esta resulta del trabajo por equipos cooperativos, en el que la interacción con un grupo se colabora para completar una tarea.

Las especificaciones anteriores, aportaron elementos teóricos, conceptuales y procedimentales que avalan y configuran el rol del docente y de los estudiantes en el desarrollo de estrategias de aprendizaje autónomo. Consecuentemente, la tabla 2, expone las características que deben tener el docente y el estudiante, desde la perspectiva de Gutiérrez (2003), Martínez (2014) y Mateos (2001).

**Tabla 2***Roles del docente y el estudiante en el aprendizaje autónomo*

	<b>Docente</b>	<b>Estudiante</b>
<b>Rasgos características distintivas para cada rol</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>o -Poseer una vocación comunicativa e interactiva.</li> <li>-Ser facilitador.</li> <li>-Crear situaciones pedagógicas que simulen la vida real de manera que fomenten la cooperación y la interacción.</li> <li>- Los maestros buscan y valoran los puntos de vista de los estudiantes.</li> <li>-Las actividades del aula retan los conocimientos de los alumnos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Ser capaz de tomar la iniciativa.</li> <li>-Saber configurar un plan de trabajo realista.</li> <li>-Manejar fuentes de información y saber contrastarlas.</li> <li>-Comprender informaciones y textos.</li> <li>-Plantear y resolver problemas.</li> <li>-Anhelar conocer cosas nuevas y profundizar en ellas.</li> <li>-Transferir, extrapolar y aplicar conocimientos a situaciones nuevas.</li> <li>-Reflexionar y evaluar su propio trabajo</li> </ul>

*Fuente: Martínez (2014), (p. 37).*

Según las características presentadas en la tabla 2, el rol del maestro en el aprendizaje autónomo es de motivador, activador y guía del proceso; mientras que el rol del estudiante es de protagonista, quien direcciona su aprendizaje y se autorregula.

### **Trabajo cooperativo.**

Para lograr el desarrollo de habilidades relacionadas con la comprensión lectora en el aula de matemáticas, es necesario dejar atrás la visión tradicional de la enseñanza para generar cambios, en donde los estudiantes sean protagonistas de su propio aprendizaje de forma individual, para su beneficio y el de todos los demás integrantes del grupo, trabajando juntos para alcanzar un objetivo común. Para ello, se requiere del trabajo cooperativo en el aula, pues así se deja de lado el trabajo competitivo, en el cual el estudiante produce individualmente y en contra de los demás (Johnson, Johnson, & Holubec, 1999).

Los mismos autores afirman que, el aprendizaje cooperativo comprende tres tipos de grupos: formales, informales y de base cooperativa. Para el desarrollo de este trabajo se utiliza el primer grupo, en el cual el docente debe: (a) especificar el propósito de la actividad , (b) tomar



una serie de decisiones previas a la enseñanza, (c) explicar la tarea y la interdependencia positiva a los alumnos, (d) supervisar el aprendizaje de los estudiantes e intervenir en los grupos para brindar apoyo en la tarea o para mejorar el desempeño interpersonal y grupal de los alumnos, y (e) evaluar el aprendizaje de los estudiantes y ayudarlos a determinar el nivel de eficacia con que funcionó su grupo. Los grupos formales de aprendizaje cooperativo se caracterizan por la participación de los estudiantes en las tareas intelectuales de organizar el material, explicarlo, resumirlo e integrarlo a las estructuras conceptuales existentes.

Las descripciones anteriores, se ven reflejadas en la construcción de exposiciones realizadas por los estudiantes. Ellos deben consultar primero de manera individual con indicaciones específicas dadas por el docente y luego aplicar las tareas intelectuales enumeradas anteriormente con sus pares académicos para finalmente exponer ante el grupo de compañeros. Para el funcionamiento del trabajo cooperativo es indispensable incorporar cinco elementos.

#### ***Elementos claves del trabajo cooperativo.***

Según los postulados de diferentes teorías de educación, el trabajo cooperativo desarrolla procesos donde lo individual y social se interrelacionan para la construcción del conocimiento, esta interrelación se ocasiona por el uso del lenguaje. Así pues, para el funcionamiento del trabajo cooperativo como plantea Johnson et al. (1999) se relacionan cinco elementos claves: interdependencia positiva, responsabilidad individual y grupal, interacción estimuladora, enseñar a los estudiantes algunas prácticas interpersonales y grupales y por último la evaluación grupal. El conjunto de estos elementos se entreteje para generar el espacio ideal en el andamiaje para la construcción del conocimiento a través del desarrollo de habilidades de comunicación.

En la interdependencia positiva, los integrantes del grupo son conscientes de la importancia de sus aportes para el logro de un beneficio en común, el cual está enmarcado con

un propósito claro definido por el docente. En la responsabilidad individual y grupal: cada estudiante debe hacerse responsable de la tarea encomendada y evaluar el rendimiento del grupo de acuerdo con los aportes y fortalecimiento individual.

Del mismo modo, en la interacción estimuladora, el estudiante promueve el aprendizaje del otro, apoyándose, resaltando sus logros y enseñando uno al otro para superar las dificultades presentes en el aprendizaje individual, logrando un objetivo colectivo. Además de enseñar a los estudiantes algunas prácticas interpersonales y grupales, en las cuales, estos deben manejar un clima de confianza para establecer relaciones adecuadas, basadas en el respeto y la autoestima para la toma de decisiones conjuntas. Así pues, es indispensable la intervención del docente, quien debe instruirlos en las prácticas de trabajo en equipo de la misma forma que lo hace con el contenido disciplinar. Adicionalmente, la evaluación grupal es indispensable para que los estudiantes consideren las acciones positivas y negativas de sus miembros, de ellas se establecen acuerdos en pro de la eficacia del trabajo en grupo.

Finalmente, se enfatiza en el lenguaje desde la oralidad y la lectura como elementos indispensables en el trabajo cooperativo para este estudio, puesto que es el medio de comunicación entre los miembros del equipo y un elemento clave en la comprensión de la lectura como habilidad fundamental para la vida. Por tal razón, leer es el resultado de la interacción social, a través de la cual los estudiantes estarán en capacidad de discutir y analizar un texto. Contrario a lo que se consigue trabajando de manera individual. Colomer (citado por Johnson et al., 1999). Además, las estrategias de lectura cooperativa han sido demostradas como útiles para motivar a los estudiantes tanto en el placer por la lectura, como en el nivel de comprensión crítico (Oliveras & Sanmartí, 2009)

### **Actividades para el desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora.**

Cabe señalar que la lectura fluida según Logan (citado por Outón, 2011) se evidencia cuando el lector está en capacidad de decodificar el texto sin esfuerzo e igualmente comprende lo que lee, es decir, combina tres elementos (exactitud, automatización y comprensión lectora). Por lo tanto, existe una influencia directa de la exactitud y velocidad de la lectura en la comprensión de esta.

De lo anterior, el MEN en su Programa para la Transformación de la Calidad Educativa “Todos a Aprender” (PTA) promueve el desarrollo de habilidades de lectura desde los componentes de la fluidez y la comprensión lectora. Para lo cual, plantea la caracterización de los estudiantes en estos componentes.

En el primer componente, caracteriza la velocidad y la calidad de la lectura en los niveles: rápido (más de 124 palabras por minuto), óptimo (entre 115 y 124 palabras por minuto), lento (entre 100 y 114 palabras por minuto) y muy lento (por debajo de 100 palabras por minuto) para estudiantes de educación básica primaria. No obstante, faltan protocolos para medir o evaluar la calidad.

Sin embargo, el presente estudio es desarrollado con estudiantes de educación media. Por lo tanto es apoyado en otros autores para los niveles de básica secundaria, debido a que en el rastreo realizado no se evidencia información para el nivel de educación media. De allí, que se aborde la fluidez de la lectura desde los aspectos planteados por diferentes autores, inicialmente para describir los movimientos del ojo como elemento clave en este aspecto y luego con respecto al número de palabras leídas en un minuto.

Smith (1983) afirma que el ojo humano realiza infinidad de saltos que son regidos por cualquier estímulo visual. Las pausas que se hacen entre estos saltos es lo que se denomina una fijación.

En esta dirección durante la lectura es posible que el ojo lea de izquierda a derecha por medio de saltos y realizando fijaciones entre los mismos. A pesar de esto un lector que sea lo suficientemente eficiente realizaría el menor número de fijaciones al leer un renglón o línea de texto, así como de forma ideal no leerá tradicionalmente de izquierda a derecha, sino que debería leer línea por línea es decir que haría una lectura vertical.

Adicionalmente, Benavides (1997) plantea:

El promedio de fijaciones por segundo de un adulto normal puede ser de entre tres a cuatro, sin embargo, lectores más veloces solo lograrían una o dos fijaciones extra por segundo, o sea no existen diferencias dramáticas en cuanto al número de fijaciones por segundo a pesar de que lectores muy rápidos pueden decir que hacen muchas más por segundo. Un adulto normal, en un texto normal de unos 65 a 70 caracteres por línea, es decir, 12 a 14 palabras, realizaría de tres a cuatro fijaciones. Entre mayor sea el número de fijaciones por segundo mayor será la velocidad de lectura. Sin embargo, no se puede entrenar al ojo a que realice más de las fijaciones que puede hacer sin que se afecte la comprensión. No es el hecho de mover el ojo rápidamente sino el abarcar más texto en cada fijación y aumentar el número de fijaciones por segundo y especialmente cuánta información con significado se puede obtener en cada una de ellas (p.23).

De esta manera, lo que diferencia a un lector fluido de uno con poco entrenamiento es probablemente la cantidad de significado que dicho lector puede referenciar en una fijación.

Benavides (1997) Consecuentemente, plantea que el mejor modo de valorar la forma de leer es contar el número de fijaciones que se requieren para leer un texto de cien palabras, sustento que es usado en infinidad de pruebas actuales, como la realizada por el programa Todos a Aprender en Colombia, en la cual se coloca al estudiante a leer según el grado un texto y se observa el tiempo que demora en leer un número determinado de palabras.

Bajo estos planteamientos un lector que sea hábil deberá hacer menos fijaciones en cien palabras, para así abarcar un mayor número, como plantea Smith (1983), mientras que los lectores menos hábiles abordan más significado en una sola fijación haciendo mayor cantidad de fijaciones en un segundo. En palabras de este autor:

Leer a un nivel menor de 200 palabras por minuto, según Smith conllevaría a tener una visión de túnel. Para evitar la visión de túnel, consistente en cerrar el ángulo de la visión con detalle visual, es necesario que la lectura se haga lo más rápido posible no necesariamente desplazando los ojos con rapidez sino haciendo el menor número de fijaciones posibles. En otras palabras, haciendo uso de la visión periférica, la cual abarca más texto en cada salto, tirón o golpe de visión con la consecuente disminución de número de fijaciones en el texto. (p.23).

En relación con estos valores de palabras por minuto que debe realizar un lector fluido el Ministerio de Educación de Chile (2009) propone como meta de aprendizaje de la velocidad lectora desde 1° hasta 8° básico, una tabla de desempeños para establecer la misma, presentando los siguientes indicadores para el ciclo 7° y el 8°:

**Tabla 3**

*Velocidad de la lectura 7° y 8° básico*

<b>Velocidad de lectura</b>	<b>7° y 8° Básico</b>
Muy rápida	214
Rápida	194-213
Medio alta	174-193
Medio bajo	154-173
Lenta	135-153
Muy lenta	134

Fuente: *MINEDUC, Orientaciones para la evaluación de aprendizajes en dominio lector y la comprensión lectora. (2009)*

Los criterios descritos en la tabla 4 son el referente para este estudio, debido a la importancia que tiene la fluidez en el desarrollo de habilidades de comprensión lectora.

En este orden de ideas, el segundo componente establece los niveles de comprensión lectora, los cuales son descritos por CURN (citado por Martínez, 2017)

El nivel literal, constituye la lectura predominante en el ámbito académico. Es el nivel básico de lectura centrado en las ideas y la información que está explícitamente expuesta en el texto. La lectura literal es reconocimiento de detalles (nombres, personajes, tiempos

y lugar del relato), reconocimiento de la idea principal de un párrafo o del texto, identificación de secuencias de los hechos o acciones, e identificación de relaciones de causa o efecto (identificación de razones explícitas relacionadas con los hechos o sucesos del texto (p. 3).

El nivel inferencial, constituye la lectura implícita del texto y requiere un alto grado de abstracción por parte del lector. Las inferencias se construyen cuando se comprende por medio de relaciones y asociaciones el significado local o global del texto. Las relaciones se establecen cuando se logra explicar las ideas del texto más allá de lo leído o manifestado explícitamente en el texto, sumando información, experiencias anteriores, a los saberes previos para llegar a formular hipótesis y nuevas ideas. El objetivo de la lectura inferencial es la elaboración de conclusiones y se reconoce por inferir detalles adicionales, inferir ideas principales no explícitas en el texto, inferir secuencias de acciones relacionadas con la temática del texto, inferir relaciones de causa y efecto (partiendo de formulación de conjeturas e hipótesis acerca de ideas o razones), predecir acontecimientos sobre la lectura e interpretar el lenguaje figurativo a partir de la significación literal del texto (p. 4).

El nivel Crítico es la lectura de carácter evaluativo donde intervienen los saberes previos del lector, su criterio y el conocimiento de lo leído, tomando distancia del contenido del texto para lograr emitir juicios valorativos desde una posición documentada y sustentada. Los juicios deben centrarse en la exactitud, aceptabilidad y probabilidad; pueden ser: de adecuación y validez (compara lo escrito con otras fuentes de información), de apropiación (requiere de la evaluación relativa de las partes) y de rechazo o aceptación (depende del código moral y del sistema de valores del lector) (p. 5).

Los niveles de lectura descritos son presentados en criterios de cumple o no cumple en la tabla 4.

**Tabla 4**  
*Niveles de comprensión lectora*

<b>Niveles de comprensión lectora</b>	<b>Literal</b>	<b>Inferencial</b>	<b>Crítico</b>
<b>Cumple</b>	El (la) estudiante responde las preguntas de ubicación de información puntual de un texto	El (la) estudiante responde las preguntas donde debe relacionar la información para hacer referencias del texto.	El (la) estudiante responde las preguntas donde debe evaluar y reflexionar sobre el propósito, el contenido o la forma del texto.
<b>No cumple</b>	El (la) estudiante responde una o ninguna de las preguntas de ubicación de información puntual de un texto	El (la) estudiante responde una o ninguna de las preguntas donde debe relacionar la información para hacer referencias del texto.	El (la) estudiante no responde las preguntas donde debe evaluar y reflexionar sobre el propósito del texto, el contenido o la forma del texto.

Fuente: Adaptada de CURN (citado por Martínez, 2017).

Las anotaciones delimitan los aspectos que aportan a este estudio con respecto a las técnicas utilizadas para aumentar el nivel en la fluidez (velocidad) y los niveles de comprensión de la lectura, promoviendo el desarrollo de estas habilidades. Para ello, se implementan estrategias de lectura en el aula que promuevan la interacción entre pares, privilegiando el aprendizaje autónomo en el contexto de la IELMV.

Para el desarrollo de la estrategia que asiste este trabajo de investigación es necesario mencionar el uso de las Tecnologías de la Información y la comunicación, las cuales fueron necesarias para el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno.

### **Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación-TIC en la educación.**

En el aula de clase uno de los usos de las TIC, es que el estudiante adquiera competencias que le permitan tanto juzgar la validez, pertinencia y actualidad de la información como realizar procesos investigativos sistemáticos con el fin de solucionar problemas de información; siendo estas competencias hoy más importantes que nunca, debido a la cantidad enorme de información a la que actualmente se tiene acceso. Según afirma (López, 2006)González, & Sánchez (2006)

Estas son denominadas Competencias para el Manejo de la Información-CMI, se puede definir como la habilidad individual para (a) reconocer la necesidad de información (b) Identificar y localizar fuentes de información adecuadas (c) Saber cómo llegar a la información dentro de las fuentes (d) Evaluar la calidad de la información obtenida (e) Organizar la Información (f) Usar la información de manera efectiva (párr. 12).

Para ello, López (2006) expone un grupo de modelos que pueden apoyar con el manejo de la información, estos modelos pueden ser sugeridos por el docente o desarrollados de forma intuitiva por los estudiantes. Cuando es el maestro quien los propone, debe aportar los elementos necesarios para que puedan utilizar un modelo en la resolución de problemas de información en su vida académica o personal, tomar mejores decisiones o utilizarlo como herramienta en su

futura vida laboral. Es labor del docente estudiar los diferentes modelos existentes con el fin de adaptar el que más se ajuste a las necesidades particulares de sus estudiantes o crear uno propio y ponerlo en práctica. De acuerdo con lo anterior, en la tabla 5 aparecen los diferentes modelos.

**Tabla 5**  
*Modelos para el manejo de la información*

<b>MODELOS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE INFORMACIÓN</b>					
<b>Gavilán</b> Desarrollo De Competencia Para El Manejo De Información (CMI) (Colombia)	<b>Osla</b> Estudios De Información Kinder A Grado 12 (Canadá)	<b>Kuhlthau</b> Búsqueda De Información (Estados Unidos)	<b>(Big6)</b> Eisenberg/Berkowitz Información Para La Solución De Problemas (Estados Unidos)	<b>Irving</b> Competencia Para El Manejo De Información CMI (Reino Unido)	<b>Stripling/Pitts</b> Proceso De Investigación (Estados Unidos)
1 DEFINIR EL PROBLEMA DE INFORMACIÓN  -Plantear la Pregunta Inicial -Analizar la Pregunta Inicial -Construir un Plan de investigación -Formular Preguntas Secundarias -Evaluación del paso	1ª ETAPA: Preparar e para investigar  -Definir -Explorar -Identificar -Relacionar	-Iniciar -Seleccionar el tema -Explorar (Investigar información sobre el tema en general).  - Formular una tesis o tema específico.	1. Definir las Tareas -Definir el problema -Identificar las necesidades 2. Estrategias para buscar la información -Establecer una gama de recursos -Establecer la prioridad de los recursos	1. Formular / analizar las necesidades de información. 2. Identificar / evaluar las posibles fuentes.	-Elegir un tema amplio. -Obtener una perspectiva global del tema. -Limitar el tema. -Desarrollar la tesis / establecer el objetivo. -Formular preguntas para encauzar la investigación. - Planear la investigación y la producción.
2 BUSCAR Y EVALUAR INFORMACIÓN -Identificar y seleccionar fuentes de información -Acceder a las fuentes seleccionadas -Evaluar las fuentes y la información que contienen. -Evaluación paso 2	2ª ETAPA: Acceder a los recursos -Localizar -Seleccionar -Recopilar -Colaborar	Recopilar (reunir la información sobre el tema )	3. Ubicación y acceso -Localizar los recursos -Encontrar la información dentro de los recursos	3. Localizar los recursos individuales. 4. Examinar, seleccionar y rechazar recursos individuales.	Encontrar, analizar, evaluar las fuentes.
3. ANALIZAR LA INFORMACIÓN -Elegir la información más adecuada	3ª ETAPA: Procesar la información  -Analizar / evaluar -Probar	- Presentar -Organizar -Esquematizar -Resumir -Escribir.	4. Utilizar la información. -Comprometerse-leer, ver, escuchar, etc.	5. Interrogar / utilizar los recursos individuales. 6. Registrar / almacenar la información.	-Evaluar las pruebas, tomar notas, compilar la bibliografía. -Establecer conclusiones, organizar la



-Leer, entender, comparar, y evaluar la información seleccionada -Sacar conclusiones preliminares -Evaluación paso 3	- Seleccionar  -Sintetizar		-Extraer información relevante. 5. Sintetizar -Organizar la información de varias fuentes. -Crear y presentar	7. Interpretar, analizar, sintetizar y evaluar la información.	información en un esquema.
4 SINTETIZAR Y UTILIZAR LA INFORMACIÓN -Sacar una conclusión general -Elaborar un producto concreto -Comunicar los resultados -Evaluación paso 4	4ª ETAPA: Transferir el aprendizaje  -Revisar -Presentar -Reflexionar -Transferir	-Evaluar el resultado y el proceso	6. Evaluación -Juzgar el producto -Juzgar el proceso	8. Dar forma, presentación, y comunicación de la información.  9.Evaluación de la tarea	-Crear y presentar el producto final. -Material de extensión - es satisfactorio el documento / el escrito

Fuente: López (2006). <http://eduteka.icesi.edu.co/modulos/1/150/487/1>

Igualmente, se requieren habilidades para el manejo de herramientas tecnológicas que posibilitan el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, a través de la creación de recursos que fortalecen este proceso en los estudiantes. Entre los cuales, utilizamos en el presente estudio, Google, Google Drive, Formulario de Google y PowerPoint.

*Google*. Motor de búsqueda automática, en el que, se introducen una o varias palabras de manera conveniente para obtener gran cantidad de información, esta es presentada en forma de conexiones o enlaces a documentos hipertextuales que contienen esas palabras Landow (citado por Mampel & Cortés, 2009). Por consiguiente, Marqués (citado por Mampel & Cortés, 2009) plantea que, es conveniente considerar algunas sugerencias

Para aprovechar todo el potencial informativo de Internet, entre ellas se proponen: (a) diagnosticar cuándo es necesaria una información, (b) saber encontrar la información que se busca, (c) evaluar la calidad de la información y (d) evaluar la idoneidad de la información obtenida para ser utilizada en cada situación concreta, organizarla y utilizarla. (p.771).

Así pues, el uso de esta herramienta en el aula posibilita el acceso a la gran cantidad de información que existe en la actualidad.

*Google Drive.* Es una herramienta de almacenamiento con diferentes archivos, los cuales brindan la posibilidad de involucrar equipos de trabajo cooperativo propiciando la participación en sus contenidos desde diversos roles y modos de publicación, la interacción y comunicación entre pares y finalmente, la construcción del conocimiento. Estos aspectos, dan la oportunidad al estudiante de desarrollar su creatividad, capacidad reflexiva y fortalecer sus competencias digitales (Barrios & Casadei, 2014).

*Formularios de google.* Esta herramienta permite crear un cuestionario de preguntas de opción múltiple (tipo test) con lógica de exclusión, almacenando las respuestas en una hoja de cálculo, lo cual, ofrece la oportunidad de observar los resultados de manera individual con respecto a cada solución y de forma grupal con las estadísticas correspondientes (Gonzalez, 2010). Esto la convierte en una herramienta útil en el aula para el análisis de respuestas obtenidas bien sea a nivel individual o grupal.

*Power Point.* Herramienta de apoyo visual que permite el trabajo cooperativo, comunicación e interacción para la construcción del conocimiento. Considerando que debe ser utilizada bajo algunos lineamientos entre ellos, las diapositivas deben ser simples, utilizar textos cortos y directos, gráficas fáciles de comprender y que reflejen lo expresado, la diapositiva debe contener espacios en blanco, no leer literalmente, utilizar amplia gama de colores y manejo seguro (Maraví, 2010). Esta herramienta es utilizada en el aula para las exposiciones realizadas por los estudiantes, lo que permite el desarrollo de habilidades de oralidad, escucha, lectura y escritura, indispensables para la construcción del conocimiento.

Por consiguiente, la implementación de la fluidez y los niveles de comprensión de la lectura en el aula de matemáticas debe ser mediado por grupos de trabajo cooperativo con el fin de potenciar la oralidad y el análisis de la lectura a través de la fluidez y los niveles de comprensión lectora para desarrollar procesos de pensamiento más avanzados en el aula, usando competencias CMI y algunas herramientas tecnológicas como las descritas anteriormente.

### **Contexto institucional**

La IELMV, etnoeducativa, se encuentra ubicada en la comuna 16 al sur oriente de la ciudad de Santiago de Cali, en el Barrio Unión de Vivienda Popular, atiende una población de 2300 estudiantes, los cuales pertenecen a estratos socio-económicos 1 y 2, en los niveles de pre-escolar, básica primaria, secundaria y media, en las tres jornadas, distribuidos en la sede principal y tres sedes de primaria.

Adicionalmente, la institución favorece el desarrollo humano integral desde la dimensión artística, deportiva y las competencias siglo XXI, a través de la implementación de diversas estrategias que propicien el aprender a conocer, a ser, a hacer y a vivir juntos para el ejercicio de la ciudadanía. Para ello, describe al estudiante que desea formar de la siguiente manera:

- Posee un alto sentido de pertenencia y solidaridad en los entornos en que se desempeña.
- Respeta y defiende los derechos humanos de acuerdo con las leyes nacionales.
- Sus acciones son un fiel reflejo de los valores institucionales (pertenencia, identidad, respeto, responsabilidad y liderazgo) apropiados en su proceso de formación.
- Hace pleno ejercicio del liderazgo en los ámbitos en los cuales interactúa.
- Evidencia la apropiación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en su vida personal y social.

- Respetar la diversidad cultural de los miembros de su entorno.
- Su liderazgo es factor de desarrollo para su comunidad.

Es de notar que, la IELMV aborda la importancia de generar estrategias de enseñanza que promuevan la apropiación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación de acuerdo con el perfil del estudiante. Este elemento constituye un componente del presente estudio en la implementación de estrategias para el desarrollo de habilidades de fluidez y lectura comprensiva.

De igual forma, los recursos necesarios para este trabajo se describen a continuación:

El recurso humano es de 2300 estudiantes matriculados, atendidos por 76 docentes, 6 directivos docentes y 13 administrativos y el recurso tecnológico se encuentra conformado por un servicio de internet de 30 Mb, el cual provee la Secretaria de Educación Municipal, a través, de las Empresas Municipales de Cali (EMCALI) distribuida en dos la redes: LAN y el wifi; la red LAN esta soportada en los portátiles y en la CPU de los computadores de escritorio, el wifi está dividido en dos canales el wifitit@, usada para las Terminales de Aprendizaje (TDA) y los computadores de los docentes. Esta red oculta únicamente es utilizada en las aulas denominadas tit@ para este programa el operador EMCALI entregó conectividad de Banda Ancha a Internet (Wimax/ WiFi, ADSL). La red de fibra óptica llega por un servidor Router conectado por acces point que le da la IP a cada equipo.

En este orden de ideas, la institución se encuentra dotada con 16 salones, denominadas aulas Tit@, cada una de ellas con 38 computadores y un video proyector interactivo. Los docentes en su jornada están encargados del manejo del aula, entre sus funciones se encuentra: revisar cada UCA (Unidad de Carga y Almacenamiento) y reportar fallas, en caso de que ocurran

a la mesa de trabajo (plataforma a nivel local), la cual se encarga de verificar los daños y dar solución a estos.

La infraestructura tecnológica nombrada fue otorgada por el MEN inicialmente con el programa de formación “Computadores para educar”, el cual capacitó a algunos docentes desde las diferentes disciplinas curriculares con la Universidad Tecnológica de Pereira en el año 2012 y el programa de formación Tit@ implementado por la Secretaria de Educación Municipal (SEM) con la capacitación de todos los docentes de la institución, ejecutado por la Universidad del Valle en el año 2016.

Finalmente, las escuelas son dotadas de recursos en busca de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje para ofrecer una educación de calidad en Colombia, para ello, se establece la normatividad correspondiente. Por tal razón a continuación se consideran las normas educativas colombianas.

### **Marco legal**

Teniendo en cuenta las normas educativas colombianas, este estudio se realiza bajo los argumentos presentes en la Constitución Política de Colombia, la Ley General de Educación, los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).

En el artículo 67 de la Corte Constitucional de Colombia (1991) en donde se define un primer referente legal en aspectos educativos y así, se señala que: “...La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección

del ambiente” (p. 19), lo que supone que debe formarse en áreas como la matemática que está involucrada en la ciencia, la cultura y la tecnología.

Igualmente, en este artículo dice que: “...Corresponde al Estado regular y ejercer la suprema inspección y vigilancia de la educación con el fin de velar por su calidad, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos” (Corte Constitucional de Colombia, 1991, p.15), en relación a esto, el docente del sector oficial como representante del estado, debe implementar procesos de mejoramiento que conlleven a superar las falencias y dificultades existentes en la enseñanza o aprendizaje de las diferentes áreas del currículo escolar.

Por su parte, la ley General de Educación (Ley 115 de 1994), aporta explícitas razones por las cuales el estudio de las matemáticas es fundamental en la educación media a saber:

En el Título I, Art. 5 se mencionan los fines de la educación, que señalan el camino que se debe seguir al formar seres humanos integrales, esto se fortalece con lo que dice el Título II, Art.13 donde se presenta como uno de los objetivos primordiales, el desarrollo integral de los educandos mediante acciones estructuradas encaminadas a desarrollar a un individuo integral capaz de contribuir a su contexto para lograr un desarrollo sostenible.

Los Lineamientos Curriculares exponen todas las orientaciones concernientes a generar “...una educación matemática que propicie aprendizajes no solo de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender” (MEN, 1998, p.18). En este sentido estos Lineamientos avalan el desarrollo de propuestas como la realizada en el presente trabajo. En este tipo de propuestas el estudiante puede llegar a dar sentido al mundo que rodea; adquirir habilidades como la exploración, representación de la

realidad, desarrollo del lenguaje para explicar y predecir, es decir que, el educando es formado para aplicar lo aprendido fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas. Las características nombradas definen el aprendizaje autónomo.

Los EBC exponen que “el aprendizaje de las matemáticas informales se inicia en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extraescolar” (MEN, 2006, p.78), por lo que se requiere aprovechar este tipo de situaciones para iniciar un proceso de comprensión de procesos algebraicos relacionados con la variación y el cambio.

Finalmente, los DBA le aportan al maestro de matemática una posible ruta de aprendizajes para que los educandos alcancen lo propuesto en los EBC para cada grupo de grados. Los DBA por sí solos no constituyen una propuesta curricular puesto que estos son complementados por los enfoques, metodologías, estrategias y contextos que se entretajan en los establecimientos educativos, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales y se concretan en los planes de área y de aula.

Los aportes anteriores según las políticas establecidas por el MEN evidencian la importancia de implementar estrategias pedagógicas que permitan el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje efectivos. Por ello, en este trabajo de investigación se integran el lenguaje como elemento fundamental en el ámbito educativo.

Las descripciones anteriores dan apertura a la introducción del marco metodológico para evidenciar el tipo de investigación a desarrollar y las diferentes técnicas e instrumentos que se utilizarán en este estudio con el fin de dar respuesta a la pregunta *¿Cómo fortalecer habilidades de fluidez y comprensión lectora que medien el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno?*

## Marco metodológico

### Tipo de investigación

De acuerdo con el problema de investigación, los objetivos y el marco teórico se toma la decisión de utilizar una metodología de enfoque mixto por estudio de caso Stake (1999). Este se caracteriza por la integración sistemática de los métodos cuantitativo y cualitativo en un solo estudio con el fin de obtener una "fotografía" más completa del fenómeno estudiado, es decir, se triangula por métodos, situación que le da a los resultados un alto nivel de confiabilidad y verosimilitud (Denzin & Lincoln, 2000). Los beneficios de esta metodología descansan en que permite medir fenómenos y utilizar estadísticas (enfoque cuantitativo), además contextualiza el fenómeno acerca de la manera como se desarrollan las habilidades relacionadas con la fluidez y la comprensión lectora durante el aprendizaje del Teorema del Coseno en los estudiantes de grado décimo (enfoque cualitativo).

El estudio de caso según Schwandt (2014), da solución a preguntas de “Cómo” ó “Por qué”, teniendo en cuenta esto, el tipo de estudio seleccionado es pertinente para dar solución a la pregunta que orienta la presente investigación, que se plantea en *¿Cómo fortalecer habilidades de fluidez y comprensión lectora que medien el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno?*

Solución que puede explicar si las estrategias utilizadas fueron pertinentes o no. De lo anterior se concluye que, este método permite realizar una reflexión en relación al desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora para el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno.

### Alcance y diseño de la investigación

El estudio es de alcance descriptivo y de diseño transversal. Es descriptivo porque facilita la delimitación de los aspectos más relevantes de un fenómeno que se presenta en un



determinado grupo, como sus características, propiedades, entre otras (Sampieri & Lucio, 2006). En este orden, es un estudio de diseño transversal porque permite determinar rendimiento de los estudiantes en relación con unas características particulares como el nivel de desempeño en la comprensión lectora y los conocimientos relacionados con el Teorema del Coseno.

### **Participantes**

El grupo intervenido fue 10-6 de la jornada de la tarde, conforman un grupo heterogéneo, tanto social como culturalmente, sus edades oscilan entre los 15 y 19 años, siendo su mayor porcentaje el 43% que corresponde a 10 estudiantes y el menor porcentaje el 4% conformado por un estudiante.

Estos estudiantes viven distribuidos en las comunas 12, 13, 15 y 16 de la ciudad de Cali, localizándose en su mayoría con un 75% en la comuna 16 (barrios: Unión de vivienda Popular, Antonio Nariño). Del total de ellos, según el sexo, se encuentra divididos en 10 estudiantes que corresponden a un 62% del sexo femenino y 6 estudiantes con un 38% conforman el sexo masculino.

Por lo que se refiere a la selección del caso en este estudio se realiza de acuerdo a los criterios planteados por Stake (1999), los cuales son: la disposición de tiempo para el trabajo de campo, escoger casos fáciles de abordar, que cuente con actores (personas estudiadas y docente-investigador) dispuestos a dar opinión y aportar en el desarrollo del trabajo. Con base en estos elementos se selecciona el grupo de estudiantes en mención.

Este grupo, se encuentra dispuesto a participar en el estudio y realizar aportes, a ser observados en su contexto escolar. Para ello se solicita el permiso a los padres debido a que ellos

son menores de edad, a través de un documento denominado “Consentimiento informado a padres o acudientes” (Anexo 2).


### **Técnicas e instrumentos de recolección de datos**

Se utilizaron dos técnicas para la recolección de información, la observación participante y el Test.

En la observación participante se involucra el investigador con el objetivo de obtener información de carácter cualitativo, accediendo a la situación observada por medio de la interacción social y forma de obtener los datos escritos (Taylor & Bogdan, 1984), así se observó de forma participativa a los estudiantes del grupo 10-6 mediante la aplicación de 16 clases que sirvieron para recolectar información relacionada con los objetivos de la investigación (Anexo 3).

La observación consistió en describir las interacciones presentadas entre el grupo de estudiantes con la docente en los diferentes momentos de la clase para su posterior reflexión, usando como instrumento el diario de campo (Tabla 6), los cuales fueron tratados y analizados con el software ATLAS.ti 7.0 en los aspectos descriptivo y reflexivo; en el aspecto descriptivo se consignó información minuciosa de cada suceso dentro del salón de clase y en el aspecto reflexivo se referenció el análisis específico relacionado con el tema de estudio acorde con la información obtenida.

**Tabla 6**  
*Diario de campo*

		<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA LIBARDO MADRID VALDERRAMA</b>  <b>SEDE: PRINCIPAL</b>	
<b>FICHA DE REGISTRO DEL DIARIO DE CAMPO</b>			
<b>DOCENTES:</b>			
<b>ÁREA:</b>		<b>FOTO DE LA ACTIVIDAD</b>	
<b>FECHA:</b>			
<b>No. DE HORAS:</b>			
<b>GRADO:</b>			
<b>ESTRUCTURA DE TRABAJO:</b>			
<b>OBJETIVO:</b>			
<b>ASISTENCIA</b>	<b>NIVEL DESCRIPTIVO</b>	<b>NIVEL REFLEXIVO</b>	
.		.	
<b>OBSERVACIONES:</b>			

*Fuente: Elaboración propia, 2018*

Durante la observación se usó una rejilla de seguimiento para valorar el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno (Tabla 7).

En esta rejilla se valoran aspectos como el trabajo cooperativo, el dominio y comprensión del tema, pertinencia y manejo adecuado de los ejemplos, finalmente la creatividad en las diapositivas y exposición realizada por los estudiantes. De esta manera las docentes investigadoras registraron los criterios observables.

**Tabla 7**  
*Rejilla de seguimiento aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno*

<b>Trabajo: contribución al aprendizaje autónomo del teorema del coseno basada en el desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora</b>					
<b>Aspectos a evaluar</b>	<b>Indicadores</b>	<b>BAJO</b>	<b>BASICO</b>	<b>ALTO</b>	<b>SUPERIOR</b>
Dimensión: responsabilidad	Puntualidad en la entrega de los trabajos, a pesar de las dificultades.				
Dimensión: capacidad de aprendizaje	Análisis y síntesis de la información: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ordenación y explicación coherente de las ideas y conceptos básicos</li> <li>• Identificación correcta de los conceptos fundamentales</li> </ul>				

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecimiento de relaciones que ordenan los elementos cualitativos</li> </ul>
	<p>Aplicación de los conocimientos teóricos a situaciones reales: Selección de un proceso o de procedimientos de entre los que propone el profesor.</p>
	<p>Adaptación a situaciones nuevas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Intercambio de ideas e información con el profesor y los compañeros más expertos</li> <li>• Aprendizaje de los propios errores o de las críticas</li> <li>• Análisis para mejorar Toma de decisiones: Toma de decisiones en ámbitos concretos de trabajo.</li> </ul>
	<p>Toma de decisiones en ámbitos concretos de trabajo.</p>
Participar y colaborar activamente en las tareas del equipo, y fomentar la confianza, la cordialidad y la orientación en el trabajo conjunto.	<p>Colaboración en la definición y en la distribución de las tareas del trabajo en grupo</p>
	<p>Compartir con el equipo el conocimiento y la información.</p>
	<p>Implicación en los objetivos del grupo y retroalimentación constructiva</p>
Contribuir a la consolidación y al desarrollo del equipo, favoreciendo la comunicación, la distribución equilibrada de tareas, el clima interno y la cohesión.	<p>Aceptación y cumplimiento de las normas del grupo.</p>
	<p>Contribución al establecimiento y a la aplicación de los procesos del trabajo en equipo.</p>
	<p>Actuación para afrontar los conflictos del equipo y su cohesión</p>
	<p>Colaboración en la definición y en la distribución de las tareas del trabajo en equipo.</p>
Generar nuevas ideas para problemas que se le planteen y transmitirlos adecuadamente al grupo.	<p>Aporta ideas originales para solucionar los problemas presentados con los recursos disponibles</p>
	<p>Integra los conocimientos de diferentes disciplinas para generar ideas.</p>
	<p>Expresa formalmente las ideas.</p>

*Fuente: Elaboración propia (2018)*

Por último, en la observación participante relacionada con la caracterización de la fluidez se utilizó como herramienta un instructivo para el docente evaluador (Anexo 4) y la ficha de observación de la fluidez (velocidad de lectura), adaptada para educación media de las fichas usadas en educación básica primaria por el PTA, llamada protocolo del lector (Anexo 5). La velocidad lectora se trabajó teniendo en cuenta los niveles: muy rápida, rápida, Media alta, Media baja, lenta y muy lenta según el número de palabras leídas por minuto, (Tabla 8).

**Tabla 8**

*Escala para medir la velocidad de lectura*

<b>Velocidad de lectura</b>	<b>GRADO 10°</b>
Muy rápida (MR)	214
Rápida (R)	194-213
Medio alta (MA)	174-193
Medio bajo (MB)	154-173
Lenta (L)	135-153
Muy lenta (ML)	134

*Fuente: Adaptado del Ministerio de Educación de Chile*

La prueba se realizó de forma individual, mientras el estudiante leía, el docente con un cronometro registró los datos particulares en la ficha de observación de la velocidad, luego el estudiante pasó al formulario de Google Drive (conformado por las preguntas acerca de los niveles de lectura comprensiva).

La segunda consistió en la técnica del Test, ésta tiene como finalidad en el presente estudio, obtener información sobre aspectos relacionados con el desempeño de los estudiantes en la comprensión lectora y conocimientos sobre el Teorema del Coseno, a través de preguntas, actividades, entre otras, que son observadas y evaluadas por el investigador.

En la técnica de test se usaron dos instrumentos de recolección de datos, la prueba de caracterización de la comprensión lectora (Anexo 6) y el test de conocimientos sobre el objeto matemático (Anexo 7). Los dos instrumentos se aplicaron al inicio y al final del estudio a fin de conocer los niveles de comprensión lectora y el nivel de progreso acerca de los conocimientos

previos para el aprendizaje del Teorema del Coseno. El primer instrumento se encuentra conformado por una serie de preguntas diseñadas en un Formulario en Google Drive para medir los niveles de comprensión lectora conformada entre ellos de literal, inferencial y crítico. Este instrumento está configurado por 13 preguntas, 10 de selección múltiple, de las cuales 8 fueron diseñadas en el nivel inferencial, 2 en el nivel literal y por último 3 abiertas en el nivel crítico. A continuación, se exponen las características de las preguntas seleccionadas en la prueba (Tabla 9).

**Tabla 9**

*Características de las preguntas relacionadas con los niveles de comprensión lectora*

No. De pregunta	Objetivo de la pregunta	Niveles de comprensión lectora
1, 2, 3 y 4	Interpretar el lenguaje figurativo a partir de la significación literal del texto.	Inferencial
7	Explicar las ideas del texto más allá de lo leído o manifestado explícitamente en el texto, sumando información	
8	elaborar conclusiones	
9 y 10	Inferir ideas principales no explícitas en el texto	
5	Reconocer la idea principal del texto.	Literal
6	Identificar las razones explícitas relacionadas con los hechos o sucesos del texto.	
11	Evaluar la lectura de acuerdo con la intención del autor	Crítica
12 y 13	Emitir juicios valorativos desde una posición documentada y sustentada.	

*Fuente: Elaboración propia, 2018*

Por último se aplica el test de conocimientos sobre el Teorema del Coseno, tomando como insumo para su elaboración preguntas de las pruebas Supérate con el saber, Saber 5°, 9°, 11° del año 2015 y de otros recursos disponibles en la web, fundamentado en los antecedentes encontrados acerca de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del Teorema del Coseno, las cuales se agrupan en cuatro conceptos generales para la implementación de la estrategia, conformada por Triángulos, Operaciones Matemáticas, Razones

trigonómicas y Ecuaciones. Este consta de 20 preguntas organizadas tal como se describe en la tabla 10.

**Tabla 10**

*Características de las preguntas de los conocimientos previos para el aprendizaje del Teorema del Coseno*

<b>Posibles errores en el aprendizaje del teorema del coseno</b>	<b>Concepto previo a partir del error</b>	<b>No. de pregunta</b>	<b>Concepto previo desde 4 aspectos generales para la aplicación de la estrategia</b>
<b>Asignar erróneamente una unidad de medida que no corresponde a la magnitud sobre la que se pregunta.</b>	Medida de magnitud (unidades de medida)	14	Triángulos
<b>Asignar una medida equivocada a un ángulo por la forma como se ubica el transportador.</b>	Uso del transportador	17	Ecuaciones
<b>Omitir la inscripción de símbolos que son relevantes en expresiones trigonométricas</b>	Uso de símbolos	13	Triángulos
<b>Interpretar y usar operaciones de forma inadecuada</b>	Potenciación	3 y 4	Operaciones
	Radicación	6	
	Operaciones y propiedades (jerarquización de operaciones)	2	
<b>Interpretar y aplicar razones trigonométricas</b>	Razones inversas	18	Razones trigonométricas
	Razones trigonométricas	19	
<b>Representar gráficamente (mediante triángulos) de forma equivocada una situación problema que involucra el Teorema del coseno.</b>	Teorema del coseno	20	Teorema del coseno
<b>Representar inadecuadamente con expresiones simbólicas una situación</b>	Expresiones simbólicas	1, 5, 7 Y 9	Ecuaciones
<b>Confundir el vocabulario utilizado (ángulos, lados) con los elementos de la representación gráfica-</b>	Elementos de representación gráfica	8 y 15	

<b>pictórica-geométrica que se utilizan</b>		Triángulos
<b>Desconocer triángulos oblicuángulos</b>	triángulos oblicuángulos	12 y 16
<b>Trazar incorrectamente la relación entre los ángulos y los lados</b>	Elementos del Triángulo	11
<b>Desconocer que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°</b>	Propiedades del triángulo	10

*Fuente: Elaboración propia, 2018*

*Validación de instrumentos:* Para validar los instrumentos de investigación se contó con la colaboración de 5 expertos, 3 de Lengua Castellana y 2 de Matemáticas.

La validación consistió en entregar a los docentes expertos cada una de los test diseñados con el fin de corroborar la coherencia interna y la coherencia de lo indagado en ellos, con el problema y objetivos de la investigación. Para dicho análisis se entregó a cada uno la rejilla de validación (Tabla 11) en la que registraron sus observaciones y recomendaciones, que sirvieron como insumo para el rediseño de los test.

Luego se realizó una prueba piloto con 4 estudiantes quienes resolvieron los test y plantearon las fortalezas y debilidades de cada uno de ellos a las docentes investigadoras.



**Tabla 11**

*Instrumento para validar el Test de comprensión lectora y Test de conocimientos sobre el Teorema del Coseno*

**Rejilla de validación para expertos**



ESCALA DE CALIFICACIÓN			
Estimado (a): Teniendo como base los criterios que a continuación se presenta, se le solicita dar su opinión sobre el instrumento de recolección de datos que se adjunta: Marque con una (X) en SI o NO, en cada criterio según su opinión.			
CRITERIOS	SI (1)	NO (0)	OBSERVACIONES
1. El instrumento recoge información que permite dar respuesta al problema de investigación.			
2. El instrumento propuesto responde a los objetivos del estudio.			
3. La estructura del instrumento es adecuado.			
4. Los ítems del instrumento responde a las categorías de análisis.			
5. Los ítems son claros y entendibles.			
6. El número de ítems es adecuado para su aplicación.			

*Fuente: Elaboración propia, 2018*

**Categorías de análisis**

Para el análisis de la información se han establecido las siguientes categorías:

Categoría de análisis 1. Nivel de fluidez y comprensión lectora.

Categoría de análisis 2. Errores y objetos matemáticos asociados al aprendizaje del Teorema del Coseno, estos hablan sobre las posibles dificultades de los estudiantes al abordar este objeto.

Categoría de análisis 3. Estrategias de lectura asociada al aprendizaje del Teorema del Coseno, estas estrategias son importantes por cuanto dinamizan un aprendizaje autónomo de este objeto matemático.

**Tabla 12***Operacionalización de las categorías de análisis*

Objetivo específicos	Categoría de análisis	Subcategorías	Indicadores	Instrumento
Caracterizar el estado inicial de los estudiantes en relación con las habilidades de lectura comprensiva como mediadora del aprendizaje de algunos conceptos que promuevan la comprensión del Teorema del Coseno.	Nivel de fluidez lectora	Velocidad de lectura	Muy rápido	Ficha de observación de la velocidad de lectura.
			Rápido	
			Medio alto	
			Medio bajo	
			Lento	
	Niveles de lectura comprensiva	Comprensión lectora	Nivel Literal	Test Formulario Google Drive caracterización Comprensión Lectora.
			Nivel Inferencial	
			Nivel Critico	
	Errores y objetos matemáticos asociados al aprendizaje del Teorema del Coseno	Asignar erróneamente una unidad de medida que no corresponde a la magnitud sobre la que se pregunta.	Uso correcto de la unidad de medida acorde con su magnitud.	Test Formulario Google Drive conocimientos sobre el Teorema del Coseno.
		Asignar una medida equivocada a un ángulo por la forma como se ubica el transportador.	Mide correctamente un ángulo	
		Omitir la inscripción de símbolos que son relevantes en expresiones trigonométricas	Utiliza símbolos relevantes en expresiones trigonométricas	
		Interpretar y usar operaciones de forma inadecuada	Realiza operaciones adecuadamente	
		Interpretar y aplicar razones trigonométricas	Aplica correctamente las razones trigonométricas	
		Representar gráficamente (mediante triángulos) de forma equivocada una situación problema que involucra el Teorema del coseno.	Representa por medio de triángulos la solución de in problema que involucre el Teorema del Coseno	
Representar inadecuadamente con expresiones simbólicas una situación		Representa una situación mediante símbolos		
Confundir el vocabulario utilizado (ángulos, lados) con los elementos de la representación gráfica-pictórica-geométrica que se utilizan	Usa correctamente el vocabulario en geometría			

		Desconocer triángulos oblicuángulos	Conoce las características de los triángulos oblicuángulos	
		Trazar incorrectamente la relación entre los ángulos y los lados	Aplica correctamente entre los lados y los ángulos de un triángulo	
		Desconocer que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180^\circ$	Aplica la propiedad de los ángulos internos de un triángulo.	
Aplicar un conjunto de actividades de aprendizaje con el fin de crear las condiciones previas necesarias para el desarrollo de habilidades de lectura comprensiva y apropiación del objeto matemático: teorema del coseno.	Nivel de Fluidez lectora	Velocidad de lectura	Participación de los estudiantes en las actividades de lectura planteadas por el docente	Diarios de campo
	Niveles de lectura comprensiva	Comprensión lectora		
Errores y objetos matemáticos asociados al teorema del coseno	Triángulo	Lee y comprende textos sobre los objetos matemáticos asociados al Teorema del Coseno		Diarios de Campo
	Ecuaciones			
	Triángulos			
	Operaciones			
	Razones trigonométricas			
Implementar una estrategia de enseñanza que asista a los estudiantes en el desarrollo de las habilidades de lectura comprensiva que median la comprensión del teorema del coseno.	Estrategias de lectura asociada al aprendizaje del Teorema del Coseno	Nivel de Fluidez lectora	Utiliza adecuadamente las estrategias de lectura	Rejillas de seguimiento y Diarios de Campo
		Aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno	Aplica coherentemente el Teorema del Coseno	

Fuente: Elaboración propia, 2018.

## Procedimiento

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se decide configurar el diseño metodológico en tres etapas, las cuales se encuentran interrelacionadas a lo largo de este estudio. La primera etapa es la *caracterización*, tiene como tarea central caracterizar el estado inicial de los estudiantes en cuanto a las habilidades de la comprensión lectora y conocimientos previos que apalancan el aprendizaje del Teorema del Coseno. En la segunda etapa denominada *desarrollo*, se implementan un conjunto de actividades que representan los contenidos previos y las habilidades de comprensión lectora necesarias para el aprendizaje del Teorema del Coseno (Anexo 8), igualmente, en esta etapa se puso en escena una estrategia de aprendizaje para movilizar los conocimientos en torno al Teorema del Coseno que se describe en el Anexo 9, además, con ella se brindó la oportunidad al grupo de estudiantes de continuar extendiendo las habilidades de fluidez y comprensión lectora con la cuales desarrollaron aprendizaje autónomo.

La tercera etapa llamada *tratamiento* permitió analizar y tratar los datos obtenidos en las dos fases anteriores.

*La Caracterización* da solución al objetivo uno, el cual se estructura con base en la recolección de información cuantitativa a través de la aplicación de dos tipos de pruebas, un pretest cuyo conjunto de ítems representan la fluidez, la comprensión lectora y los conocimientos previos del Teorema del Coseno. Ahora bien, a fin de determinar el nivel de fluidez que tiene el estudiante y de comprensión lectora, se lo enfrenta a una lectura que hace parte del pretest, con el propósito de evidenciar el número de palabras leídas de manera correcta por minuto, además, se les pide que den respuesta a una serie de interrogantes abiertos (nivel crítico) y cerrados (nivel literal e inferencial), los cuales permiten determinar los niveles literal, inferencial y crítico. Adicionalmente, esta tarea dejó ver el desarrollo que tienen los estudiantes en cuanto al conjunto

de conocimientos previos para el aprendizaje del Teorema del Coseno (triángulo, ecuaciones, operaciones y razones trigonométricas).

Conviene señalar, que la puesta en escena del pre-test se realizó en el aula de matemática. Para ello, se utilizaron los computadores portátiles y el software Google Drive, así pues, los estudiantes de manera individual desarrollaron el conjunto de ítems en un período de tiempo controlado por las docentes investigadoras. Posteriormente, la información recogida a través de este medio fue analizada con base en el Formulario de Google.

*El desarrollo*, responde al objetivo dos y tres, que se abordan desde una perspectiva cualitativa con el fin de darle validez ecológica a los resultados. Este escenario, brinda la posibilidad de implementar un conjunto de actividades de aprendizaje, cuyo propósito es el de generar las condiciones necesarias para favorecer las habilidades de comprensión lectora y el fortalecimiento de los conocimientos previos que apalancan la construcción del objeto matemático Teorema del Coseno, para posteriormente desarrollar la estrategia de aprendizaje autónomo.

El diseño de las cinco actividades de alistamiento (Anexo 8) se realizó tomando como referencia las técnicas propuestas por Mayo (1994) de la siguiente forma:

La primera, consiste en una lista de palabras relacionadas con diferentes operaciones matemáticas entre las cuales se encuentra el nombre de las operaciones, sus términos y algunos valores numéricos con un punto de máxima visibilidad, cuyo objetivo es acostumbrar a los ojos a mirar este punto, sin pronunciarlo. La lectura se realiza de forma vertical y horizontal, midiendo el tiempo en cada una de ellas, sin mover la cabeza, sólo los ojos, mirar el punto y leer en bloque simultáneamente.

La segunda, relacionada con el concepto de ecuaciones y la técnica de lectura con líneas divisorias con el objetivo de evitar que la línea marcada afecte la lectura e insistir en el movimiento automático del ojo con un tiempo de 1 segundo por renglón, el cual es medido por el compañero en el transcurso de la lectura.

La tercera, se realiza con una lectura del libro guía de grado 8° “Todos por un nuevo país” página 74, esta retoma el concepto de ecuaciones nuevamente, debido a las dificultades que se presentaron en la comprensión de este, en la actividad anterior. Para ello se ejecuta la lectura dos (2) veces, midiendo el tiempo de velocidad en que se realizó la lectura.

La cuarta, es diseñada con una lectura sobre triángulo oblicuángulo, está en forma de triángulo con el objetivo de ampliar el campo visual y comparar los tiempos con el compañero, observando quien obtuvo menos tiempo para mejorar la marca obtenida.

Por último, se busca fortalecer el aprendizaje del concepto de razón trigonométrica del coseno a través de una lectura. Para ello, se mide el tiempo de lectura al compañero y luego, se realiza la lectura con el grupo en general por turnos y discutiendo cada párrafo.

Finalmente, cada actividad presenta una serie de preguntas de nivel literal, inferencial y crítico, las cuales deben ser resueltas por los estudiantes con base en la lectura realizada.

Consecuentemente, se pone en marcha la estrategia de aprendizaje autónomo en la que los estudiantes con el uso de estrategias de selección y análisis de información proveniente de la web, organizan una exposición temática que debe dar cuenta de la apropiación del objeto matemático.

Desde luego, en esta etapa se utilizan las técnicas e instrumentos descritos en el apartado anterior, como la observación participante, el diario de campo, a lo que se añade el producto final

(presentación en power point) realizado por los estudiantes, que da respuesta al objetivo tres del estudio.

*El tratamiento* permitió realizar el análisis de la información obtenida en esta investigación usando los métodos propuestos por Ortiz (2017), en este sentido, los datos cuantitativos fueron analizados mediante la interpretación del pre y el pos test de los conocimientos sobre el Teorema del Coseno, aplicando un estadístico que mide la evolución del aprendizaje denominado Ganancia de Hake. Los datos cualitativos como diarios de campo y preguntas abiertas de nivel crítico se analizaron mediante el uso de ATLAS.ti.

En este estudio se aplicó un pre-test y un pos-test, como se mencionó anteriormente. El análisis de los datos obtenidos se realiza por medio de la “ganancia normalizada” de Hake (2002), que indica la ganancia individual de aprendizaje de los estudiantes, la ganancia por pregunta y por cada uno de los conceptos sobre el Teorema del Coseno que asisten este estudio. Esta herramienta es ampliamente reconocida y aplicada en las matemáticas, permite evaluar el progreso de cada estudiante y la eficiencia didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje y las estrategias didácticas implementadas por el docente. Para evaluar el progreso individual se utiliza la fórmula y las indicaciones de sus variables, como se muestra en la siguiente expresión matemática.

$$G_{nor} = \frac{\text{postest \%} - \text{pretest efectivo \%}}{100\% - \text{pretest \%}}$$

Pretest efectivo%= Resultados correctos antes de la intervención.

Postest%= Resultados correctos después de la intervención.

Hake, (2002) considera tres rangos de ganancia normalizada:

G alto, cuando el resultado obtenido para  $G > 0.7$

G medio, cuando el resultado obtenido para  $0.3 < G < 0.7$

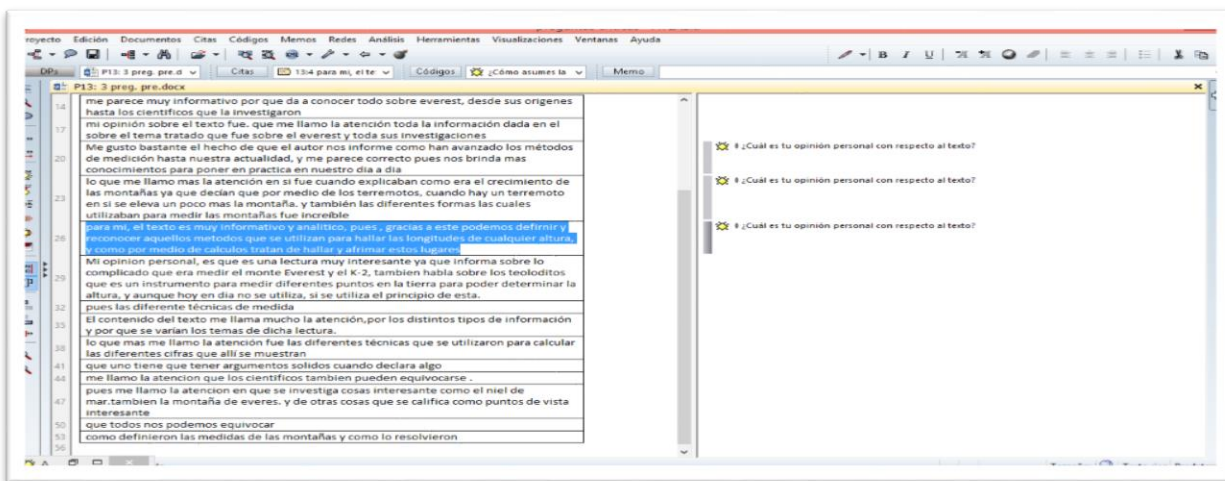
G bajo, cuando el resultado obtenido para  $G < 0.3$

Respecto a la eficiencia didáctica se plantea la siguiente expresión matemática:

$$\text{Eficiencia didáctica} = (\text{Promedio del postest \%} - \text{promedio del pretest\%}) / (100\% - \text{promedio del pretest\%})$$

Los datos cualitativos se analizaron con el Software ATLAS.ti, de esta forma se revisaron las preguntas de comprensión lectora del nivel crítico y la información contenida en los diarios de campo que se constituyó en una fuente para analizar la estrategia de aprendizaje autónomo, para ello se inserta la información obtenida como un nuevo documento en el programa, posteriormente realizando una codificación particular para las respuestas de nivel crítico y otra para los diarios de campo que muestra subcategorías específicas relacionadas con los información obtenida en la rejilla de valoración del aprendizaje autónomo (Anexo 6), en el administrador de códigos, lo que permite realizar un contraste con las respuestas de los participantes, que para este análisis en especial, se realizó para las respuestas iniciales y finales.

**Figura 7.** Preguntas insertadas en ATLAS.ti



*Fuente: Elaboración propia, 2018*



**Figura 8.** Resultados en ATLAS.ti

Nombre	Fundamentado	De...	Autor	Creado	Modifica...	Familias
¿Cómo asumes la pos...	4	0	Super	28/03/20...	28/03/20...	
¿Cuál es tu opinión p...	4	0	Super	28/03/20...	28/03/20...	
¿Qué pretende inform...	8	0	Super	28/03/20...	28/03/20...	

Fuente: Elaboración propia, 2018

Después de mostrar las herramientas utilizadas para tratar la información obtenida de los diferentes instrumentos del presente estudio, en la Tabla 13 se describen las actividades desarrolladas en cada una de las etapas de la investigación.

**Tabla 13**

*Actividades desarrolladas en cada una de las etapas de investigación*

Etapas		
Caracterización	Desarrollo	Tratamiento
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Revisión de la fluidez, comprensión de lectura y los saberes previos.</b></li> <li>• <b>Elaboración de un plan de acción para superar las dificultades presentadas por los estudiantes.</b></li> <li>• <b>Socialización de la propuesta a estudiantes y entrega de consentimientos para ser diligenciados por los padres de familia.</b></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicación de las actividades de alistamiento. Con el objetivo de desarrollar habilidades de fluidez usando diferentes técnicas descritas en el Anexo 8, en las que se insertaron los conocimientos relacionados con el Teorema del Coseno.</li> <li>• Actividad de trabajo cooperativo basada en los conocimientos adquiridos sobre el Teorema del Coseno, donde se privilegia la oralidad. Esta actividad incluyó:               <ul style="list-style-type: none"> <li>-Seleccionar y organización de información multimodal.</li> <li>-Argumentar estrategias de solución a un problema para tomar partido del concepto.</li> <li>-Socialización del producto final (presentación en power point).</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Caracterización mediante un post-test de los saberes adquiridos por los estudiantes sobre el Teorema del Coseno, la fluidez lectora (Velocidad) y los niveles de lectura comprensiva literal, inferencial y crítico.</li> </ul>

Fuente: Elaboración propia, 2018.

Finalmente, los datos recogidos aportan al análisis del proceso de investigación, los cuales deben encontrarse relacionados, considerando la recolección de datos cuantitativos y cualitativos, esta se inicia con la interpretación y análisis de estos.

### **Consideraciones éticas**

Para el presente estudio se protegen los derechos de los adolescentes y de los jóvenes, de modo tal que a cada estudiante participante se le entregó un consentimiento informado (Anexo 2), el que fue diligenciado por el adulto responsable, con los datos y firmas correspondientes que avalan su autorización, para el desarrollo de las diferentes actividades que se plantean en la investigación. Lo anterior se llevó a cabo basados en la resolución No. 008430 de 1993 del Ministerio de Salud y protección social (Ministerio de Salud, 1993) que manifiesta la importancia de especificar los aspectos éticos en las investigaciones en que participan seres humanos, lo que permite clasificar este estudio en riesgo mínimo, fundados en que no se realizó intervención de aspectos biológicos, sociales, fisiológicos o psicológicos de los participantes (Unesco, 2006).

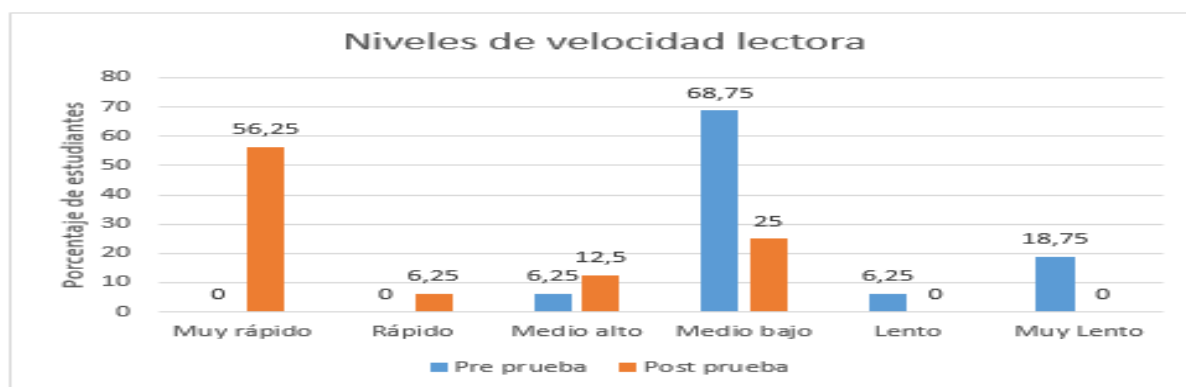
## Presentación y Análisis de resultados

En esta sesión, se presentan los resultados obtenidos después de aplicar las técnicas y los instrumentos de investigación. Los resultados se presentan teniendo en cuenta los objetivos de la investigación de la siguiente forma, primero los resultados de la caracterización, segundo los resultados de la aplicación de las actividades de alistamiento diseñadas y tercero, los resultados concernientes a las estrategias para promover la fluidez y la comprensión lectora con el fin de facilitar el aprendizaje autónomo del Teorema de Coseno.

### Resultados de la caracterización de la fluidez lectora

Como se mencionó, para caracterizar la fluidez se aplicó una prueba en dos momentos basada en el número de palabras leídas en un minuto. Los colorarios se presentan en la figura 9, según los datos referidos en el Anexo 10. En estos se observa que en la caracterización inicial, ninguno de los estudiantes se ubicó en el nivel muy rápido, ni rápido, la mayoría que corresponde a un 68.75% presentan un nivel medio bajo de lectura. Después de aplicar las diferentes técnicas de lectura se evidencia un incremento que sitúa una mayor cantidad de estudiantes (56.25%) en el nivel muy rápido y en los niveles más bajos como el lento o muy lento no se presentan estudiantes (Figura 9).

**Figura 9.** Resultados de los niveles de velocidad lectora

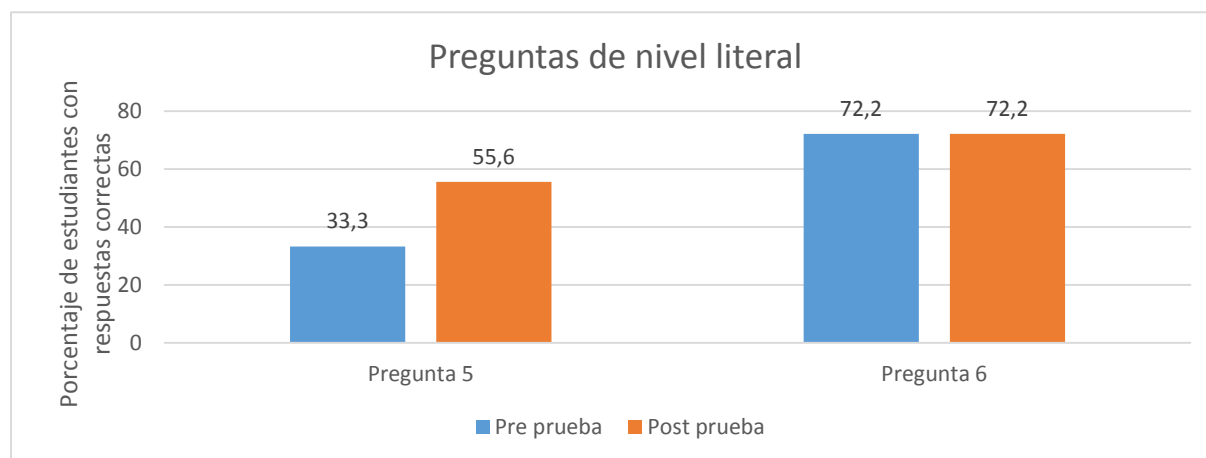


Fuente: Elaboración propia, 2018

## Caracterización de la comprensión lectora

El formulario en Google Drive permitió analizar los datos relacionados con los niveles de lectura literal e inferencial obteniendo que la pregunta 5 aumentó en 22.2% el porcentaje de aciertos de la prueba inicial a la final. Por su parte el porcentaje de aciertos de la pregunta 6 se mantiene (72.2%). Teniendo en cuenta estos datos, es posible decir que las estrategias implementadas favorecen las habilidades de comprensión en el nivel de la lectura literal, por cuanto los estudiantes fueron capaces de reconocer detalles (nombres, personajes, tiempos y lugar del relato), identificar la idea principal de un párrafo o del texto, tipificación de secuencias de hechos o acciones, así como el establecimiento de relaciones de causa o efecto (identificación de razones explícitas relacionadas con los hechos o sucesos del texto) CURN (citado por Martínez, 2017).

**Figura10.** Resultados de preguntas de nivel literal



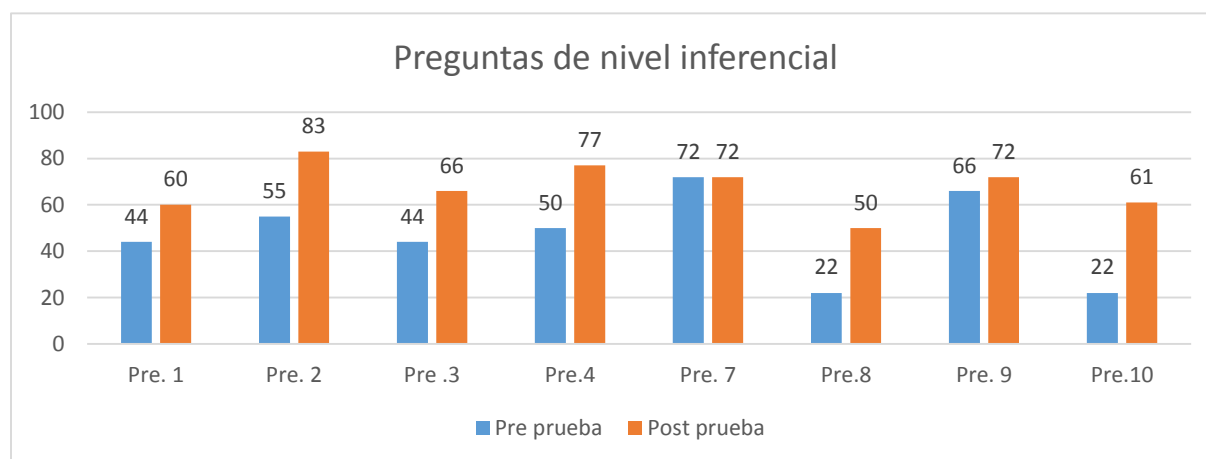
*Fuente: Elaboración propia, 2018*

Con respecto al nivel inferencial, la gráfica 3 muestra que en las ocho preguntas se incrementó el porcentaje de aciertos de la prueba inicial a la final. Resulta importante destacar que las preguntas 2, 8 y 10 obtuvieron un aumento significativo en los aciertos de 28%, 28% y

39% respectivamente; estos resultados permiten evidenciar el progreso de los estudiantes respecto a la lectura en su nivel inferencial por cuanto ellos, se les facilitó comprender por medio de relaciones y asociaciones el significado local o global del texto. CURN (citado por Martínez, 2017)

En este orden de ideas, la pregunta 7 no presentó ningún cambio de una prueba a la otra, al analizar su estructura se observa que los estudiantes se encontraron con una palabra nueva para ellos, que fue fácil para algunos tanto al inicio como al final, sin embargo, a otros se les representó como un obstáculo en las asociaciones que permiten comprender el texto.

**Figura11.** Resultados de preguntas de nivel inferencial



*Fuente: Elaboración propia, 2018*

Con la herramienta ATLAS.ti, se logró obtener que la pregunta 13 mostró un incremento de un 11% de aciertos, seguida por la pregunta 12 con 4% y finalmente la pregunta 11 que no tuvo incremento entre la prueba inicial y la final. Adicionalmente, es importante mencionar que la pregunta 11 mantuvo su porcentaje de aciertos 44%, el cual fue igual en la prueba final por la pregunta 13.

Con este panorama es factible decir que en este nivel el rendimiento de los estudiantes fue menor del 50% de aciertos, el que comparado con los resultados de los otros niveles puede considerarse bajo, poniendo de manifiesto que la emisión de juicios valorativos por parte de los estudiantes participantes, fueron poco exactos, poco aceptables y poco probables, CURN (citado por Martínez, 2017).

### **Resultados obtenidos con base en los conocimientos sobre el Teorema del coseno**

Inicialmente, los datos obtenidos fueron organizados y analizados con base en el número de preguntas acertadas que contestó cada estudiante en el pretest a razón del número total de estudiantes, que corresponde al pretest efectivo y luego el porcentaje representado en el postest para establecer el aumento con respecto a estas dos pruebas. Al realizar el análisis de los resultados obtenidos individualmente por los estudiantes, se observa que ninguno logró el 100% en el pretest, todos se ubicaron en un porcentaje menor del 40%, mientras que en el postest se ubicaron entre el 60% y el 95%; lo cual evidencia para este último, un desempeño más efectivo alcanzado por los estudiantes.

Cabe señalar que, el promedio del grupo (total de estudiantes) en el pretest efectivo fue de 33%, el promedio en postest fue de 79%, lo que llevó a obtener una eficiencia didáctica de 0.68, lo cual muestra que se logró una comprensión de rango medio, cercano a alto en el aprendizaje de los conocimientos sobre el Teorema del Coseno (Tabla 14).

**Tabla 14**

*Análisis de ganancia de Hake de acuerdo con el número de respuestas acertadas por estudiante*

<b>Estudiantes</b>	<b>Respuestas acertadas pretest</b>	<b>Pretest (%) efectivo</b>	<b>Respuestas acertadas posttest</b>	<b>Porcentaje posttest (%)</b>	<b>Ganancia normalizada</b>
1	7	35	16	80	0,69
2	7	35	18	90	0,84
3	9	45	18	90	0,82
4	9	45	17	85	0,72
5	8	40	16	80	0,66
6	8	40	14	70	0,5
7	6	30	13	65	0,5
8	7	35	16	80	0,69
9	8	40	15	75	0,58
10	4	20	14	70	0,62
11	4	20	15	75	0,68
12	4	20	12	60	0,5
13	4	20	15	75	0,68
14	4	20	19	95	0,93
15	6	30	15	75	0,63
16	8	40	19	95	0,91
<b>Promedios</b>	<b>6</b>	<b>33</b>	<b>16</b>	<b>79</b>	<b>0,68</b>

*Fuente: Elaboración propia, 2018*

Ahora se muestran, los resultados obtenidos del análisis por preguntas con el fin de observar el total de respuestas correctas en el pretest y posttest, cuyo valor alcanzado en la ganancia normalizada demuestra que en las preguntas 2 y 13 se logró una ganancia de rango bajo. Con esto se evidencia que no evolucionó la construcción de algunos conceptos relacionados con operaciones matemáticas y con las razones trigonométricas.

Tomando como referente la pregunta 2 se puede deducir que para su desarrollo se requiere un adecuado dominio del nivel de lectura inferencial, lo que para este caso no ocurrió, debido a que la mayoría de los estudiantes mostraron dificultad para inferir que debían multiplicar por tres que fue el número de ramos (Anexo 7).

Con respecto a la pregunta 13, los estudiantes muestran dificultad para definir los elementos constitutivos de los triángulos, sus propiedades y el uso de vocabulario propio de las matemáticas relacionado con estos (congruencia, Ángulo).

En este análisis, se observa que el promedio de ganancia para las preguntas relacionadas con los conocimientos sobre Teorema del Coseno fue de 0.63, lo que significa que la evolución del grupo se ubica en un rango medio con respecto al aprendizaje de dicho objeto matemático (Tabla 15).

**Tabla 15**

*Análisis de ganancia de Hake relacionado con el número de estudiantes que respondieron acertadamente por pregunta*

Pregunta	Número de estudiantes pre-test	Porcentaje pretest efectivo (%)	Número de estudiantes en post-test	Porcentaje postest (%)	Ganancia normalizada
1	3	17.6	11	68.8	0.62
2	7	41.2	9	56.3	0.26
3	2	11.8	8	50	0.43
4	8	47	14	87.5	0.76
5	7	41.2	13	81.3	0.68
6	9	52.9	15	93.8	0.87
7	6	35.3	14	87.5	0.8
8	3	17.6	13	81.3	0.77
9	8	47.1	15	87.5	0.76
10	7	41.2	16	100	1
11	6	35.3	15	93.8	0.9
12	9	52.9	12	75	0.47
13	9	52.9	8	50	-0.06
14	8	47	15	93.8	0.88
15	2	11.8	16	100	1
16	6	35.3	16	100	1
17	6	35.3	14	87.5	0.80
18	4	23.5	16	100	1
19	7	41.2	14	87.5	0.78
20	1	5.9	9	56.3	0.53
Promedio	N/A	30	N/A	76.32	0.63

*Fuente: Elaboración propia, 2018*

Para terminar, el seguimiento a la evolución de los conocimientos sobre el Teorema de Coseno se realiza un análisis tomando como referente las cuatro subcategorías de análisis que permiten definir este objeto matemático (Tabla 12). La primera, se refiere a los triángulos con



una ganancia de 0.79, lo que significa que el progreso fue de un rango alto; la segunda es el concepto de ecuaciones con un resultado de 0.51; la tercera, está relacionado con operaciones con una ganancia de 0.53; la cuarta corresponde a las razones trigonométricas con una ganancia de 0.91, siendo esta de rango alto de ganancia, Finalmente la construcción del objeto matemático Teorema del Coseno con un valor de 0.53, lo que simboliza que estos se encuentran en un rango medio, de esta forma, con base en lo anterior el promedio de la ganancia normalizada es de 0.654. Indicando que el aprendizaje de todos los conocimientos acerca del Teorema del Coseno se ubicó en rango medio, por tanto, la evolución del aprendizaje no fue la más efectiva. Cabe resaltar que, aunque la evolución de los aprendizajes no se ubica en un alto rango está muy cercano a él (Tabla 16).

**Tabla 16**

*Análisis de ganancia de Hake de acuerdo con las categorías según Errores y objetos matemáticos asociados al Teorema del Coseno*



<b>Categorías</b>	<b>No. De preguntas de conocimientos (promedio)</b>	<b>Pre- test efectivo %</b>	<b>Post-test %</b>	<b>Ganancia normalizada</b>
Triángulos	8- 10- 11- 12- 13- 14- 15- 16	34.56- 36.76	86.73	0.79
Ecuaciones	1- 5-7 -9- 17	30.58	66.22	0.51
Operaciones	2- 3- 4- 6	39.725	71.9	0.53
Razones trigonométricas	18-19	32.35	93.75	0.91
Teorema del coseno	20	5.9	56.3	0.53
Promedio		28.328	73.48	0.654

*Fuente: Elaboración propia, 2018*

### **Actividades de alistamiento, creación de un ambiente para el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno.**

La información que aquí se registra es tomada de los diarios de campo que fueron diligenciados durante el acompañamiento en cada una de las actividades propuestas para esta parte de la investigación. Estos fueron diligenciados como se muestra en la tabla 17.

**Tabla 17***Resultados diarios de campo.*

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA LIBARDO MADRID VALDERRAMA</b>  <b>SEDE: PRINCIPAL</b>	
<b>FICHA DE REGISTRO DEL DIARIO DE CAMPO</b>		
<b>DOCENTES: YENNY ARAMBURO Y VICTORIA EUGENIA CORREA</b>		
<b>ÁREA: MATEMÁTICAS</b>		
<b>FECHA: 24-11-2017</b>		
<b>No. DE HORAS: 2</b>		
<b>GRADO: 10-6</b>		
<b>ESTRUCTURA DE TRABAJO:</b> Trabajo colaborativo en equipos de tres (3) estudiantes.		
<b>OBJETIVO:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Socializar y argumentar la pertinencia y utilización de la información encontrada.</li> </ul>		
<b>ASISTENCIA</b>	<b>NIVEL DESCRIPTIVO</b>	<b>NIVEL REFLEXIVO</b>
La actividad se realiza con 16 estudiantes de los 24.	La clase inicia las 2:20 p.m. La docente explica a los estudiantes las pautas para las exposiciones. Luego solicita a los estudiantes que se organicen los equipos para la exposición, la cual será proyectada en el tablero con el VIP (Video Proyector Interactivo). El primer equipo resuelve un problema donde falta un lado, otro equipo halla el ángulo. Finalmente, el último equipo propone un problema donde no es posible aplicar el Teorema del Coseno y pregunta a sus compañeros: ¿Para hallar este lado del triángulo es posible aplicar el Teorema del Coseno?	Es importante que la docente mencione las recomendaciones que debe conocer un expositor para la comprensión por parte de su auditorio. Se observa que los estudiantes participan activamente de las preguntas que realizan los expositores acerca del tema, mostrando conocimiento y manejo acerca del mismo.

	<p>Algunos estudiantes responden que sí, otros que no.</p> <p>El estudiante les pregunta ¿por qué? Y algunos dan a conocer sus argumentos. A lo que el expositor cierra diciendo que no porque solo se tiene dos lados y un ángulo.</p> <p>Algunos estudiantes se muestran un tanto tímidos inicialmente, pero a medida que los equipos exponen se observa dominio del tema.</p> <p>Además, los expositores muestran manejo del lenguaje matemático, tales como: la notación de ángulos, lados y la correspondencia en cuanto a sus diferentes representaciones.</p> <p>En cuanto a las presentaciones realizadas en Power Point por los equipos de estudiantes, se observa un trabajo estructurado, fundamentado y de excelente calidad por parte de los estudiantes.</p>	
<b>OBSERVACIONES:</b>		

*Fuente: Elaboración propia, 2018.*

El diario de campo favoreció la reflexión sobre la praxis, llevando a la toma de decisiones que permitió seleccionar elementos prácticos para la creación de condiciones que promueven un ambiente propicio para el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno.

Del análisis anterior, es posible decir que para concertar un ambiente propicio para el desarrollo de habilidades de comprensión lectora y la promoción del aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno, se requieren las siguientes actividades que surgen de la información recolectada en los diarios de campo y las rejillas de seguimiento del aprendizaje autónomo: (a) trabajo cooperativo ; (b) promoción de un ambiente de confianza en el que el estudiante pueda trabajar; (c) establecimiento de acuerdos para la convivencia y el desarrollo del trabajo; (d) activación de conocimientos previos, recordar temas y actividades anteriores; (e) apropiación de habilidades de comprensión lectora y (f) acompañamiento y guía del docente.

Algunos hallazgos generales que se observaron se describen como sigue:

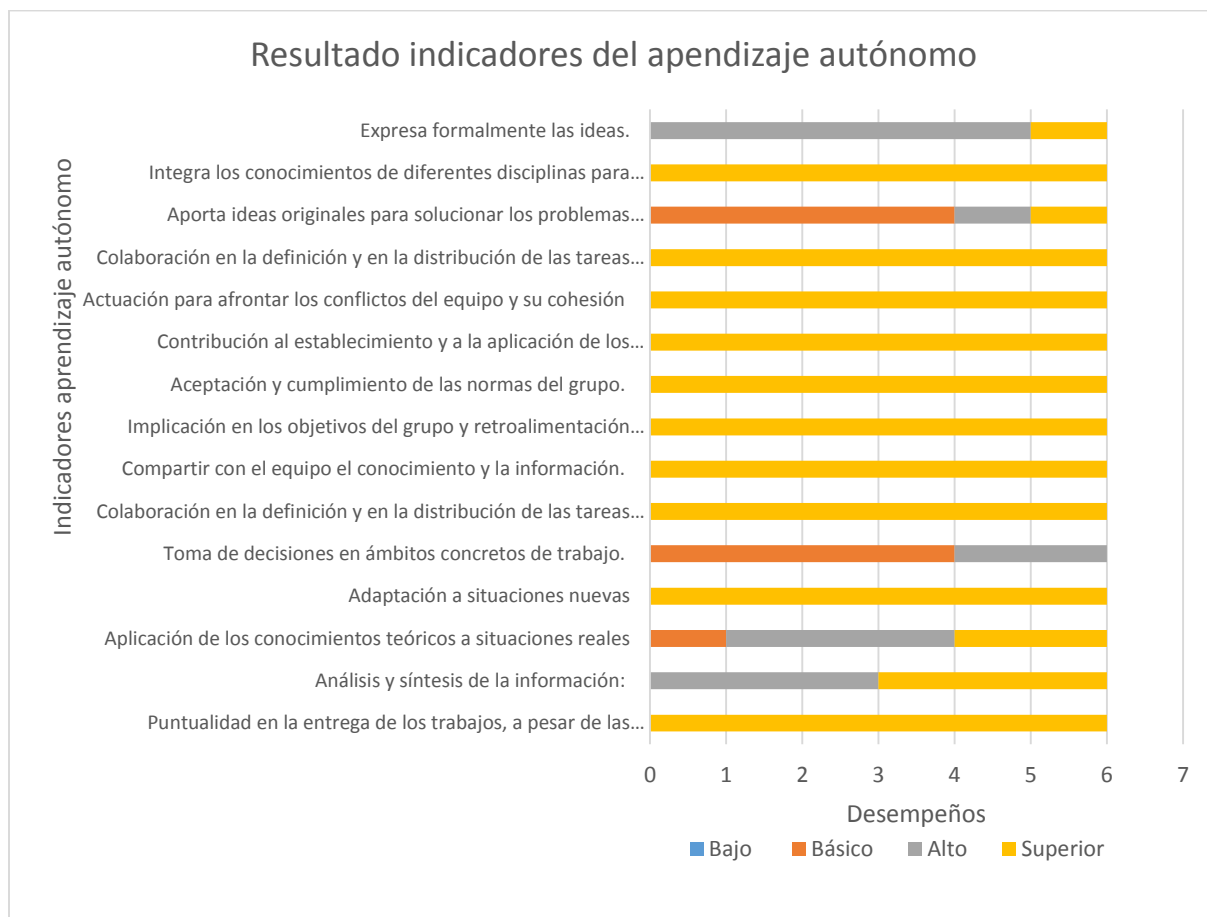
- Los estudiantes presentan dificultad para leer números y organizar conjuntos según características comunes, para identificar las propiedades en el triángulo oblicuángulo.
- Se observa compromiso en la realización del trabajo grupal e individual, así como, seguimiento a las instrucciones. Algunos estudiantes requieren indicaciones nuevamente y para ello le preguntan a la docente o a sus compañeros.
- Se usan estrategias de adecuación para el ambiente de aprendizaje como ejemplo se presentaron dos situaciones en una de ellas, dos estudiantes asisten tarde, se les organiza en parejas dando las indicaciones respectivas para desarrollar la actividad, en la otra, una pareja de estudiantes son reubicadas en diferente lugar, con el objetivo de que realicen el trabajo solos para que se produzca el aprendizaje sin copiarle a los compañeros que se encuentran a su lado, evidenciando en ellos motivación al darse cuenta que logran aprender a través de la lectura y la solución de ecuaciones y problemas aplicando dicho concepto.
- Los estudiantes buscan a la docente como guía y apoyo, para este caso, uno de los estudiantes pregunta ¿profe realicé bien el proceso para despejar la ecuación? El docente revisa y aprueba el proceso realizado.
- En general, se observa a los estudiantes comprometidos y motivados, más aún cuando sienten que comprenden la lectura y los procesos a desarrollar a partir de ella. Además, los estudiantes se muestran con mayor dominio de los diferentes conceptos y la fluidez de la lectura en cuanto a la velocidad y la comprensión.
- Se observa que los estudiantes dominan la ubicación de los ángulos en el eje de positivo de X para ángulos menores y mayores de  $90^\circ$  pero presentan dificultad en deducir el valor de X.

- Los estudiantes usan la circunferencia goniométrica, para definir la razón por la cual el coseno es positivo o negativo para ciertos ángulos, unos consultan por internet, otros recurren al docente o compañero.

### **Estrategia para el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno**

En la gráfica se exponen los resultados de acuerdo con la observación realizada durante el proceso de aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno. En esta se muestra que los indicadores ubicados en nivel superior fueron diez, los cuales hacen referencia a la disposición que presentan los estudiantes en cuanto a la realización del producto final a través del trabajo individual y en equipos cooperativos y al desarrollo de niveles de pensamiento superior en el aprendizaje del objeto matemático. Por otro lado, se muestra que tres indicadores se situaron en los niveles entre bajo y básico, estos corresponden a la formalización del pensamiento, es decir que los estudiantes aún presentan falencias en cuanto a este aspecto.

**Figura 12.** Resultados indicadores del aprendizaje autónomo



*Fuente: Elaboración: Propia (2018)*

## Discusión de los resultados

### Caracterización de la fluidez, comprensión lectora y conocimientos sobre el Teorema del Coseno

En el legado de Piaget y Vygotsky coinciden en la idea de que el desarrollo cognoscitivo no es el resultado de la adquisición de respuestas sino de un proceso de construcción activa por parte del sujeto (Rodríguez, 1999), para ellos el conocimiento es una construcción producto de la actividad del sujeto en su interacción con el medio ambiente físico y social. La escuela, como institución social, cumple la importante función de estructurar experiencias para el desarrollo de capacidades cognitivas de orden superior, como las habilidades de comprensión lectora. Bajo estas concepciones estas habilidades deben ser practicadas constantemente por los estudiantes para mejorar no sólo su desempeño académico, sino para participar como miembros activos de la sociedad, pues de esta depende su capacidad en la resolución de problemáticas de su entorno. Esto para interpretar, reconocer, analizar y hacer inferencias eficaces a partir de la información que se le provee, dando a conocer de manera crítica sus opiniones.

Consecuentemente, los resultados de esta investigación permiten abordar algunas precisiones relacionadas con las habilidades de la fluidez, la comprensión lectora y el aprendizaje autónomo del objeto matemático Teorema del Coseno.

Respecto a la caracterización de la velocidad y la comprensión lectora, se evidenció como las actividades desarrolladas develaron que el 68.75% de los estudiantes presentó un nivel de velocidad medio bajo, que puede considerarse no coherente con respecto a la velocidad que teóricamente deberían tener, para una fluidez que les facilite la comprensión lectora. Estos ritmos de lectura no permiten que el estudiante interprete mediante la retención del número de palabras que un texto le exige para su comprensión, por ejemplo en una de las actividades desarrolladas

en la que se les pedía a los estudiantes que acorde con la lectura realizada, organizaron un conjunto de palabras con una característica en común (operaciones matemáticas), mostraron algunas dificultades en la recuperación de las palabras que se encontraban en la lectura, por consiguiente para realizar el ejercicio debían repetir varias veces la lectura, estas habilidades de una u otra forma están relacionadas con la fluidez lectora.

Para el estudio de las matemáticas esta característica de la fluidez lectora es esencial, puesto que al revisar la comprensión derivada de los textos matemáticos que durante la investigación leyeron los estudiantes, se observa como inicialmente el nivel de comprensión era mínimo para los tres niveles (literal, inferencial y crítico) , pero al final se observó una mejora en el desarrollo de las habilidades de fluidez y comprensión lectora , que como lo expresa Near (2014) la fluidez de lectura fue decisiva para que los estudiantes resolvieran situaciones matemáticas planteadas en cada una de las actividades que desarrollaron, al igual que para resolver el test de conocimientos sobre el Teorema del Coseno, reafirmando la necesidad de tener una adecuada fluidez, tanto para la resolución de problemas matemáticos como para la comprensión de lectura. Acorde con estas precisiones en este trabajo de investigación los estudiantes aún en educación media presentan dificultades de fluidez y comprensión lectora. De fluidez porque leen de manera lenta un texto (por ejemplo, los estudiantes en estas condiciones no se sentían cómodos al leer porque conocían sus propias debilidades en este aspecto), algunos de ellos incluso no logran leer una frase completa sino que leían palabra por palabra lo que no permite comprender un texto. Con respecto a la comprensión, los estudiantes en su mayoría no poseen los procesos conceptuales necesarios para el desarrollo de los diferentes niveles.

Algunos de ellos, solo responden a preguntas de nivel literal, en las cuales se encuentre la información explícita en el texto, además, difícilmente poseen la capacidad de reconocer la idea



principal del texto, de igual manera, cuando se trata de inferir, para lo cual deben utilizar sus saberes previos y relacionarlos con otra información, presentan dificultad al hacerlo. Situación que obstaculiza el aprendizaje de conceptos matemáticos, por ser este el nivel fundamental para el aprendizaje en esta disciplina. Por ello, difícilmente alcanzan a aplicar lo que encuentra en el texto para interpretar y solucionar problemas.

De esta manera, a medida que los docentes incorporen estrategias para el desarrollo de habilidades de lectura a través del uso de textos que contienen conceptos relacionados con el objeto matemático, se observa que se activa en los estudiantes los conocimientos previos.

En relación con los conocimientos previos (conectado con las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje sobre el Teorema del Coseno) es indispensable activarlos para la construcción de un nuevo concepto matemático, debido a que este tiene un fundamento básico a través del cual será posible el aprendizaje.

En el pretest se observó que los estudiantes obtuvieron resultados poco satisfactorios en las preguntas 1, 3, 8, 15, 18 y 20, que corresponden a los conceptos de ecuaciones, operaciones, razones trigonométricas y Teorema del Coseno; este último presentó, tan sólo un estudiante que respondió correctamente la pregunta relacionada, situación que puede justificarse en el hecho de que los estudiantes no estaban familiarizados con este concepto matemático, a diferencia de las otras preguntas en las que se observa de 2 - 4 estudiantes que respondieron acertadamente, cantidad que es pequeña, pero demuestra que los estudiantes tenían algunos conocimientos previos, que después de realizar el post test fueron activados con las estrategias de lectura que incluían textos para abordar los conceptos mencionados, lo anterior se relaciona con lo planteado por Vacca y Vacca (citados por Barton, Heidema, & Jordan, 2002) quienes afirman que el conocimiento previo de un estudiante es el recurso más importante para aprender con textos, por

cuanto activan el contenido anterior del conocimiento. Los conceptos matemáticos se construyen con el andamiaje de saberes desde la educación básica hasta llegar a la educación superior y en ocasiones hay conocimientos que no se retoman continuamente, los cuales tienden a olvidarse por no encontrarse en la memoria de trabajo. Con respecto a esta disciplina existen diferentes tipos de representaciones semióticas que los docentes no abordan de manera frecuente desde la educación inicial, es decir, que para los estudiantes son conceptos desconocidos porque se relacionan con otras representaciones. Por consiguiente, es indispensable caracterizar al estudiante acerca de los conocimientos necesarios para avanzar a un nuevo aprendizaje, el cual tendrá la posibilidad de reconstruir.

Como consecuencia, de lo planteado anteriormente es posible mencionar cinco aspectos que caracterizan la velocidad, la comprensión lectora y los conocimientos relacionados con el Teorema del Coseno.

Los estudiantes que no poseen habilidades de fluidez de lectura, difícilmente tendrán la capacidad para desarrollar habilidades de comprensión en sus diferentes niveles (literal, inferencial y crítico). Estos estudiantes que no logran comprender el lenguaje natural porque escasamente dominan vocabulario básico, difícilmente están en capacidad de interpretar el lenguaje simbólico que supone un vocabulario especializado para las matemáticas.

Los saberes previos son fundamentales para la construcción del nuevo concepto matemático, por lo tanto es indispensable que el docente los retome, con el objetivo de facilitar el aprendizaje. Esto se evidencia en este trabajo, al considerar los errores recurrentes presentados por los estudiantes de acuerdo a la literatura encontrada y la experiencia de varios años de enseñanza de las docentes investigadoras con respecto al aprendizaje del Teorema del Coseno.

Así pues, a lo largo de varios años de experiencia y en el transcurso de esta investigación, se percibe que los docentes en su mayoría dan por hecho que los estudiantes traen el aprendizaje de conceptos básicos. Sin embargo, en ocasiones no es así, algunos de ellos han venido presentando dificultades bien sea por obstáculos a nivel cognitivo o afectivo (Socas, 1997).

Por este motivo, es importante que el docente caracterice a los estudiantes para que inicien un nuevo conocimiento, después de superar los conceptos que anteceden a él. De acuerdo, a la experiencia vivida en esta investigación, se alcanzan mejores resultados porque el estudiante no tiene restricciones de tipo cognitivo para adquirir el nuevo saber y posiblemente se eliminen las de tipo afectivo, puesto que, el hecho de comprender y aplicar un concepto matemático les proporciona seguridad, incluso algunos, se expresaban sorprendidos “entendí”, “soy capaz”, “yo te explico” cuando algún compañero comentaba que no entendía.

### **Creación de condiciones para el desarrollo de la fluidez, comprensión lectora y aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno**

Piaget (1979) en uno de sus postulados afirma que la interacción social es indispensable para el desarrollo de la lógica en el niño, habilidad que es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas. Esta interacción se promueve en el aula mediante la conformación de parejas o grupos de trabajo que al compartir el desarrollo de la actividad, como lo expone Piaget (1979) se facilita y promueve el intercambio de ideas, las cuales permiten generar diferentes posibilidades para comprender un texto, siendo de vital importancia la participación del docente, quien orienta la conformación de estos, dado que la forma como se propone la actividad grupal, en la presente investigación permite la construcción activa del conocimiento.

En este orden de ideas, durante el momento de alistamiento los estudiantes conformaron parejas, en este momento no se observaron dificultades, puesto que, ellos venían trabajando en

esta forma desde años anteriores; como una propuesta estratégica de la institución. Lo anterior, suscita un ambiente de amabilidad, disposición y compromiso para el desarrollo de las actividades. Por otro lado, la docente monitorea, verificando que los estudiantes estén trabajando en lo acordado, lo que hace que ellos se sientan acompañados, y aprovechen su acompañamiento para realizar preguntas específicas.

Adicionalmente, la docente con sus acciones promueve un ambiente de confianza, donde no importa que los estudiantes se equivoquen. Ellos por su parte se muestran atentos a las explicaciones, esto es evidente puesto que, todos están expectantes y preguntando lo que no entienden.

De acuerdo con lo anterior, desde la perspectiva vygotskiana, la efectividad de la escuela como mediadora en la construcción de niveles superiores de pensamiento dependerá de la forma en que los encargados de la educación manejen los contextos, las herramientas y las interacciones implicadas en la actividad constructiva. Con estas ideas, en el alistamiento fue posible que las docentes investigadoras establecieran acuerdos o retomaran los acuerdos convivenciales para un desarrollo armónico de la clase, además de socializar el objetivo de la clase y el tiempo del que disponen para las actividades propuestas. Ello con el fin de que los estudiantes aprendan a manejar el tiempo.

Igualmente, Vigotsky (1995) propone iniciar las clases, abordando los conceptos de sesiones anteriores, para fortalecerlos y construir los nuevos conocimientos. Otro aspecto interesante que surge durante este proceso, es la organización de los grupos de trabajo cooperativo. En esta, se verifica que durante las actividades, los estudiantes que terminan primero le colaboran a sus compañeros para comprender la información y culminar la actividad. Para ello, la docente les recomendó que siempre realizaran preguntas a sus compañeros con el fin

de llevarlos a deducir la respuesta, tales como: ¿Quién es  $n$ ? ¿Qué se debe hacer con  $n$ ? para referirse a la pregunta No. 4 de la guía (Anexo 9).

Lo anterior, es soportado por el legado de Piaget y Vigotsky (citado por Rodríguez, 1999) quienes expresan que es indispensable promover la cooperación y la colaboración en el proceso de enseñanza, este interés impulsa el desarrollo de estrategias y técnicas que frecuentemente entran en conflicto, por un lado, con las ideas de competencia y autosuficiencia que hemos alimentado en nuestros estudiantes y, por otro, con la idea de que el resultado del aprendizaje debe evaluarse como un producto individual. Lo que llevó a respetar los ritmos individuales en la adquisición de los aprendizajes, en este sentido, Piaget afirma que cada niño trae conocimientos propios, que lo diferencia de los demás, permitiendo que aprenda fácilmente en determinadas áreas del conocimiento. En contraposición, otros conocimientos tendrán mayor resistencia para ser asimilados.

Por lo tanto, en el momento de alistamiento fue necesario tener presente el objetivo de aprendizaje que se plantea el docente, este fue el fortalecimiento de las habilidades de fluidez y comprensión lectora, así como el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno. En relación con el primero, la estrategia se constituyó en una competencia, pues consistió en que cada actividad presentaba una lectura, la cual era cronometrada por el compañero del grupo (parejas), ocasionando mejorar la velocidad de lectura, un punto clave para la fluidez. Para el segundo la temática abordada en cada momento, fueron aspectos relacionados con el Teorema del Coseno. Así pues, los estudiantes retomaron las lecturas varias veces, dado que la comprensión de estas no es inmediata.

Otra forma de abordar la lectura fue en el momento en que la docente hace énfasis en los propósitos de la lectura con el objetivo de que los estudiantes tengan en cuenta lo que

encontrarán y buscarán en ella. La lectura se realiza por turnos teniendo en cuenta la fluidez de la lectura (velocidad, calidad y comprensión). Cada párrafo es retomado para verificar la comprensión a partir de algunas preguntas tales como:

D: ¿Cuál es el propósito de la lectura?

E1: Aprender acerca de las razones trigonométricas.

E2: la razón trigonométrica del coseno

D: ¿Cuáles son los nombres de los lados del triángulo rectángulo?

E1: Señalamos los nombres de los lados con letras minúsculas

Posteriormente, los estudiantes se reúnen en grupos de tres estudiantes, discuten la última pregunta y desarrollan la actividad propuesta de acuerdo con la lectura.

Este orden de acciones se enmarca dentro de la concepción del proyecto PISA, que prioriza la competencia de comprensión lectora, definida como “La capacidad individual para comprender, utilizar y analizar textos escritos con el fin de lograr sus objetivos personales, desarrollar sus conocimientos y posibilidades y participar plenamente en la sociedad”(OECD, 2009, p. 8 ) desde esta perspectiva se observó cómo a medida que los estudiantes avanzaron en la comprensión de los textos, se iban apropiando de los nuevos conceptos, los cuales compartían con sus compañeros, explicando unos a otros.

Acorde con todo lo descrito en las líneas anteriores del presente apartado, las condiciones para el aprendizaje autónomo se resumen en la Figura 13.

**Figura 13.** Condiciones necesarias para el aprendizaje autónomo

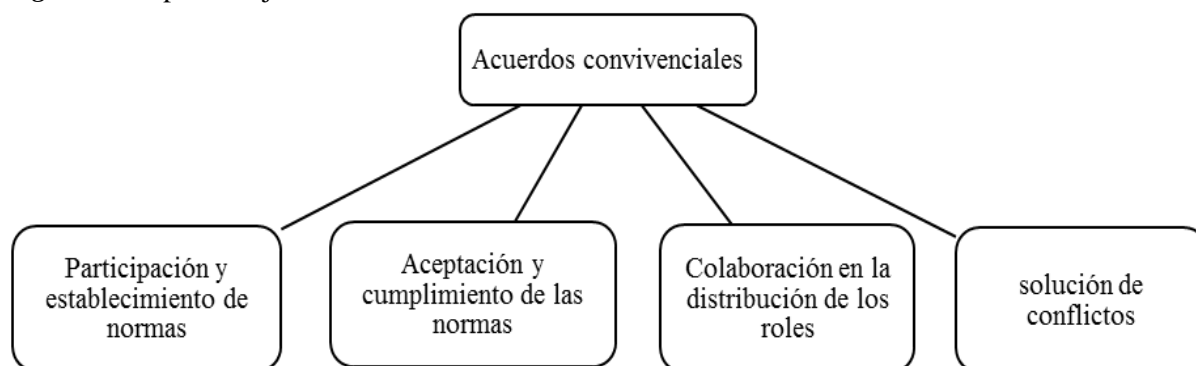


*Fuente: Elaboración propia (2018)*

### **Contribución al aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno**

El aprendizaje autónomo acorde con las ideas de Mateos (2001), es estratégico por permitir la toma de decisiones, elemento clave para el aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos. Teniendo como referente las necesidades que se presentan en la apropiación del objeto matemático Teorema del Coseno, se pensó en una estrategia que posibilitara a los estudiantes fortalecer los conocimientos que se relacionan con este, privilegiando la autonomía para aprender, antes de las clases dirigidas por el maestro. Esta estrategia, propuesta para los estudiantes de grado décimo de la IELMV, promovió la autodirección en función de las metas o propósitos planteados, lo que requiere el establecimiento de acuerdos de convivencia que permitan al estudiante trabajar de forma individual y en grupo, que de acuerdo al análisis realizado se describen en la Figura 14. Estos acuerdos promovieron acciones que fortalecen el aprendizaje de los estudiantes.

**Figura 14.** Aprendizaje Autónomo - Acuerdos convivenciales



*Fuente: Elaboración propia (2018)*

En este orden, los estudiantes fueron retados a través de una serie de preguntas que debían resolver usando las diferentes técnicas de lectura que se establecieron durante el alistamiento. Así los estudiantes debieron seleccionar, analizar, organizar información concerniente al Teorema del Coseno, enlazado con la realidad. Para ello se asumen las Competencias para el manejo de la Información (CMI), los estudiantes usaron estas habilidades para desarrollar la tarea asignada, mediante la búsqueda por Google, según lo expuesto por López (2006) era posible usar diferentes modelos para el manejo de información, teniendo en cuenta las observaciones de campo, especialmente el proceder de los estudiantes, fue posible establecer dos modelos de los reportados en la literatura, el modelo Gavilán (Colombia) y el modelo Irving (Reino Unido), de manera particular se observan mezclas de estos dos a la hora de manejar la información, siendo importante tener en cuenta que a los estudiantes se les retó o motivó al desarrollo de esta actividad mediante el planteamiento de preguntas (problemas) establecidas por las docentes investigadoras, lo que pudo haber direccionado la elección del modelo a seguir. Por ejemplo, el Grupo 1, manejo la información según el modelo Gavilán, analizar la pregunta inicial (propuesta por las docentes), se continuó, sin la formulación de un



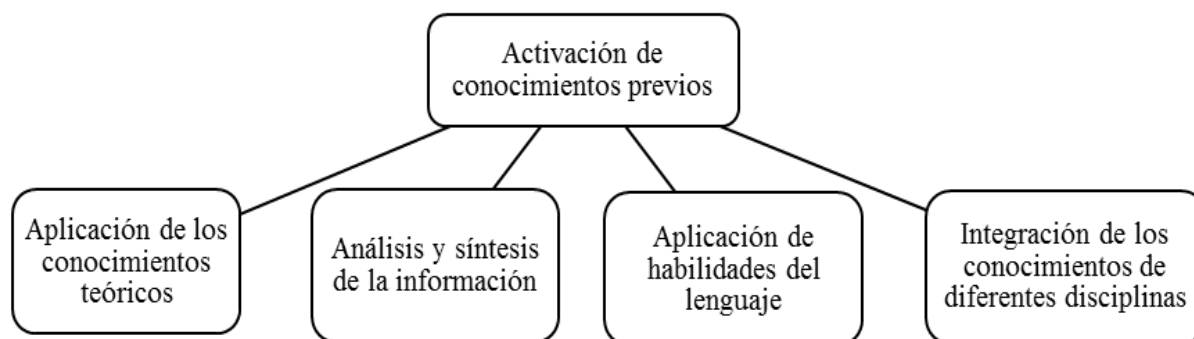
plan, con el paso a evaluar la pregunta acorde con el modelo Irving, siguiendo posteriormente la secuencia del modelo Gavilán (Tabla 5).

De este modo, en la parte de manejo de información, se observó la prevalencia de la búsqueda de individual, que luego fue compartida con los compañeros, con respecto a la técnica del uso de las TIC, fue posible evidenciar en los estudiantes un uso adecuado de los artefactos tecnológicos como las TDA (Computador del estudiante) igualmente, utilizaron el motor de búsqueda de Google sin mayores contratiempos.

Desde la misma perspectiva, los estudiantes avanzaron en el desarrollo de su tarea encaminada al aprendizaje autónomo siguiendo las etapas descritas por (Martínez, 2014). En este sentido, una de las docentes investigadoras basada en una presentación en power point, explicó a los estudiantes la estrategia a seguir, según los comentarios de los estudiantes, dicha explicación fue tan clara que les permitió avanzar en el proceso, lo que permite decir en acuerdo con Mateos (2001) que fue explicación directa, dando cuenta de las estrategias usadas en el proceso de auto aprendizaje de los estudiantes, quienes partiendo de éstas, regulan el desarrollo de la actividad.

De igual manera, durante la explicación, se expusieron por parte de la docente algunos conocimientos declarativos, enfocados en los conceptos alcanzados durante el alistamiento. Conviene subrayar que, las actividades de aprestamiento facilitaron el desarrollo del aprendizaje por cuanto las condiciones creadas favorecieron la autonomía del estudiante. Así que, lo procedimental y lo condicional fue desarrollado por los estudiantes a partir de las pautas mínimas realizadas durante esta primera etapa (Figura 15).

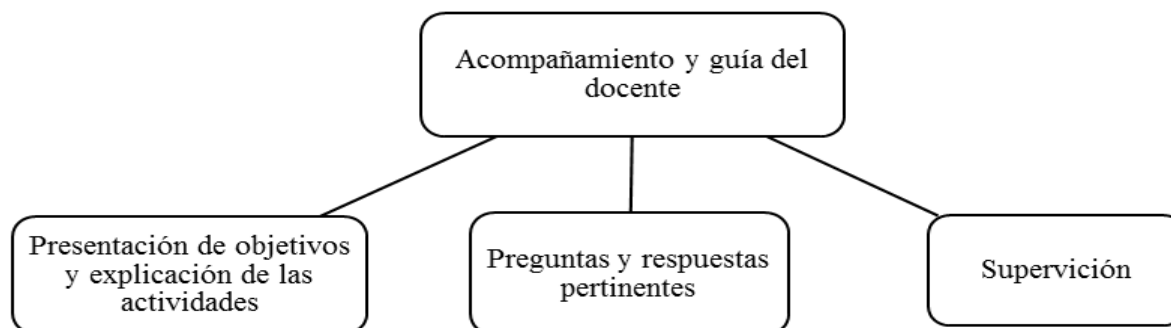
**Figura 15.** Aprendizaje Autónomo - Activación de conocimientos previos



*Fuente: Elaboración propia*

Luego, se adelantó una etapa, donde la docente actuó como guía, esta se realizó con la intervención de las docentes actuando como orientadoras del estudiante en el camino hacia la autorregulación, lo cual, se evidencia en la forma como organizaron la información en las presentaciones en Power point. La característica distintiva de esta práctica fue el diálogo entre profesor y estudiante, cuyo fin fue proporcionar ayuda y guía suficientes para alcanzar metas que se encuentran fuera de sus posibilidades sin esa asistencia. Esto permitió que los estudiantes después de tener la información establecieran inferencias y conjeturas para crear las conclusiones de sus trabajos (Figura 16).

**Figura 16.** Aprendizaje Autónomo-Acompañamiento y guía del docente

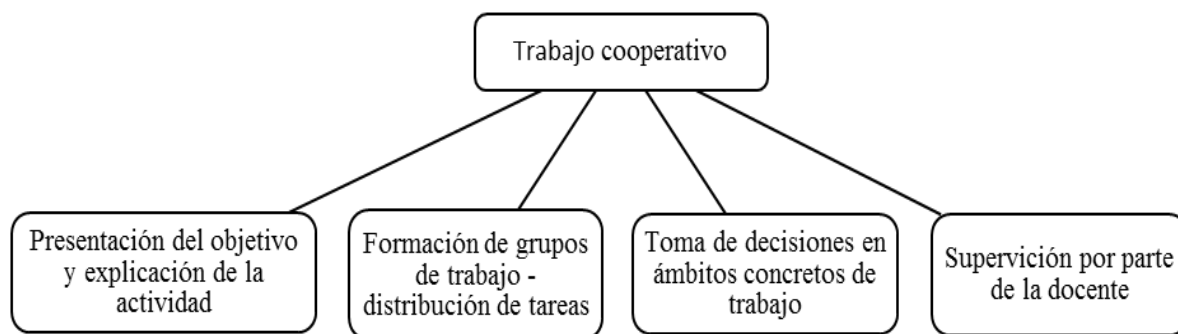


*Fuente: elaboración propia (2018)*

Por último, la práctica individual-cooperativa, esta resultó del trabajo por equipos cooperativos, que con la interacción en grupo de iguales colaboraron para completar la elaboración de las diapositivas, estas como producto final, lo que facilitó una fuente adicional de andamiaje al aprendizaje individual. Según lo expone Martínez (2014) este producto final en el que aportan ideas, opiniones, les permite prepararse para la socialización.

Se observó especialmente que el control de la actividad se traslada al grupo para distribuirse entre sus miembros quienes durante la socialización, cada uno presentó información diferente que contribuyó a la explicación general del tema, en este aspecto se apuntó al fortalecimiento de la responsabilidad Individual del estudiante, en la que se obtuvo resultados alentadores ya que el 100% de los estudiantes cumplió individual y grupalmente con las tareas asignadas (Figura 17).

**Figura 17.** Aprendizaje autónomo -Trabajo cooperativa



*Fuente: Elaboración propia (2018)*

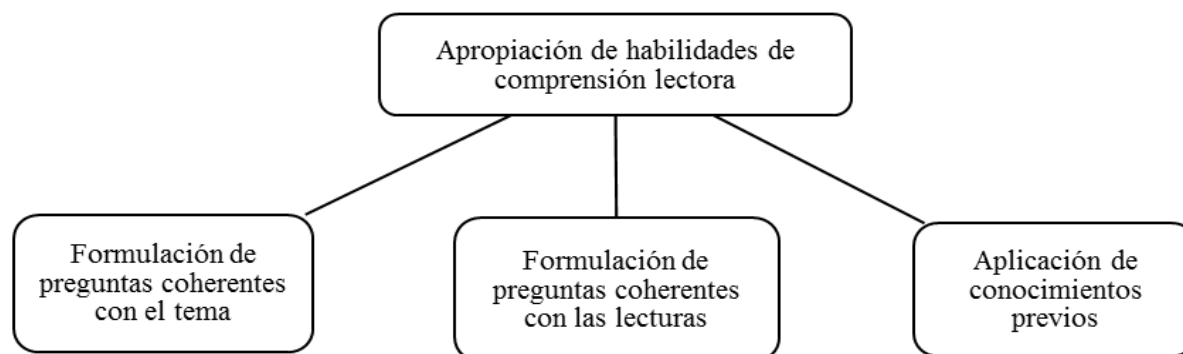
En el desarrollo de esta actividad fue crucial, el manejo de las habilidades de fluidez y comprensión lectora, sin estas se presenta la imposibilidad de acceder a la información para procesarla y terminar el producto final. Con relación a esto las tareas previas de las lecturas permitieron a los estudiantes contextualizar el objeto matemático Teorema del Coseno, lo que se alcanzó con la secuencia didáctica, puesto que, las actividades de alistamiento facilitaron la

introducción de las metas de aprendizaje en la actividad final, la exploración de representaciones iniciales sobre el Teorema del Coseno, en cuanto a los contenidos indagados a través de la lectura. Así se logró activar los conocimientos previos y la recuperación de información importante.

Lo anterior permite expresar, en acuerdo con Amaya (2008) que en “el aprendizaje autónomo la persona aprende a aprender gracias al entrenamiento y desarrollo de competencias o habilidades cognitivas, afectivas e interactivas pero también, y de manera esencial, gracias al desarrollo de habilidades meta cognitivas” (párr. 22).

Como resultado de esta experiencia es posible decir que transmitir información no es un desafío en los procesos de enseñanza, pero como lo expresa López (2006) la capacidad de los estudiantes para encontrar, comprender y leer información de forma crítica para la toma de decisiones, si lo es. En este sentido, al analizar los indicadores del aprendizaje autónomo se observa que uno de los criterios con menos eficiencia presentado por los estudiantes fue la toma de decisiones, aspecto estrechamente relacionado con el planteamiento anterior, que al ser comparado con los resultados de comprensión lectora en el pre y post test, se observa que uno de los ítems con mayores deficiencias fueron algunas de las preguntas del nivel crítico. (Figura 18).

**Figura 18.** Aprendizaje autónomo - Apropiación de habilidades de comprensión lectora



*Fuente: Elaboración propia (2018)*

El lenguaje está conectado al pensamiento, lo cual implica que para el desarrollo de procesos avanzados de pensamiento debe promoverse el desarrollo de habilidades de lenguaje en cuanto a la oralidad, la escritura y la lectura. Para este trabajo se desarrollan las habilidades de la lectura comprensiva. Esto implica que el docente debe integrar estrategias de lectura que promuevan el desarrollo de procesos de aprendizaje debido a la importancia de este en las diferentes disciplinas del currículo escolar. Para el caso específico de las matemáticas que usa un lenguaje abstracto, por consiguiente el hecho de dominar la comprensión del lenguaje natural posibilita el manejo adecuado del lenguaje especializado.

En este trabajo se observaba cómo los estudiantes a través de estas estrategias de lectura desarrollan, además de habilidades como la fluidez y la comprensión lectora, características propias del aprendizaje autónomo como la responsabilidad, el autocontrol, el trabajo en equipo, la búsqueda de información, lo que se evidencia cuando se muestran empoderados de su propio aprendizaje, logrando buscar y seleccionar información de internet. Aunque, en ocasiones ellos mismos aseguraban que existían algunas páginas que no tenían información acertada. Es allí, donde se desarrolla la habilidad para discriminar y escoger la información indicada a través de la comprensión de la lectura, herramienta indispensable para los ciudadanos que ingresan al siglo XXI, el cual exige individuos alfabetizados.

Finalmente, es importante indicar que el clima y la situación que crea el maestro son cruciales para el desarrollo del conocimiento lógico matemático. Dado que este es construido por el estudiante mediante la abstracción reflexiva, que el aprendizaje autónomo facilita.

## Conclusiones y recomendaciones

### Conclusiones

En la presente investigación se plantearon tres objetivos específicos (1) *Caracterizar la velocidad de lectura, la comprensión lectora y los conocimientos relacionados con el Teorema del Coseno en los estudiantes de grado 10° de la Institución Educativa Libardo Madrid Valderrama (IELMV)*, (2) *Aplicar un conjunto de actividades de aprendizaje, diseñadas para la creación de condiciones necesarias que faciliten el desarrollo de habilidades de fluidez, comprensión lectora y la apropiación del objeto matemático: Teorema del Coseno* e (3) *Implementar una estrategia de enseñanza para el fortalecimiento de habilidades de fluidez y comprensión lectora que potencien el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno mediada por el uso de las TIC.*

Los objetivos mencionados, fueron desarrollados uno a uno siguiendo la metodología planteada, con ellos, fue posible dar cuenta del objetivo general “*Potenciar el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno a través del desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora*”, el cual permitió evidenciar una serie de hechos que en conjunto aportan elementos para responder y explicar el problema de investigación propuesto en la pregunta *¿Cómo fortalecer habilidades de fluidez y comprensión lectora que medien el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno?*. Estas evidencias se exponen a continuación mostrando que al caracterizar a los estudiantes en las habilidades de fluidez y comprensión lectora, es posible conocer las fortalezas y debilidades que presentan, facilitando la selección y aplicación de una serie de actividades que recrean el ambiente propicio para desarrollar habilidades de lectura relacionadas con los conocimientos que anteceden la construcción del Teorema del Coseno.

Con respecto a lo anterior, es importante anotar que al implementar la actividad final para el manejo de información se logró percibir como los estudiantes alcanzaron habilidades propias de autonomía, desarrollando consultas en la web, seleccionando información, creando recursos para socializar lo aprendido, entre otras, siendo este un hallazgo relevante, pues, permitió observar que estos al desarrollar habilidades lectoras, fortalecieron el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno.

Así pues, al desarrollar cada uno de los objetivos específicos se logra observar de forma detallada como conseguir el objetivo general y dar solución a la pregunta de investigación.

El primer objetivo, permitió *caracterizar la velocidad de la lectura, la comprensión lectora y los conocimientos relacionados con el Teorema del Coseno*, mediante la realización de tres pruebas en diferentes momentos, en las cuales se evidenció que un porcentaje considerable de los estudiantes obtuvo un nivel de velocidad medio bajo para el pretest (Figura 9) y en la comprensión lectora se presenta un porcentaje mínimo en los tres niveles (Figuras 10,11 y 12). Así mismo, los conocimientos relacionados con el Teorema del Coseno muestran que los estudiantes presentaban dificultades en la aplicación de algunos de estos (Tabla 16), especialmente en operaciones matemáticas y razones trigonométricas. Por consiguiente, se observa que los participantes difícilmente tienen habilidades para comprender el lenguaje fundamental, lo cual genera dificultades en el aprendizaje del lenguaje derivado de las matemáticas, para este caso el Teorema del Coseno, que está fundamentado en una serie de conocimientos básicos para su construcción, los cuales son abordados desde las dificultades que presentan los estudiantes para su aprendizaje.

En este sentido, la caracterización de los aspectos descritos, proporcionó los insumos que propician el escenario, donde se *aplican un conjunto de actividades de aprendizaje para la*

*creación de condiciones necesarias que faciliten el desarrollo de habilidades de fluidez, comprensión lectora y la apropiación del objeto matemático Teorema del*

*Coseno*, correspondiente al objetivo dos, planteado en este estudio, donde las docentes investigadoras, a través, de diferentes técnicas de fluidez y comprensión lectora, integran los conocimientos que anteceden al aprendizaje del objeto matemático. Para ello, diseñan y ejecutan cinco actividades, que permitieron determinar ocho condiciones esenciales, creando un ambiente propicio para el aprendizaje autónomo. De estas condiciones se destacan la trabajo cooperativo, promoción de un ambiente de confianza en el que el estudiante pueda trabajar, el establecimiento de acuerdos para la convivencia y el desarrollo del trabajo, la activación de conocimientos previos, la apropiación de habilidades de comprensión lectora y el acompañamiento y guía del docente; condiciones que facilitaron el desarrollo de cada una de las actividades promoviendo el aprendizaje autónomo.

Cabe enfatizar que, las condiciones necesarias ofrecieron la posibilidad de implementar una estrategia de enseñanza para el fortalecimiento de habilidades de fluidez y comprensión lectora que potencien el aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno mediada por el uso de las TIC, la cual, orientó el tercer objetivo de la presente investigación.

Es así, como la integración de estrategias que medien el desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora y el reconocimiento de saberes que apalanquen el aprendizaje autónomo de un nuevo conocimiento, contribuyen positivamente en la construcción de entidades de pensamiento de orden superior en el aula de matemáticas, tales como, análisis y síntesis de la información e integración de los conocimientos de diferentes disciplinas para generar ideas, entre otras (Figura 12).



Teniendo en cuenta que, en este estudio las habilidades de lectura fueron indispensables para el manejo de la información, es preciso recalcar las diferentes herramientas tecnológicas utilizadas como Google y Power point, que apoyaron la estrategia implementada para contribuir al aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno. Éstas motivaron a los estudiantes a participar directamente en su propio aprendizaje, evidenciando habilidades propias del uso de la tecnología como la aplicación de los procesos del trabajo en equipo, la toma de decisiones en ámbitos concretos de trabajo y la contribución al establecimiento de normas.

Por otra parte, al comparar los resultados del pre y post test (Tabla 14) se observó que el conjunto de actividades implementadas para mejorar la velocidad y la comprensión lectora, así como la estrategia de enseñanza, obtuvo una incidencia efectiva que se evidencia con un índice de 0.68, valor que indica que los estudiantes alcanzaron un nivel medio de comprensión del contenido. Así mismo, analizando la ganancia de aprendizaje de cada una de las preguntas del pre-postest, se encontró que los valores del índice para la mayoría de estas fueron elevados, además de la ganancia obtenida en gran parte de los saberes que dificultan el aprendizaje del objeto matemático. Situación que indica que los estudiantes alcanzaron la comprensión de los diferentes contenidos que apalancan el concepto del Teorema del Coseno.

Igualmente, se observa un aumento en la velocidad de lectura, el cual se refleja en la primera prueba, en la que no se presentaron estudiantes en nivel muy rápido, mientras que, en la prueba final este nivel se incrementó en un 56,25%. Así mismo, en el post test no se presentaron estudiantes en el nivel muy lento, por tanto, se muestra un fortalecimiento que favorece la fluidez en la lectura.

Para focalizar los planteamientos anteriores, se presentan los resultados obtenidos por el estudiante número 16, quien en las diferentes pruebas de pre y pos muestra, con respecto a la

velocidad lectora un aumento de nivel medio bajo a medio rápido (Anexo 10), en la comprensión lectora se observa que inicialmente contestó 4 preguntas correctas y después de la intervención contestó 10 preguntas acertadas (Anexo 12). Por último, en los conocimientos sobre el Teorema del Coseno obtuvo una ganancia alta (0.91) (Tabla 14). Lo anterior, confirma que la implementación de las estrategias fue efectiva para este estudiante.

Finalmente, al retomar el problema de investigación relacionado con la deficiencia en la comprensión de lectura y el dominio del lenguaje fundamental y derivado de las matemáticas por parte de los estudiantes de grado décimo de la IELMV, se logra evidenciar durante el desarrollo de este estudio la necesidad de que el docente implemente de manera consciente estrategias de fluidez, comprensión lectora y conocimientos que fundamentan la construcción del nuevo saber para mejorar la calidad del proceso de enseñanza, innovar, fortalecer y hacer más efectivo el cumplimiento de metas que se asignan a los procesos en el aula de matemáticas. Lo cual, sustenta la necesidad cada vez más apremiante de desarrollar proyectos integrales que logren superar las debilidades existentes en los estudiantes.

## **Recomendaciones**

De acuerdo con la investigación realizada es posible hacer las siguientes recomendaciones:

- Realizar caracterización de lectura en matemáticas a los diferentes grados de la educación básica secundaria y media de forma constante, debido a que la comprensión de textos matemáticos requiere de habilidades y vocabulario específico, siendo indispensable conocer las deficiencias de los estudiantes, para de esta manera proponer estrategias y actividades que contribuyan al mejoramiento de sus aprendizajes.

- La necesidad de formar docentes que integren el lenguaje de manera consciente en el aula, como elemento constitutivo del currículo, que además, de enseñar matemática ayuden a desarrollar las habilidades lingüísticas, concibiéndolas como una herramienta de pensamiento y aprendizaje. Así pues, el maestro puede enseñar a leer y a escribir en un proceso simultáneo de enseñanza de las matemáticas y el uso del lenguaje.
- Incorporar estrategias que incluyan actividades relacionadas con las habilidades de lectura, los conocimientos previos y el uso de las TIC, conforman un conjunto utilizado de forma estratégica que promueven el aprendizaje autónomo de los estudiantes, por lo menos en el contexto particular de la IELMV de sus aprendizajes.
- Fomentar el trabajo por grupos cooperativos con el fin de lograr fortalecer aprendizajes individuales para el desarrollo de habilidades de aprendizaje autónomo es indispensable para asumir los retos como ciudadanos alfabetizados en el siglo XXI.
- Para mejorar la calidad educativa, el MEN debe integrar las habilidades de lenguaje en las diferentes disciplinas del currículo escolar.

### Referencias bibliográficas

- Abello, A., Montaña, J. (2013). Leer y comprender para aprender Matemática Reading and Comprehension to Learn Math.
- Amaya, G. (2008). Aprendizaje autónomo y competencias. *CONGRESO NACIONAL DE PEDAGOGÍA -Organizado Por La Fundación CONACED*.
- Arenas, F., Becerra, M., Mora, M. F., Morales, F., Nieto, E. X., Polanía, D. L., ... Gómez, P. (2016). Razones trigonométricas.
- Ausubel, D. (1983). Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo. *México, D.F. Editorial Trillas*.
- Barreyro, J.-P., & Fumagalli, J.-C. (2014). Fluidez lectora en niños: cuáles son las habilidades subyacentes. *Ocnos, 16*(11), 93–112. <https://doi.org/10.18239/ocnos>
- Barrios, I., & Casadei, L. (2014). Promoting the use of google Drive as a collaborative cloud tool for engineering students [Promoviendo el uso de Google Drive como herramienta de trabajo colaborativo en la nube para estudiantes de ingeniería]. *Revista de Tecnología de Información y Comunicación En Educación, 8*(1), 43–56.
- Barton, M.L., Heidema, C., & Jordan, D. (2002). *Teaching reading in mathematics and science. Educational Leadership* (Vol. 60). Retrieved from [http://pdo.ascd.org/lmscourses/PD11OC133/media/Science\\_Literacy\\_M3\\_Reading\\_Teaching\\_Reading.pdf](http://pdo.ascd.org/lmscourses/PD11OC133/media/Science_Literacy_M3_Reading_Teaching_Reading.pdf)
- Benavides, J. E. (1997). La lectura rápida en el desarrollo de la velocidad y la comprensión en inglés: Desarrollo de la lectura, velocidad, comprensión, vocabulario y gramática en estudiantes de inglés técnico a nivel universitario, (January 1997). <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1421.1927>
- Burbat, R. (2016). El aprendizaje autónomo y las TIC en la enseñanza de una lengua extranjera : ¿ Progreso o retroceso ? *Universidad de Granada. ISSN: 1697-7467*, 37–51.
- Candela, Rodríguez, Boris, F. & Espinosa, Hernández, T. (2016). LAS CIENCIAS Language as a Strategy for Learning Science Curriculum Topics. *Bioartículos de Investigación, 9*, 73–88.
- Colombia, C. de la república. (1994). Ley 115 de Febrero 8 de 1994.
- Corte Constitucional de Colombia. (1991). Constitución política de Colombia actualizada con los actos legislativos a 2015. *Corte Constitucional de Colombi*, 121. <https://doi.org/2344-8997>
- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime, 9*(Extra 1), 177–195. Retrieved from <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2161582>
- Delors, J., Amagi, I., Carneiro, R., Chung, F., & Geremek, B., Gorham, W. (1996). La

- Educación encierra un tesoro, informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI (compendio); 2010. *Unesco*, 1, 47.  
<https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Denzin, N. & Lincoln, Y. (2000). *Handbook of qualitative research. 2nd Ed. Thousand Oaks: Sage Publications.*
- Draper, Smith, Hall, & S. (2005). Aims and Criteria for Collaboration in Content-Area Classrooms, 1, 1–19.
- Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (*Segunda Edición. Trad. Myriam Vega Restrepo*). Cali, Colombia: Peter Lang/Universidad Del Valle. (*Original: Sémiosis et Pensée Humaine. Bern: Peter Lang, 1995. Primera Edición En Español: Universidad Del Valle, 1999*).
- Eby, M., & Eby, M. (2016). Integrating Reading into Mathematics Instruction. *TESIS DOCTORAL.*
- Fernández, F. (2010). *Unidad Didáctica: Trigonometría.*
- Freitag, M. (1997). Reading and Writing in the Mathematics Classroom. *The Mathematics Educator*, 8(1), 16–21. Retrieved from  
<http://math.coe.uga.edu/TME/Issues/v08n1/3freitag.pdf>
- García, B., Coronado, A., Montealegre, L., Giraldo, A., Tovar, B., Morales, S., Cortés, D. (2013). *Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje.*
- García, B., Quiroga, A., Coronado, A., y Giraldo, O. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas.*
- González, L., & Sánchez, B. (2006). Eduteka - Competencia para Manejar Información (CMI) &gt; CMI &gt; Modelo Gavilán. Retrieved April 24, 2018, from  
<http://eduteka.icesi.edu.co/modulos/1/150/487/1>
- Gonzalez, J. (2010). *Integración de formularios de google docs en la plataforma de gestión del aprendizaje .lrn.*
- Guerrero, Y., & Vega, N. (2016). *Estudio de dificultades y errores en estudiantes de grado décimo en la resolución de problemas Trigonométricos. Tesis Maestría.*
- Gutiérrez, O. (2003). Enfoques y modelos educativos centrados en el aprendizaje. Estado del arte y propuestas para su operativización en las instituciones de educación superior nacionales, 56. Retrieved from  
<http://lie.upn.mx/docs/docinteres/EnfoquesyModelosEducativos2.pdf%0Awww.lie.upn.mx/docs/docinteres/EnfoquesyModelosEducativos1.pdf>
- Hake, R. R. (2002). Relationship of individual student normalized learning gains in mechanics with gender, high-school physics, and pretest scores on Mathematics and Spatial Visualization. *Physics Education Research Conference*, 8(August 2002), 1–14. Retrieved from  
[https://scholar.google.com/citations?view\\_op=view\\_citation&hl=en&user=10EI2q8AAAAJ&citation\\_for\\_view=10EI2q8AAAAJ:IjCSPb-OG4C](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=10EI2q8AAAAJ&citation_for_view=10EI2q8AAAAJ:IjCSPb-OG4C)

- Halliday, M. (1997). El lenguaje como semiótica social, (Parte 1).
- Haquin, D. M., Torres, D. G., Urrutia, E. E., Martínez, C. M., Vega, P. R., & Morales, V. G. (2013a). Leer Para Aprender a Partir De Textos Multimodales: Los Materiales Escolares Como Mediadores Semióticos. *Revista De Estudios Y Experiencias En Educación*, 12(24), 77–91. Retrieved from <http://eds.b.ebscohost.com/eds/detail/detail?vid=2&sid=dd07b088-c4b2-49e6-b6d8-5b1b6363a39e%40sessionmgr101&bdata=Jmxhbmc9ZXMmc2l0ZT1lZHMtbGl2ZSZzY29wZT1zaXRl#db=edsdoj&AN=edsdoj.6470e6bbd9d495ba599ef1634759216>
- Haquin, D. M., Torres, D. G., Urrutia, E. E., Martínez, C. M., Vega, P. R., & Morales, V. G. (2013b). Leer Para Aprender a Partir De Textos Multimodales: Los Materiales Escolares Como Mediadores Semióticos. *Revista De Estudios Y Experiencias En Educación*, 12(24), 77–91.
- ICFES. (2013). Establecimiento educativo : INSTITUCION EDUCATIVA LIBARDO MADRID, (3).
- Johnson, D. W., Johnson, R., & Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*.
- Jorba Jaume, G. I. y P. Á. (2000). *Editorial sintesis* (Rditorial). España.
- Lamb, J. H. (2010). Reading Grade Levels and Mathematics Assessment : An Analysis of Texas Mathematics Assessment Items and Their Reading Difficulty 1, 20(1), 22–34.
- Larson, J. L. (2014). Secondary mathematics teachers' literacy professional learning: An amalgamation of adolescent literacy, mathematics teaching, and adult learning. *Dissertation Abstracts International Section A: Humanities and Social Sciences*, 75(4–A(E)), No-Specified. Retrieved from <http://ovidsp.ovid.com/ovidweb.cgi?T=JS&PAGE=reference&D=psyc11&NEWS=N&AN=2014-99190-308>
- López, J. (2006). Eduteka - Competencia para Manejar Información (CMI) &gt; Recursos &gt; Artículos. Retrieved April 20, 2018, from <http://eduteka.icesi.edu.co/modulos/1/9/34/1>
- Mampel, L., & Cortés, Á. (2009). Los motores de búsqueda de información en Internet como herramienta de aprendizaje : análisis de contenidos sobre el concepto “ dinosaurio .” *Revista Electronica de Enseñanza de Las Ciencias*, 8(3), 770–796. Retrieved from [http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen8/ART2\\_Vol8\\_N3.pdf%5Cn](http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen8/ART2_Vol8_N3.pdf%5Cn)
- Maraví, R. M. (2010). E L Empleo Didáctico De Las Diapositivas En Power Point Teaching Use of the Power Point of Slides. *161 Invest. Educ. Investigación Educativa*, 14(26), 161–171. Retrieved from <http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/4295/3431>
- Martinez, E. (2017). Análisis General Caracterización de Fluidez y Comprensión Lectora 3 Y 5. Retrieved April 24, 2018, from <https://es.scribd.com/document/340947206/Analisis-General-Characterizacion-de-Fluidez-y-Comprension-Lectora-3-Y-5>
- Martínez, M. del R. (2014). Estrategias para promover el desarrollo del aprendizaje autónomo en el alumno de Matemática I del nivel Medio Superior, 133. Retrieved from <http://eprints.uanl.mx/4289/1/1080253803.pdf>

- Massié, A. I. (2010). El estudiante autónomo y autorregulado, 1–7. Retrieved from [http://autonomouslearningteacherkat.weebly.com/uploads/1/6/7/1/16715350/doc\\_2.pdf](http://autonomouslearningteacherkat.weebly.com/uploads/1/6/7/1/16715350/doc_2.pdf)
- Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Buenos Aires: Aique.
- Mayo, J. . . (1994). *Como leer, estudiar y memorizar rápidamente*.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Cuidadanas*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2012). Las competencias de lectura y escritura en niños y jóvenes, estrategia para mejorar la calidad de la educación - ...:Ministerio de Educación Nacional de Colombia:.. Retrieved April 20, 2018, from <https://www.mineduacion.gov.co/1621/article-300070.html>
- Ministerio de Salud. (1993). Resolución 8430 de 1993. *Ministerio de Salud y Protección Social, República de Colombia, 1993*(Octubre 4), 1–19. <https://doi.org/10.2353/jmoldx.2008.080023>
- Monte, E. (2008). Reading as a Learning Strategy for Mathematics Reading as a Learning Strategy for Mathematics.
- Moore, D., Bean, T., Birdyshaw, D., & Rycik, J. (1999). Adolescent literacy: A position statement. ... *Adolescent & Adult Literacy*, (6). Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/40017055>
- Mota, J. y Valles, R. (2015). Papel de los conocimientos previos en el aprendizaje de la matemática universitaria. *Acta Scientiarum. Education*, 37(1), 85. <https://doi.org/10.4025/actascieduc.v37i1.21040>
- Mota, V., y Valles, R. (2015). Papel de los conocimientos previos en el aprendizaje de la matemática universitaria. *Acta Scientiarum. Education*, 37(1), 85. <https://doi.org/10.4025/actascieduc.v37i1.21040>
- Navarra, G. de. (2003). Blitz serie amarilla. *Articulo*, 2.
- Near, S. M. (2014). *Literacy Instruction in Math classes*.
- Norris, S. P., & Phillips, L. M. (2003). How Literacy in Its Fundamental Sense Is Central to Scientific Literacy. *Science Education*, 87(2), 224–240. <https://doi.org/10.1002/sci.10066>
- OECD PISA. (2009). PISA : COMPRENSIÓN LECTORA I. Marco y análisis de los ítems.
- Oliveras, B. & Sanmartí, N. (2009). *Educación química. Educación química* (Vol. 20). Facultad de Química de la UNAM. Retrieved from [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0187-893X2009000500005&lng=en&tlng=en](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0187-893X2009000500005&lng=en&tlng=en)
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico-OCDE. (2016). *Educación en*

- Colombia. *Revisión de políticas nacionales de educación*.  
<https://doi.org/10.1787/9789264250604-en>
- Ortiz, L. (2017). *La estrategia de escribir para aprender: el caso del equilibrio químico*. Universidad del Valle.
- Outón, P. (2011). Las dificultades de exactitud y velocidad lectoras en escolares de segundo de Educación Primaria. *Revista de Investigación En Educación*, 9(2), 153–161.
- Piaget, J. (1979). Desarrollo mental del niño. *Seis Estudios de Psicología*, 11–145.
- Rodríguez, W. (1999). El legado de Vygotski y Piaget a la educación. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 31, núm. 3(120–534), 477–489.
- Sampieri, R. H., & Lucio, P. B. (2006). *Metodología de la investigación*.
- Santos Baron, E. (2013). La lectura de textos de divulgación científica como medio para la comprensión de nociones básicas de la matemática en el grado sexto, 83. Retrieved from <http://www.bdigital.unal.edu.co/39625/>
- Schwandt, T. (2014). On the Mutually Informing Relationship Between Practice and Theory in Evaluation. *American Journal of Evaluation*, 35(2), 231–236.  
<https://doi.org/10.1177/1098214013503703>
- Shanahan, T., & Shanahan, C. (2008). Teaching Disciplinary Literacy to Adolescents: Rethinking Content- Area Literacy. *Harvard Educational Review*, 78(1), 40–59.  
<https://doi.org/10.17763/haer.78.1.v62444321p602101>
- Smith, F. (1983). UNDERSTANDING READING - FRANK SMITH : FRANK SMITH : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive. Retrieved April 20, 2018, from <https://archive.org/details/UnderstandingReading-FrankSmith>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria.
- Solórzano, Y. (2017). Autonomous learning and skills aprendizagem e habilidades autônoma. *Dominio de La Ciencia*, 3(2477–8818), 241–253.
- Stake, R. E. (1999). R. E. Stake, 159. <https://doi.org/10.1111/j.1095-8649.2005.00891.x>
- Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1984). La observación participante en el campo. *Introducción a Los Métodos Cualitativos de Investigación. La Búsqueda de Significados*.  
<https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Unesco. (2006). *Ética De La Investigación En Los Seres Humanos Y Políticas En La Salud Pública*. Retrieved from <http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001512/151255s.pdf>
- Vigotsky, L. (1995). Pensamiento y lenguaje. *Obras Escogidas Tomo II*.



## Anexos

### Anexo 1. Estándares básicos en la construcción del concepto Teorema del Coseno integrado a la comprensión lectora

*Estándares básicos en la construcción del concepto: Teorema del Coseno y la comprensión lectora*

<b>Estándares básicos en la construcción del concepto: teorema del coseno y la comprensión lectora</b>				
<b>Pensamientos</b>				
<b>Grado de escolaridad</b>	<b>Matemáticas</b>		<b>Lenguaje</b>	
	<b>Espacial y sistemas geométricos</b>	<b>Métrico y Sistemas de medidas</b>	<b>Producción textual</b>	<b>Comprensión e interpretación textual</b>
<b>4 a 5</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo a sus componentes (ángulos y vértices) y características.</li> <li>• Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámica.</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elaboro un plan para la exposición de mis ideas.</li> <li>• Produzco un texto oral, teniendo en cuenta la articulación y la organización de ideas que requieren la situación comunicativa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprendo diversos tipos de textos, utilizando algunas estrategias de búsqueda, organización y almacenamiento de información.</li> </ul>
<b>6 a 7</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y de arte</li> <li>• Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.</li> <li>• Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones Visuales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diferencio y ordeno en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficie, dados volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes: pesos y masa de cuerpos solidos; duración de eventos o</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elaboro un plan textual, jerarquizando la información que he obtenido de fuentes diversas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifico las principales características formales del texto: formato de presentación, títulos, graficación y organizadores.</li> <li>• Comparo el contenido de los diferentes tipos de texto que he leído.</li> </ul>

		procesos amplitud de ángulos		
<b>8 a 9</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.</li> <li>• Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).</li> <li>• Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.</li> <li>• Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Organizo previamente las ideas que deseo exponer y me documento para sustentarlas.</li> <li>• Utilizo el discurso oral para establecer acuerdos a partir del reconocimiento de los argumentos de mis interlocutores y la fuerza de mis propios argumentos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprendo el sentido global de cada uno de los textos que leo y la intención de quien lo produce.</li> </ul>
<b>10 a 11</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprendo el valor del lenguaje en los procesos de construcción del conocimiento.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elaboro hipótesis de interpretación atendiendo a la intención comunicativa y al sentido global del texto que leo.</li> </ul>

*Fuente: Adaptado de los estándares básicos de competencia de matemáticas y lenguaje (2006)*

## Anexo 2. Consentimiento informado



**INSTITUCIÓN EDUCATIVA LIBARDO MADRID VALDERRAMA**



Con reconocimiento oficial mediante Resolución No. 4143.2.21.1943 del 24 de Marzo de 2010 y  
Resolución No. 4143.0.21.8871 del 23 de septiembre de 2011  
Educación Preescolar, Básica y Media – Jornada Diurna y Nocturna (Ciclos Integrados)  
Sedes Libardo Madrid Valderrama, Angélica Sierra ~~Arizabalata~~, Pablo Neruda y Primero de Mayo

T.R.D.4143.043.13.\_\_\_\_\_

### CONSENTIMIENTO INFORMADO PADRES O ACUDIENTES

Yo \_\_\_\_\_, mayor de edad;  
padre, madre o acudiente del estudiante: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_, he sido informado acerca de la toma de encuestas, entrevistas, fotografías, grabación de videos, para la investigación de la tesis, que realizarán las docentes: **Victoria Eugenia Correa Ríos y Yenny Aramburo Urbano**, para optar por el título de Magíster en Educación de la universidad ICESI.

Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de mi participación, resuelto todas las inquietudes y comprendido en su totalidad la información sobre esta actividad, entiendo que: Mi participación en esta investigación no tendrán repercusiones o consecuencias en las actividades escolares, evaluaciones o calificaciones de mi hijo (o estudiante del que soy acudiente).

- Mi participación no generará ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por ella.
- No habrá ninguna sanción para mí en caso de que no esté de acuerdo en participar.
- Mi identidad no será publicada y las imágenes y sonidos registrados durante la grabación se utilizarán únicamente para los propósitos anteriormente mencionados y como evidencia de la práctica educativa para la investigación.
- Las investigadoras garantizarán la protección de las imágenes y el uso de las mismas, de acuerdo con la normatividad vigente, durante y posteriormente al proceso de la investigación.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados (Ley 1581 de 2012 y Decreto 1377 de 2012), y de forma consciente y voluntaria.

Para el consentimiento de la anterior firma el Rector Orlando Quintero a los once (11) días del mes de Septiembre de 2017.



Orlando Quintero  
RECTOR

-----  
[ ] DOY EL CONSENTIMIENTO      [ ] NO DOY EL CONSENTIMIENTO

Para que mi participación en la actividad de práctica educativa (reunión, taller de padres, etc.) sea grabada en las instalaciones de la Institución Educativa donde estudia mi hijo (a) o el estudiante del que soy acudiente.

Lugar y Fecha: \_\_\_\_\_ FIRMA CC/CE: \_\_\_\_\_

### Consentimiento diligenciado

 MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL 783 4143 249 221		<b>CIRCULAR INFORMATIVA</b>		
CODIGO: DEIN-FOR-05	VERSION: 2	FECHA: 05-04-2017	PÁGINA: 1 DE 3	

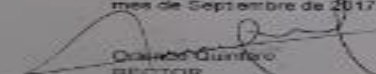
**CONSENTIMIENTO INFORMADO PADRES O ACUDIENTES**

Yo Sociedad Ruiz Barbara madre de Andrés padre o acudiente del estudiante Andrés Ruiz Burbules he sido informado acerca de la toma de encuestas, entrevistas, fotografías, grabación de videos para la investigación de la tesis, que realizarán los docentes Victoria Eugenia Correa Rios y Yenny Aramburo Urbano, para optar por el título de Máster en Educación de la Universidad ICESI.  
Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de mi participación, resuelto todas las inquietudes y comprendido en su totalidad la información sobre esta actividad, entiendo que:

- Mi participación en esta investigación no tendrán repercusiones o consecuencias en las actividades escolares, evaluaciones o calificaciones de mi hijo (o estudiante del que soy acudiente).
- Mi participación no generará ningún gasto, ni recibirá remuneración alguna por ella.
- No habrá ninguna sanción para mí en caso de que no esté de acuerdo en participar.
- Mi identidad no será publicada y las imágenes y sonidos registrados durante la grabación se utilizarán únicamente para los propósitos anteriormente mencionados y como evidencia de la práctica educativa para la investigación.
- Las investigadoras garantizarán la protección de las imágenes y el uso de las mismas, de acuerdo con la normatividad vigente, durante y posteriormente al proceso de la investigación.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados (Ley 1581 de 2012 y Decreto 1377 de 2012), y de forma consciente y voluntaria.

Para el consentimiento de la anterior firma el Rector Orlando Quintero a los once (11) días del mes de Septiembre de 2017.

  
Orlando Quintero  
RECTOR

DOY EL CONSENTIMIENTO      |       NO DOY EL CONSENTIMIENTO

Para que mi participación en la actividad de práctica educativa (reunión, taller de padres, etc.) sea grabada en las instalaciones de la Institución Educativa donde estudio mi hijo (a) o el estudiante del que soy acudiente.

Lugar y Fecha: Cali, Colombia 14/09/2017.

Sociedad Burbules  
FIRMA CCCE: 34473376

### Anexo 3. Clases realizadas en el desarrollo de la estrategia

CLASE No.	FECHA	OBJETIVO
1	14-09-2017	Informar el trabajo que se realizará con el grupo. Entregar los consentimientos para ser diligenciados por los padres de familia.
2	03-10-2017	Caracterizar la fluidez (velocidad) de la lectura en los estudiantes
3	02-11-2017	Caracterizar los saberes previos que poseen los estudiantes a partir de un Pre-test
4	07-11-2017	Caracterizar la fluidez (comprensión en los niveles: literal, inferencial y crítico) con la lectura “¿Cómo se midió la altura del monte Everest?” “En los estudiantes.
5	08-11-2017	Desarrollar habilidades de fluidez de lectura asociado al concepto de operaciones Matemáticas (Lectura horizontal y vertical)
6	14-11-2017	Desarrollar habilidades de fluidez de lectura asociado al concepto de ecuaciones (Lectura con líneas divisorias)
7	15-11-2017	Evitar que la línea marcada afecte la lectura Insistir en el movimiento automático del ojo Aprender el concepto de ecuaciones a través de la lectura
8	17-11-2017	Fortalecer el aprendizaje del concepto de ecuaciones a través de la lectura. Medir el tiempo de lectura al compañero. Realizar la lectura en velocidad, calidad y comprensión.
9	20-11-2017	Ampliar el campo visual Leer en grupo por párrafos para evaluar la velocidad y calidad de la lectura. Desarrollar habilidades de fluidez de lectura asociado al concepto de triángulos oblicuángulos (Lectura en forma de triángulo).
10	21-11-2017	Fortalecer el aprendizaje del concepto de razón trigonométrica del coseno a través de la lectura. Medir el tiempo de lectura al compañero. Realizar la lectura en velocidad, calidad y comprensión.
11	22-11-2017	Seleccionar información en formato multimodal (fórmulas, fotografías, dibujos, mapas, lengua escrita, etc.) acerca del Teorema del Coseno.
12	23-11-2017	Desarrollar habilidades de oralidad y lectura a través de trabajo en equipo. Evaluar la pertinencia de la información para el aprendizaje del Teorema del Coseno
13	24-11-2017	Socializar y argumentar la pertinencia y utilización de la información encontrada.
14	27-11-2017	Caracterizar los saberes adquiridos por los estudiantes a partir de un Post-test
15	28-11-2017	Caracterizar la fluidez lectora (Velocidad) de los estudiantes con el uso de la lectura “¿Cómo se midió la altura del monte Everest?” y el cronometro
16	28-11-2017	Caracterizar la fluidez lectora (Velocidad) de los estudiantes con el uso de la lectura “¿Cómo se midió la altura del monte Everest?” y el cronometro Caracterizar la fluidez lectora (comprensión: literal, inferencial y crítico) de los estudiantes con el uso de la lectura “¿Cómo se midió la altura del monte Everest?”

Fuente: Elaboración propia (2018)

## Anexo 4 .Instrucciones generales para el (la) docente o evaluador

### INSTRUCCIONES GENERALES PARA EL (LA) DOCENTE O EVALUADOR

- Trabaje en forma individual con cada estudiante (quién también se denominará lector). Recuerde que el ambiente debe ser tranquilo y amable, lejos del ruido y de situaciones que desvíen al lector de su tarea.
- Tenga un cronómetro listo y en buen funcionamiento.
- Para iniciar el ejercicio, usted debe entregarle al evaluando el protocolo del lector (el texto que el estudiante va a leer), el cual debe tener diligenciado el nombre completo del estudiante, el curso, el año escolar, la hora y la fecha del ejercicio.
- Entregue el protocolo al lector y explíquelo que leerá un texto. Debe haber una ficha de registro por cada estudiante. (Los textos deben estar escritos en letra grande y a espacio 1,5)
- Indíquelo al estudiante el momento en el que debe iniciar la lectura: “LEE EN VOZ ALTA, LO MEJOR QUE PUEDAS” --INICIA YA-- y ACTIVE EL CRONOMETRO.
- El cronómetro se debe activar una vez el estudiante inicie el proceso de lectura.
- Se espera que el joven lea entre 250 y 500 palabras por minuto de ahí que usted como evaluador debe estar muy atento a marcar en la ficha de registro cuántas palabras alcanzó a leer el estudiante en un minuto y señalar los rasgos que caracterizan la calidad de la lectura.
- Al cumplirse el minuto, desactive el cronómetro, pero deje que el evaluando continúe leyendo el texto hasta terminar. En este caso, el texto tiene 703 palabras; es probable que el estudiante requiera más de un minuto para leerlo en su totalidad. Ahora bien, si el lector lee o hace el ejercicio más rápido, en otras palabras, leyó entre 250 y 500 palabras antes de cumplir un minuto, usted debe desactivar el cronómetro y registrar el tiempo transcurrido en la casilla correspondiente. Recuerde que el estudiante debe leer todo el texto.
- Para medir la calidad de la lectura, usted debe seguir la manera como el estudiante va tejiendo las palabras o realizando el proceso de lectura. Usted debe anotar las omisiones, los cambios de palabra, las palabras mal pronunciadas, los acentos, las pausas, y si hace o no autocorrección. Esta información la debe consignar en las 6 columnas dispuestas para cada rasgo en la ficha de observación del docente.
- Luego de analizar los rasgos y de haber marcado el tiempo y el número de palabras, utilice las fichas para registrar la lectura que prima en él o la estudiante. Lo anterior, también, le permitirá medir y hacer observaciones sobre la calidad de la lectura.
- Cuando el (la) estudiante termine la lectura, desactive el cronómetro y anote el tiempo, en minutos y segundos, que empleó el estudiante leyendo el texto; anote también el número de palabras que leyó, y marque el rango en el que queda el (la) estudiante, según las categorías de velocidad.
- Si él o la estudiante queda en los niveles lento y muy lento en la medición de la velocidad, probablemente también quede en las categorías de lectura A, B o C, de rasgos de calidad. Esto indica que el joven no tiene la calidad de lectura requerida para enfrentar la prueba.

### GLOSARIO

- **Velocidad de lectura:** ¿Cuántas palabras lee el estudiante por minuto?
- **Calidad de la lectura:** ¿El estudiante lee con fluidez, hace inflexión de voz, parafrasea las unidades de sentido, hace pausas y utiliza entonación?

## Anexo 5. Protocolo del lector

### PROTOCOLO DEL LECTOR

Nombre de los (de las) estudiantes: \_\_\_\_\_

Institución educativa: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_\_ Día:

\_\_\_\_\_ Mes: \_\_\_\_\_ Año: \_\_\_\_\_ Hora de inicio: \_\_\_\_\_ Hora de terminación: \_\_\_\_\_

#### ¿CÓMO SE MIDIÓ LA ALTURA DEL MONTE EVEREST?

En la antigüedad, se utilizaba un método de deducción basándose en la presión atmosférica. Justamente lo que se utilizaba era un barómetro, para medir la presión existente a determinada altura. La presión será menor en la cumbre de una montaña, y mayor en la base, por lo que a medida que se sube a la montaña, se reduce la presión, y de esas medidas, se realizaban los cálculos para establecer la altura aproximada de las montañas.



A fin de calcular la altura del monte Everest, en un inicio se aplicaron técnicas topográficas clásicas. Primero se midió una línea base de varios kilómetros, a lo largo de un terreno cuya altitud sobre el nivel del mar se conocía.

La cima de la montaña podía verse desde ambos extremos de la línea y se utilizó un teodolito - instrumento de precisión- para determinar los ángulos formados con respecto a la línea base.

Conociendo dos ángulos y la longitud de un lado de un triángulo pueden calcularse los demás lados y, con cálculos posteriores, la altura. Los topógrafos midieron el Everest desde seis lugares, y obtuvieron cifras distintas que fluctuaban entre 8.836 m y 8.847 m. El promedio fue de 8.839 m, pero finalmente se acordó fijarla en 8.840 m.

La jerarquía del Everest como la montaña más alta del mundo fue indudable hasta 1986, cuando George Wallerstein, de la Universidad de Washington, aplicando un método diferente proclamó que otro monte del Himalaya, el K-2 podía ser 11 metros más alto.

La aseveración de Wellerstein fue tan asombrosa que en 1987 una expedición italiana decidió comprobarla. Los investigadores colocaron receptores en el Everest y el monte K-2, y utilizaron un sistema de señales para establecer su altura y posición exactas. Esto era decisivo ya que las discrepancias en la altura de las montañas obedecen a errores en la altitud de la línea base a partir de la cual se hacen los cálculos.

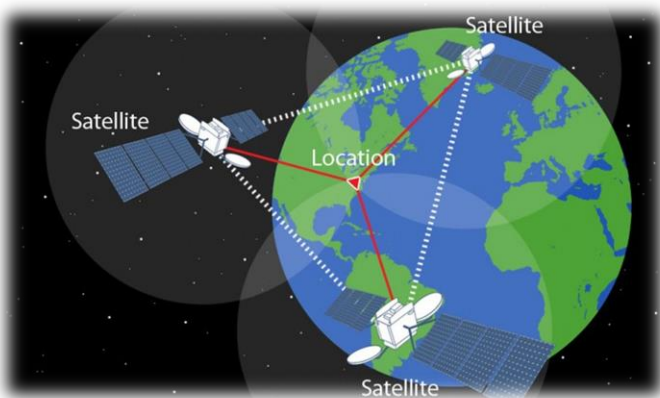
El grupo, dirigido por el geólogo Ardito Desio, calculó la altitud de las dos cumbres con teodolitos ubicados donde se habían puesto los receptores. Su conclusión fue que Wellerstein estaba equivocado: el Everest resultó tener 8.872 m: 256 más que el K-2.

Aunque, después del terrible terremoto que devastó Nepal el 25 de abril de 2015 se elevará el ritmo de crecimiento del Everest que suele aumentar un centímetro a lo alto cada año y 3,5 hacia la zona norte. "El Everest es el producto de la colisión de la placa Índica que migró al norte durante los últimos 50 millones de años. Al migrar hacia el norte se produjo la colisión con la placa Euroasiática generando la cordillera con mayor número de 8 miles del mundo", explica a este periódico Luis Suárez, presidente del colegio de Geólogos de España.

"Con el terremoto se produce un acrecentamiento de todos los movimientos. Aún no tenemos los datos pero los estudios dirán que ha producido el terremoto en cuanto al levantamiento se refiere. Estos movimientos se acrecentarán mucho debido al terremoto. Aumentará de altura aunque no tengamos los datos. ¿Cuánto se levantará? Aún no lo sabemos. Este año tendremos la información", aclara uno de los mejores geólogos de España.

"Eso es fácil. Al introducirse la placa índica por debajo de la placa euroasiática se produce un levantamiento. Como cuando se mete la mano por debajo de la alfombra. Cuando hay una acumulación así de energía se produce un terremoto", espeta.

Con esta mar de informaciones surge una pregunta: ¿Cómo se mide una montaña tan alta como el Everest en la actualidad?



Se mide a través del GPS Los sistemas de geoposicionamiento Satelital (GPS) utilizan el mismo principio de triangulación de un teodolito, pero en lugar de establecer puntos aleatorios sobre la tierra, se puede apoyar con el uso de un satélite en órbita para establecer la distancia existente entre diferentes puntos. De esta forma, el establecimiento de puntos de referencia para el cálculo de los ángulos, y en función de estos ángulos la altura de una montaña, se puede realizar de forma más exacta y más rápida.

Hasta ahora, la altura oficial del Everest siempre ha sido de 8.848 metros, pero está por definirse su altura en la actualidad.

Recuperado de: <http://lasmilrespuestas.blogspot.com.co/2009/07/como-se-midio-el-monte-everest.html> y [http://www.lainformacion.com/mundo/como-se-mide-una-montana-tan-alta-como-el-everest\\_I4FxfqE833ztFbteVjXqb5/](http://www.lainformacion.com/mundo/como-se-mide-una-montana-tan-alta-como-el-everest_I4FxfqE833ztFbteVjXqb5/)



## FICHA DE OBSERVACIÓN DE LA CALIDAD, VELOCIDAD Y COMPRENSIÓN DE LA LECTURA

Para el (la) docente evaluador(a)

Nombre del (de la) estudiante: \_\_\_\_\_

Grado escolar: \_\_\_\_\_

Institución educativa: \_\_\_\_\_ Día \_\_\_\_ Mes \_\_\_\_ Año \_\_\_\_

Hora de inicio \_\_\_\_\_ Hora de terminación de la lectura del texto \_\_\_\_\_

**Pídale al estudiante QUE EMPIECE A LEER EL TEXTO EN VOZ ALTA. ACTIVE EL CRONÓMETRO EN EL MISMO MOMENTO EN QUE EL (LA) ESTUDIANTE INICIA LA LECTURA. Mientras él o la estudiante lee el texto en voz alta, usted debe registrar los rasgos visibles del proceso y hacer el conteo de palabras.**

Rasgos en el tejido de la lectura - palabras mal leídas (mal pronunciadas) -cambio de palabras – omisiones –saltos de líneas-	Numero de	Omisiones	Cambios de	Palabras mal	Anomalías de	Faltas de pausas	Hace o no autocorrección
<b>¿CÓMO SE MIDIÓ LA ALTURA DEL MONTE EVEREST?</b>	8						
En la antigüedad, se utilizaba un método de deducción basándose en la presión atmosférica. Justamente lo que se utilizaba era un barómetro, para medir la presión existente a determinada altura. La presión será menor en la cumbre de una montaña, y mayor en la base, por lo que a medida que se sube a la montaña, se reduce la	76						
A fin de calcular la altura del monte Everest, en un inicio se aplicaron técnicas topográficas clásicas. Primero se midió una línea base de varios kilómetros, a lo largo de un terreno cuya	41						
La cima de la montaña podía verse desde ambos extremos de la línea y se utilizó un teodolito - instrumento de precisión- para determinar los	32						
Conociendo dos ángulos y la longitud de un lado de un triángulo pueden calcularse los demás lados y, con cálculos posteriores, la altura. Los topógrafos midieron el Everest desde seis lugares, y obtuvieron cifras distintas que fluctuaban entre 8.836 (6 PALABRAS) m y 8.847 (6 PALABRAS) m. El promedio fue de 8.839 (6 PALABRAS) m, pero finalmente se acordó fijarla en 8.840 (4 PALABRAS) m.	79						
La jerarquía del Everest como la montaña más alta del mundo fue indudable hasta 1986, cuando George Wallerstein, de la Universidad de Washington, aplicando un método diferente proclamó que otro monte del Himalaya, el K-2 (2 PALABRAS) podía ser 11 metros más alto.	42						

<p>La aseveración de Wellerstein fue tan asombrosa que en 1987 una expedición italiana decidió comprobarla. Los investigadores colocaron receptores en el Everest y el monte K-2 (2PALABRAS), y utilizaron un sistema de señales para establecer su altura y posición exactas. Esto era decisivo ya que las discrepancias en la altura de las montañas obedecen a errores en la altitud de la línea base a partir de la cual se hacen los cálculos.</p>	72						
<p>El grupo, dirigido por el geólogo Ardito Desio, calculó la altitud de las dos cumbres con teodolitos ubicados donde se habían puesto los receptores. Su conclusión fue que Wellerstein</p>	50						
<p>Aunque, después del terrible terremoto que devastó Nepal el 25 de abril de 2015 (3 PALABRAS) se elevará el ritmo de crecimiento del Everest que suele aumentar un centímetro a lo alto cada año y 3,5 (3 PALABRAS) hacia la zona norte. "El Everest es el producto de la colisión de la placa Índica que migró al norte durante los últimos 50 millones de años. Al migrar hacia el norte se produjo la colisión con la placa Euroasiática generando la cordillera con mayor número de 8 miles del mundo", explica a este periódico Luis Suárez, presidente del colegio de Geólogos de España.</p>	102						
<p>"Con el terremoto se produce un acrecentamiento de todos los movimientos. Aún no tenemos los datos pero los estudios dirán que ha producido el terremoto en cuanto al levantamiento se refiere. Estos movimientos se acrecentarán mucho debido al terremoto. Aumentará de altura aunque no tengamos los datos. ¿Cuánto se levantará? Aún no lo sabemos. Este año tendremos la información", aclara uno de los mejores geólogos de España.</p>	67						
<p>"Eso es fácil. Al introducirse la placa índica por debajo de la placa euroasiática se produce un levantamiento. Como cuando se mete la mano por debajo de la alfombra. Cuando hay una acumulación así de energía se produce un terremoto", espeta.</p>	41						
<p>Con esta mar de informaciones surge una pregunta: ¿Cómo se mide una montaña tan alta como el Everest en la actualidad?</p>	21						

Se mide a través del GPS Los sistemas de geoposicionamiento Satelital (GPS) utilizan el mismo principio de triangulación de un teodolito, pero en lugar de establecer puntos aleatorios sobre la tierra, se puede apoyar con el uso de un satélite en órbita para establecer la distancia existente entre diferentes puntos. De esta forma, el establecimiento de puntos de referencia para el cálculo de los ángulos, y en función de estos ángulos la altura de una montaña, se puede realizar de forma más exacta y más rápida.	86						
Hasta ahora, la altura oficial del Everest siempre ha sido de 8.848 (6 PALABRAS) metros, pero está por definirse su altura en la actualidad.	27						
<b>Observaciones adicionales:</b>							

#### Niveles de velocidad de lectura

Velocidad de lectura	GRADO 10°
Muy rápida (MR)	214
Rápida (R)	194-213
Medio alta (MA)	174-193
Medio bajo (MB)	154-173
Lenta (L)	135-153
Muy lenta (ML)	134

#### VELOCIDAD

##### Pretest

Número de palabras leídas al cumplir el minuto \_\_\_\_\_  
 Tiempo que le tomó leer todo el texto: \_\_\_\_\_

##### Postest

Número de palabras leídas al cumplir el minuto \_\_\_\_\_  
 Tiempo que le tomó leer todo el texto: \_\_\_\_\_

## Anexo 6. Lectura con preguntas diseñadas con base en los niveles de lectura comprensiva

### PREGUNTAS DE ECUERDO CON LOS NIVELES DE COMPRENSIÓN LECTORA

#### ¿CÓMO SE MIDIÓ LA ALTURA DEL MONTE EVEREST?

En la antigüedad, se utilizaba un método de deducción basándose en la presión atmosférica. Justamente lo que se utilizaba era un barómetro, para medir la presión existente a determinada altura. La presión será menor en la cumbre de una montaña, y mayor en la base, por lo que a medida que se sube a la montaña, se reduce la presión, y de esas medidas, se realizaban los cálculos para establecer la altura aproximada de las montañas.



A fin de calcular la altura del monte Everest, en un inicio se aplicaron técnicas topográficas clásicas. Primero se midió una línea base de varios kilómetros, a lo largo de un terreno cuya altitud sobre el nivel del mar se conocía.

La cima de la montaña podía verse desde ambos extremos de la línea y se utilizó un teodolito - instrumento de precisión- para determinar los ángulos formados con respecto a la línea base.

Conociendo dos ángulos y la longitud de un lado de un triángulo pueden calcularse los demás lados y, con cálculos posteriores, la altura. Los topógrafos midieron el Everest desde seis lugares, y obtuvieron cifras distintas que fluctuaban entre 8.836 m y 8.847 m. El promedio fue de 8.839 m, pero finalmente se acordó fijarla en 8.840 m.

La jerarquía del Everest como la montaña más alta del mundo fue indudable hasta 1986, cuando George Wellerstein, de la Universidad de Washington, aplicando un método diferente proclamó que otro monte del Himalaya, el K-2 podía ser 11 metros más alto.

La aseveración de Wellerstein fue tan asombrosa que en 1987 una expedición italiana decidió comprobarla. Los investigadores colocaron receptores en el Everest y el monte K-2, y utilizaron un sistema de señales para establecer su altura y posición exactas. Esto era decisivo ya que las discrepancias en la altura de las montañas obedecen a errores en la altitud de la línea base a partir de la cual se hacen los cálculos.

El grupo, dirigido por el geólogo Ardito Desio, calculó la altitud de las dos cumbres con teodolitos ubicados donde se habían puesto los receptores. Su conclusión fue que Wellerstein estaba equivocado: el Everest resultó tener 8.872 m: 256 más que el K-2.

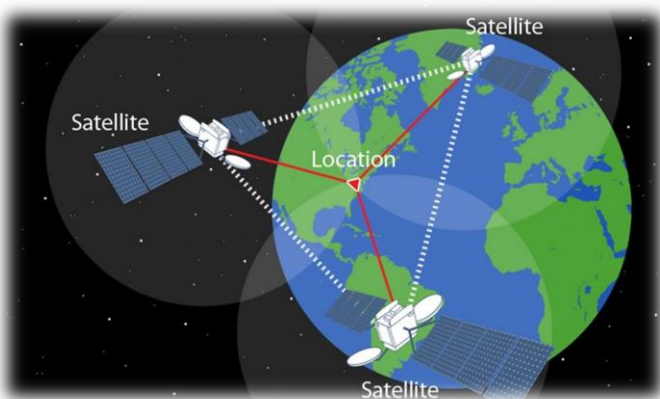
Aunque, después del terrible terremoto que devastó Nepal el 25 de abril de 2015 se elevará el ritmo de crecimiento del Everest que suele aumentar un centímetro a lo alto cada año y 3,5 hacia la zona norte. "El Everest es el producto de la colisión de la placa Índica que migró al norte durante los últimos 50 millones de años. Al migrar hacia el norte se produjo la colisión con la placa Euroasiática generando la cordillera con mayor número de 8 miles del mundo", explica a este periódico Luis Suárez, presidente del colegio de Geólogos de España.

"Con el terremoto se produce un acrecentamiento de todos los movimientos. Aún no tenemos los datos pero los estudios dirán que ha producido el terremoto en cuanto al levantamiento se refiere. Estos movimientos se acrecentarán mucho debido al terremoto. Aumentará de altura aunque no tengamos los

datos. ¿Cuánto se levantará? Aún no lo sabemos. Este año tendremos la información", aclara uno de los mejores geólogos de España.

"Eso es fácil. Al introducirse la placa índica por debajo de la placa euroasiática se produce un levantamiento. Como cuando se mete la mano por debajo de la alfombra. Cuando hay una acumulación así de energía se produce un terremoto", espeta.

Con esta mar de informaciones surge una pregunta: ¿Cómo se mide una montaña tan alta como el Everest en la actualidad?



Se mide a través del GPS. Los sistemas de geoposicionamiento Satelital (GPS) utilizan el mismo principio de triangulación de un teodolito, pero en lugar de establecer puntos aleatorios sobre la tierra, se puede apoyar con el uso de un satélite en órbita para establecer la distancia existente entre diferentes puntos. De esta forma, el establecimiento de puntos de referencia para el cálculo de los ángulos, y en función de estos ángulos la altura de una montaña, se puede realizar de forma más exacta y más rápida.

Hasta ahora, la altura oficial del Everest siempre ha sido de 8.848 metros, pero está por definirse su altura en la actualidad.

Recuperado de: <http://lasmilrespuestas.blogspot.com.co/2009/07/como-se-midio-el-monte-everest.html> y [http://www.lainformacion.com/mundo/como-se-mide-una-montana-tan-alta-como-el-everest\\_l4FxfqE833ztFbteVjXqb5/](http://www.lainformacion.com/mundo/como-se-mide-una-montana-tan-alta-como-el-everest_l4FxfqE833ztFbteVjXqb5/)

### RESPONDAN LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE ACUERDO CON LA LECTURA:

De acuerdo con el texto anterior responde las siguientes preguntas:

- El sentido de la palabra DEDUCCIÓN en el contexto del primer párrafo de la lectura es:
  - Suponer
  - Calcular
  - Sospechar
  - Dudar
- La expresión "altitud sobre el nivel del mar", se refiere:
  - a la distancia vertical de un punto de la Tierra respecto al nivel del mar
  - a la distancia horizontal de un punto de la Tierra respecto al nivel del mar
  - a la distancia por debajo del nivel del mar
  - a la distancia de la tierra con respecto a un punto en el centro de la tierra
- La expresión "La aseveración de Wellerstein fue tan asombrosa" se refiere a:
  - Una afirmación
  - Una contradicción
  - Una versión
  - Una prueba irrefutable
- En el párrafo No. 10 la palabra "espeta" se refiere a :
  - Atravesar con una lanza
  - Contradecir una idea

- C. Afianzarse a un sitio
  - D. Expresar una idea
5. La idea principal de la lectura es:
- A. La discusión de los científicos
  - B. Avances en los instrumentos de medición
  - C. El monte más alto del mundo
  - D. Los triángulos
6. A partir de la lectura se puede deducir que en la actualidad la altura del monte Everest:
- A. Aumentó debido al terremoto de Nepal
  - B. Permanece debido a que su altura no puede ser transformada
  - C. Aumentó, aunque no puede ser medida
  - D. Aumentó debido a los cambios climáticos
7. La cifra que fluctúan entre 8.836 m y 8.847 m es:
- A. 8.835 m
  - B. 8.836 m
  - C. 8.846 m
  - D. 8.847 m
8. De acuerdo con la lectura se puede inferir que el TEODOLITO:
- A. Calcula con exactitud las medidas de longitud
  - B. Necesita de la medida de los ángulos y los lados de un terreno
  - C. La altitud interfiere con la medición exacta del Teodolito
  - D. La longitud interfiere con la medición exacta del Teodolito
9. A partir del contenido del texto se infiere que:
- A. No existen medidas absolutas en la naturaleza
  - B. La naturaleza no permite cambios
  - C. Es importante medir las alturas con el teodolito
  - D. La presión es un instrumento de medida
10. De acuerdo con el texto a nivel científico se infiere que:
- A. Los científicos llegan a acuerdos acerca de sus demostraciones
  - B. Afirman una teoría a partir de sus percepciones
  - C. Comprueban la veracidad de una teoría
  - D. Crean apasionadamente en la veracidad de una teoría

### **PREGUNTAS ABIERTAS**

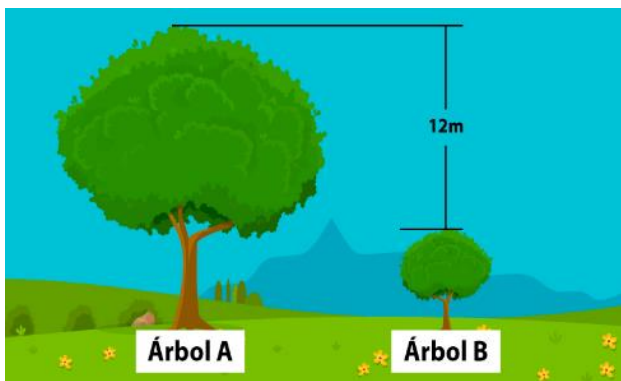
11. ¿Qué pretende informar el autor con el texto?
12. ¿Cómo asumes la postura de los científicos nombrados en el texto?
13. ¿Cuál es tu opinión personal con respecto al texto? (De acuerdo con lo que le llamó la atención en el texto)

## Anexo 7. Pre-test y post-test de conocimientos sobre el Teorema del Coseno

NOMBRE DEL ALUMNO: \_\_\_\_\_ GRADO: \_\_\_\_\_

Señala con una equis (X) la respuesta que consideres correcta.

1. Observa la siguiente imagen



La altura del árbol A, corresponde al triple de la altura del árbol B. La altura del árbol A es:

- A. 36 metros.
- B. 18 metros.
- C. 6 metros.
- D. 24 metros.

2. Un florista ha realizado tres ramos cada uno con una docena de rosas, 5 amapolas, y el triple de margaritas que de amapolas. ¿Cuántas flores hay en los tres ramos?

- A.  $(12+5+3 \times 5) \times 3$
- B.  $12+5+3 \times 5$
- C.  $(12+5+3 \times 5) \div 3$
- D.  $12+5+3 \div 5$

### RESPONDE LAS PREGUNTAS DE LA 3 A LA 4 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

La Hidra de Lerna es un personaje mitológico que aparece en algunas historias, como la de las 12 pruebas de Hércules.

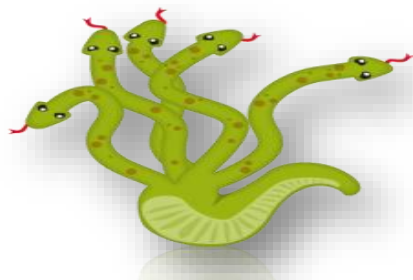
La Hidra era un monstruo con 1 cabeza, pero si se le cortaba, le nacían 2 cabezas en su lugar. Si un héroe intenta vencerlo cortarle todas las cabezas en un día.

3. ¿Cuántas cabezas tendría la Hidra al tercer día?

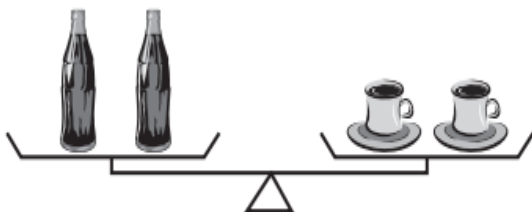
- A.  $2^2$
- B.  $3^2$
- C.  $12^2$
- D.  $2^3$

4. ¿Cuántas cabezas tendría al cabo de 10 días intentando vencerla?

- A.  $10^2$
- B.  $2^2$
- C.  $2^{10}$
- D.  $10^2$



5. La balanza de la figura está en equilibrio. La ecuación  $2(x + y) = 2z$ , donde x corresponde a la masa de cada plato, y a la masa de cada pocillo y z a la masa de cada botella, representa la situación.



¿Cuáles de las siguientes son posibles masas, en gramos, de los objetos?

- A.  $x = 20$ ,  $y = 15$  y  $z = 35$
- B.  $x = 40$ ,  $y = 10$  y  $z = 30$
- C.  $x = 35$ ,  $y = 15$  y  $z = 20$
- D.  $x = 30$ ,  $y = 40$  y  $z = 10$

6. Se quieren plantar 144 árboles en un terreno de forma cuadrada. ¿Cuántas filas de árboles habrá?



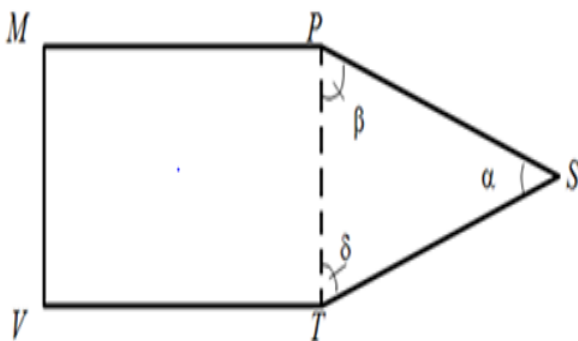
- A. 12
- B. 13
- C. 144
- D. 10

7. Cuando en un grupo cada persona abraza a otra del grupo una sola vez, el número total de abrazos, se calcula mediante la expresión  $a = \frac{n(n-1)}{2}$  donde  $n$  es el número de personas en el grupo.

¿Cuál es el valor de  $a$  para un grupo de 5 personas?

- A. 3
- B. 5
- C. 10
- D. 15

8. En la ilustración aparece el pentágono MPSTV dividido en dos regiones: el rectángulo MPTV y el triángulo PST;  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  son los ángulos interiores del triángulo



Si la medida del ángulo  $\alpha$  es la mitad de la medida del ángulo  $\beta$  y la medida del ángulo  $\delta$  es el doble de la del ángulo  $\alpha$ . La medida del  $\angle$  MPS es:

- A.  $108^\circ$
- B.  $144^\circ$
- C.  $150^\circ$
- D.  $162^\circ$



9. Se construyeron cuatro cuadriláteros de lados  $x$ ,  $y$ ,  $2x$ ,  $2y$ , y se le asignaron a las variables  $x$  y  $y$  los siguientes valores:

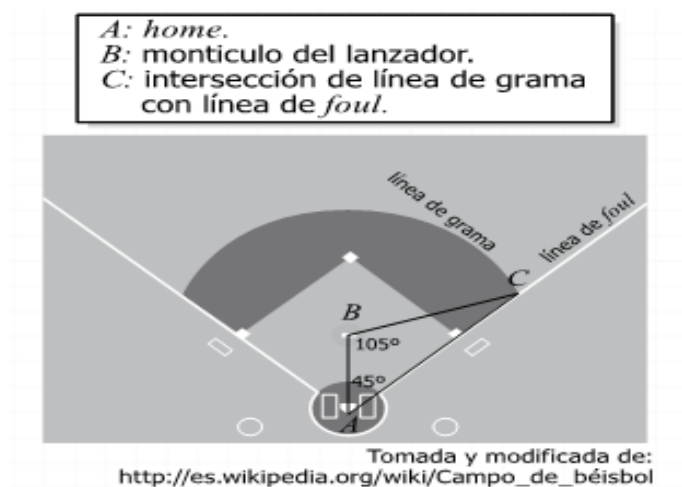
Cuadrilátero (1)	$X=6$	$Y=6$
Cuadrilátero (2)	$X=5$	$Y=4$
Cuadrilátero (3)	$X=6.5$	$Y=5.5$
Cuadrilátero (4)	$X=10$	$Y=7$

¿En cuál de los cuadriláteros construidos la suma de sus lados es 36?

- A. En el cuadrilátero (1)
- B. En el cuadrilátero (2)
- C. En el cuadrilátero (3)
- D. En el cuadrilátero (4)

### RESPONDE LAS PREGUNTAS DE LA 10 A LA 12 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

La gráfica muestra una sección de una cancha de béisbol, los vértices del triángulo ABC están determinados por el *home*, el montículo del lanzador y la intersección de la línea de grama y la línea de foul.



10. El  $\angle BAC$  mide  $45^\circ$  y  $\angle CBA$  mide  $105^\circ$   
La medida del  $\angle ACB$  es:

- A.  $5\pi/36$  Rad.
- B.  $\pi/6$  Rad.
- C.  $7\pi/36$  Rad.
- D.  $\pi/4$  Rad.

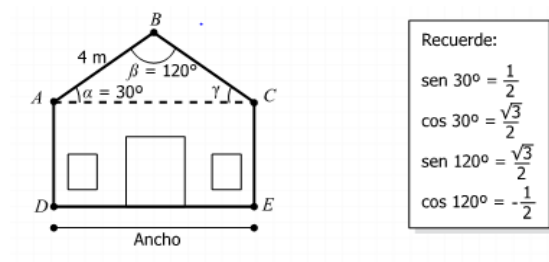
11. El lado BC, también se denomina:

- A. a
- B. c
- C. b
- D. AB

12. El  $\Delta ABC$  es un triángulo:

- A. Rectángulo
- B. Equilátero
- C. Obtusángulo
- C. Isósceles

13. La figura representa la vista total de una casa.

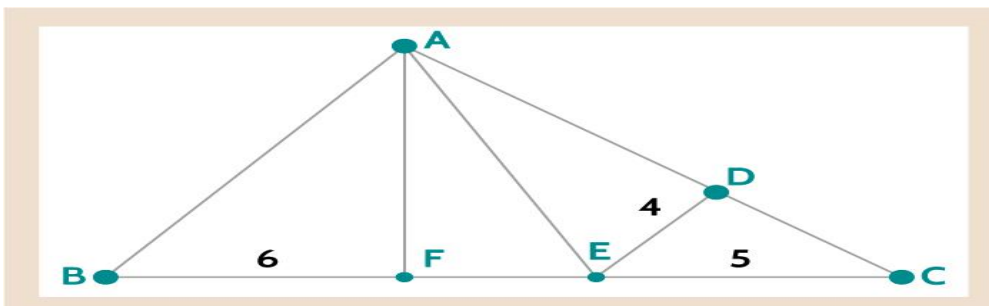


ADEC es un rectángulo, el ángulo  $\alpha$  y  $\gamma$  son congruentes. El ancho de la casa es:

- A. 2 m
- B.  $2\sqrt{3}$  m
- C. 4 m
- D.  $4\sqrt{3}$  m

**RESPONDE LAS PREGUNTAS DE LA 14 A LA 16 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN**

Observa la siguiente figura:



14. Si  $\angle FAE \cong \angle EAD$  ¿Cuánto mide  $\overline{BE}$ ?
- A. 4  
B. 10  
C.  $35^\circ$   
D.  $30^\circ$
15. Usa Transportador para hallar la medida del  $\angle ABF$
- A.  $35^\circ$   
B.  $90^\circ$   
C.  $65^\circ$   
D.  $55^\circ$

16. En la figura anterior se encuentran el siguientes triángulo oblicuángulo:

- A.  $\triangle ABF$   
B.  $\triangle AFE$   
C.  $\triangle ABE$   
D.  $\triangle AFC$

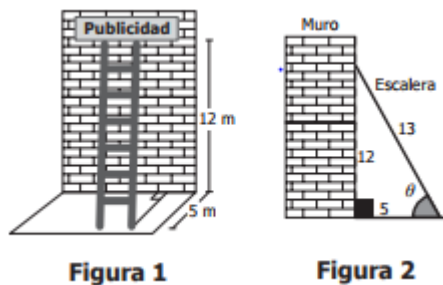
17. El profesor de matemáticas propone a sus estudiantes la siguiente expresión  
 $10^2 = 9^2 + 7^2 - 2y$

El valor de Y es:

- A. 2  
B. 13  
C. 15  
D. 10

**RESPONDE LAS PREGUNTAS DE LA 18 A LA 19 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN**

Para fijar un aviso publicitario se coloca sobre un muro una escalera a 12 metros del suelo (Ver figura 1). Las figuras, además, muestran la situación y algunas de las medidas involucradas.



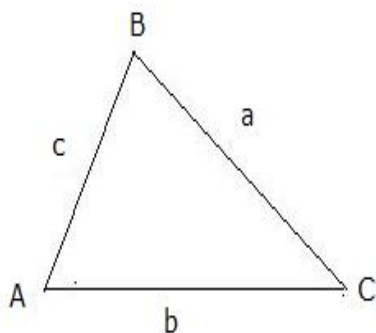
18. ¿Cuál de las siguientes expresiones permite determinar el ángulo  $\theta$ ?

- A.  $\arctan(13/5)$
- B.  $\arccos(12/5)$
- C.  $\arccos(5/13)$
- D.  $\arcsen(5/13)$

19. ¿Cuál es el coseno del ángulo  $\theta$  que forman el suelo y la escalera?

- A.  $12/13$
- B.  $12/5$
- C.  $5/13$
- D.  $13/5$

20. En el triángulo ABC se tiene que el ángulo A mide  $60^\circ$  y se definen las siguientes ecuaciones:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

**RECUERDA QUE:**  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Además se sabe que,  $b = 6$  y  $b = 3c$ .

¿Cuál es la medida del lado  $a$ ?

- A.  $\sqrt{28}$
- B. 28
- C. 12
- D.  $\sqrt{12}$

**PREGUNTAS TOMADAS Y ADAPTADAS DE ACUERDO CON LA INTENCIÓN DEL EVALUADOR DE:**

<https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/problemas-con-potencias/>

Pruebas saber

liberadas de 5 y 9:

<https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/problemas-con-potencias/>  
liberadas de 5 y 9:


Pruebas saber

<https://www.mundoprimeria.com/juegos-matematicas/juego-combinadas/>

**Preguntas liberadas del ICFES**

**Preguntas de las pruebas “SUPERATE CON EL SABER”**

## Anexo 8. Actividades que representan los contenidos previos y las habilidades de lectura comprensiva necesarias para el aprendizaje del Teorema del Coseno

	GUÍA -TALLER			
	CÓDIGO: GACA-FOR-39	VERSIÓN: 1	FECHA: 27-09-2011	PÁGINA 1 DE 1

Estudiante No. 1: \_\_\_\_\_ Tiempo de lectura vertical: \_\_\_\_\_ y Horizontal: \_\_\_\_\_

Estudiante No. 1: \_\_\_\_\_ Tiempo de lectura vertical: \_\_\_\_\_ y Horizontal: \_\_\_\_\_

### LECTURA VERTICAL Y HORIZONTAL


**OBJETIVO:** Acostumbrar a los ojos a mirar el punto de máxima visibilidad, sin pronunciar.

No mover la cabeza. Sólo los ojos. Mirar el punto. Leer en bloque simultáneamente

<p>MAS DIFERENCIA</p> <p>•</p> <p>ADICION SUSTRACCION</p> <p>•</p> <p>MULTIPLICACION FACTOR</p> <p>•</p> <p>DIVISOR SIGNO</p> <p>•</p> <p>CUATRO TREINTA</p> <p>•</p> <p>TRIPlicAR LA RESTA SEXTO DUPLICAR</p> <p>•</p> <p>1964 MITAD IGUALDAD</p> <p>•</p> <p>SUMA CANTIDAD</p> <p>•</p> <p>CUBO CUBICA 3425</p> <p>ADICIONAR MITAD DE 7890</p> <p>•</p> <p>TRIPLE 3x25</p> <p>•</p> <p>DIVISION CUANTAS VECES</p>	<p>SUMANDO DIVISION 3459÷3</p> <p>•</p> <p>7964-- 3456 RADICACION SUSTRAYENDO RESIDUO</p> <p>•</p> <p>DIVIDENDO POTENCIA</p> <p>•</p> <p>187 PRODUCTO PERDER 455 QUINTA PARTE</p> <p>•</p> <p>343 EXPONENTE 20 RAIZ DISMINUIR INDICE</p> <p>•</p> <p>SUBRADICAL MINUENDO</p> <p>•</p> <p>CUADRADO RESTA PARTIR OPERACIONES AUMENTAR</p> <p>•</p> <p>DOS O MAS FACTORES</p> <p>•</p> <p>LA RAIZ CUADRADA DE</p> <p>•</p> <p>UN NUMERO ESTA CONTENIDO EN OTRO NUMERO</p>	<p>UN NUMERO SERA AQUEL</p> <p>•</p> <p>NUMERO QUE MULTIPLICADO POR SI MISMO DE COMO</p> <p>•</p> <p>RESULTADO EL PRIMER NUMERO</p> <p>•</p> <p>DE ACUERDO CON LA LECTURA COLOCA UN TITULO RESTAR SUMAR 124+2345</p> <p>•</p> <p>RESULTADO OPERAR MITAD TERCERA PARTE DE 198</p> <p>•</p> <p>LAS OPERACIONES BASICAS EN</p> <p>•</p> <p>MATEMATICAS SON CUATRO LA SUMA LA RESTA</p> <p>•</p> <p>RADICANDO FACTORIZACION DECRECER</p> <p>•</p> <p>COCIENTE</p>	<p>LA DIVISION</p> <p>•</p> <p>Y LA MULTIPLICACION CON ESTAS CUATRO OPERACIONES</p> <p>•</p> <p>SE DESARROLLA TODA LA BASE DE LAS MATEMATICAS</p> <p>•</p> <p>DESDE LAS MAS SENCILLAS A LAS MAS COMPLICADAS OPERACIONES</p> <p>•</p> <p>LA MULTIPLICACION ES LA OPERACION MATEMATICA</p> <p>•</p> <p>QUE SIGNIFICA UNA SUMA REPETIDA</p> <p>•</p> <p>SUMAMOS LA CANTIDAD</p> <p>•</p> <p>TANTAS VECES COMO SE INDICA</p> <p>•</p> <p>DECRECER DISMINUIR TIEMPO ESTUDIANTE</p>	<p>JUNTAR 1984+4256</p> <p>•</p> <p>EN EL FACTOR</p> <p>•</p> <p>COLOCAR UN TITULO A LA LECTURA</p> <p>•</p> <p>RELACIONA DIFERENTES GRUPOS DE PALABRAS</p> <p>•</p> <p>ESCRIBE UN EJEMPLO DE CADA UNA DE LAS OPERACIONES NOMBRADAS</p> <p>•</p> <p>ESTA LECTURA DE BE REALIZARSE EN FORMA</p> <p>•</p> <p>VERTICAL EN UN TIEMPO DE 30 SEGUNDOS Y EN FORMA</p> <p>•</p> <p>HORIZONTAL EN 1 MINUTO</p> <p>•</p> <p>SOLO DEBES MOVER LOS OJOS PARA EJERCITARLOS</p>
---	--	---	---	---

### PREGUNTAS DE COMPRENSIÓN DE LECTURA

1. Coloca un título a la lectura.
2. Relaciona un conjunto de palabras de las encontradas en la lectura de acuerdo con una característica en común. (Escribe cinco (5) conjuntos diferentes).
3. Escribe un ejemplo de cada una de las operaciones nombradas en la figura y señala el nombre de sus elementos. Los cuales encuentras en la lectura.

	GUÍA - TALLER			
	CÓDIGO: GACA-FOR-39	VERSIÓN: 1	FECHA: 27-09-2011	PÁGINA 1 DE 1

Estudiante No. 1: \_\_\_\_\_ Tiempo de lectura: \_\_\_\_\_

Estudiante No. 2: \_\_\_\_\_ Tiempo de lectura: \_\_\_\_\_

## LECTURA CON LÍNEAS DIVISORIAS

### OBJETIVOS:

- Evitar que la línea marcada afecte la lectura.
- Insistir en el movimiento automático del ojo.

**TIEMPO:** 1 segundo por renglón

## ECUACIONES

Recomendaciones:

Según los expertos en Matemáticas, una ecuación (concepto derivado del latín *aequatio*) constituye una igualdad donde aparece como mínimo una incógnita que exige ser develada por quien resuelve el ejercicio. Se reconoce como miembros a cada una de las expresiones algebraicas que permiten conocer los datos (es decir, los valores ya conocidos) y las incógnitas (los valores que no se han descubierto) vinculados a través de diversas operaciones matemáticas.

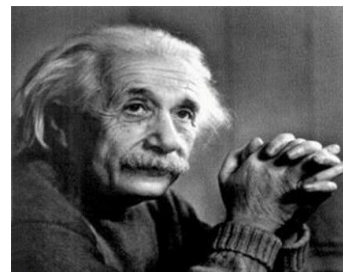
Cabe resaltar que los datos incluidos en una ecuación pueden ser: Números constantes, coeficientes o **variables**: Las incógnitas, por su parte, están representadas por letras que sustituyen al valor que se intenta hallar.

$$2x + 1 = 7$$

Diagrama de la ecuación  $2x + 1 = 7$  con anotaciones:

- Las partes  $2x$  y  $1$  están etiquetadas como "términos".
- El signo  $=$  está etiquetado como "signo 'igual'".
- El término  $x$  está etiquetado como "incognita".

Las ecuaciones sirven básicamente, para resolver cualquier tipo de problemas, ya sean matemáticos de la vida diaria o en cualquier rama de una ciencia. Se usan ecuaciones por ejemplo cuando se hacen compras, muchas veces no se sabe cuántas frutas y verduras se debe comprar con el dinero y allí se hace la siguiente cuenta:




Frutas\*(precio de la fruta)+verduras\*(precio de las verduras)= dinero que se tiene disponible.

Sin duda, la ecuación más famosa e incomprensible es la de la Teoría de la Relatividad, de Albert Einstein, que representa un paso enorme para la ciencia del siglo XX.

Después de leer detenidamente el texto anterior contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es una ecuación?
2. Resuelve la siguiente ecuación:  $3x^2 + 24 = 27$
3. Halla el valor de X en la siguiente ecuación si  $Y=3$  y  $Z=5$ ;  $Y^2 = Z^2 + X^2 - 2YZ$
4. Halla el valor de X en la siguiente ecuación  $X^2 = 6Y - 2$ , si  $Y = 1/2$
5. Plantea una ecuación desde una situación de tu cotidianidad y resuélvela.
6. Consulta ¿Cuál es la ecuación de la teoría de la relatividad?

	GUÍA - TALLER			
	CÓDIGO: GACA-FOR-39	VERSIÓN: 1	FECHA: 27-09-2011	PÁGINA 1 DE 1

Estudiante No. 1: \_\_\_\_\_ Tiempo de lectura: \_\_\_\_\_

Estudiante No. 2: \_\_\_\_\_ Tiempo de lectura: \_\_\_\_\_

#### OBJETIVOS:

- Fortalecer el aprendizaje del concepto de ecuaciones a través de la lectura.
- Medir el tiempo de lectura al compañero.
- Realizar la lectura en velocidad, calidad y comprensión.

#### INSTRUCCIONES:

- Realiza la lectura de la página 74 del libro de GRADO 8° “TODOS POR UN NUEVO PAIS”
- Ejecuta la lectura dos (2) veces, midiendo el tiempo de la velocidad en que se realizó la lectura y luego medir el tiempo con velocidad y calidad.

Responder las siguientes preguntas

1. Analiza las soluciones de las ecuaciones encontradas en la lectura y comprueba si son veraces los resultados-
2. Halla el valor de Y de la ecuación  $10^2 = 5^2 + 8^2 - 2Y$
3.  $2(X + Y) = 3Z$ , si remplazamos  $X= 2$ ,  $Y=3$  y  $Z= 10$ . Se obtiene una igualdad.




4. Un docente de Educación Física forma pirámides humanas. La expresión que representa el número de personas necesarias para conformar la pirámide es  $n(n+1)/ 2$  Donde n es el número de niveles. ¿Cuántas personas son necesarias para una pirámide de 3 niveles?

IMAGEN RECUPERADA DE:

<https://www.youtube.com/watch?v=evVKOMM6I7g>

5. Se construye un triángulo con lados X, 2X y 3X, si  $X=5$ . ¿Cuál es la suma de los lados?

	GUÍA -TALLER			
	CÓDIGO: GACA-FOR-39	VERSIÓN: 1	FECHA: 27-09-2011	PÁGINA 1 DE 1

Estudiante No. 1: \_\_\_\_\_ Tiempo de lectura: 1. \_\_\_\_ y 2. \_\_\_\_\_

Estudiante No. 2: \_\_\_\_\_ Tiempo de lectura: 1. \_\_\_\_ y 2. \_\_\_\_\_

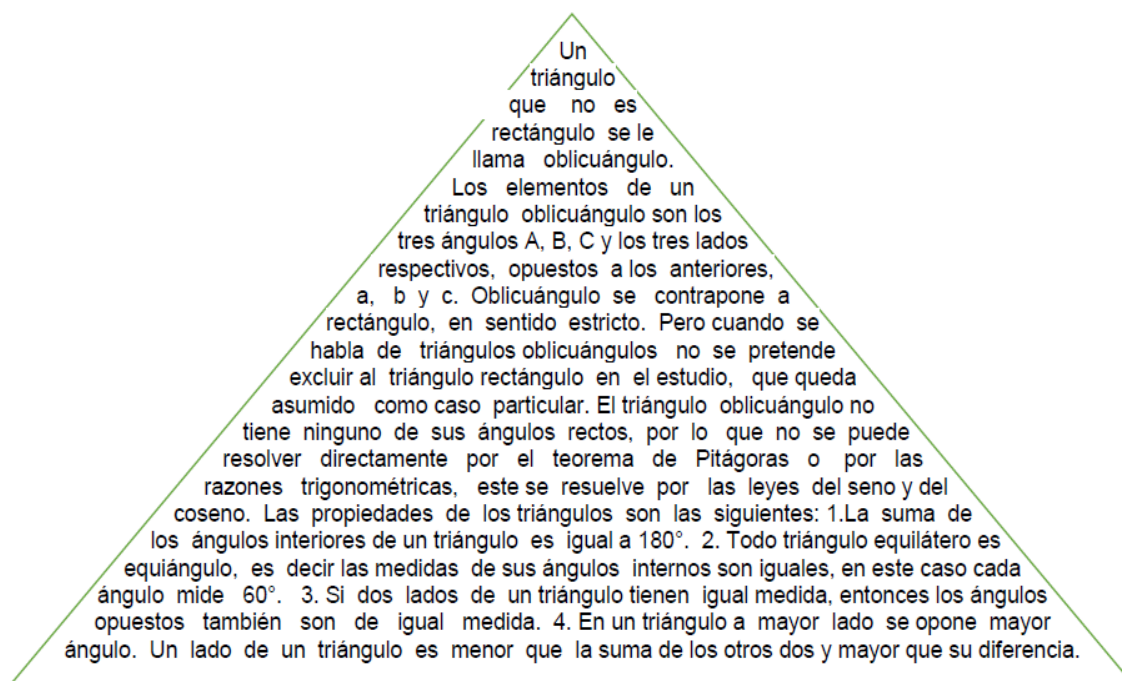
## LECTURA EN FORMA DE TRIÁNGULO

### OBJETIVO:

- Ampliar el campo visual
- Leer en grupo por párrafos para evaluar la velocidad y calidad de la lectura.
- Desarrollar habilidades de fluidez de lectura asociado al concepto de triángulos oblicuángulos (Lectura en forma de triángulo)

**INSTRUCCIÓN:** Compara los tiempos con tu compañero y realiza la lectura para determinar el tiempo empleado.

## TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

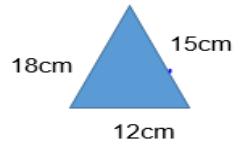


## PREGUNTAS DE COMPRENSIÓN LECTORA


Después de leer detenidamente el texto anterior contesta las siguientes preguntas:

1. Dibuja un triángulo oblicuángulo y señala en él sus elementos.
2. Representa un triángulo oblicuángulo y explica si se cumplen cada una de las propiedades nombradas en el texto.





3. ¿A qué tipo de triángulo corresponde la figura presentada?, justifica tu respuesta.
4. Medir uno de los ángulos de la base del triángulo de la lectura. ¿Cuál es la medida de este ángulo?
5. Construye un triángulo oblicuángulo cuya medida de uno de sus ángulos sea  $120^\circ$  y el lado opuesto a este ángulo sea 5cm.

	GUÍA -TALLER		
	CÓDIGO: GACA-FOR-39	VERSIÓN: 1	FECHA: 27-09-2011

Estudiante No. 1: \_\_\_\_\_

Estudiante No. 2: \_\_\_\_\_

### OBJETIVOS:

- Fortalecer el aprendizaje del concepto de razón trigonométrica del coseno a través de la lectura.
- Medir el tiempo de lectura al compañero.
- Realizar la lectura en velocidad, calidad y comprensión.

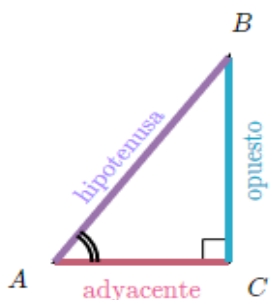
### INSTRUCCIONES:

Realiza la lectura, midiendo el tiempo en que se realizó con velocidad y calidad.  
Se realiza la lectura con el grupo en general por turnos y discutiendo cada párrafo.

### RAZÓN TRIGONOMÉTRICA DEL COSENO

Las razones de los lados de un triángulo rectángulo se llaman razones trigonométricas. Tres razones trigonométricas comunes son: **seno (sin)**, **coseno (cos)** y **tangente (tan)**.

La razón trigonométrica del coseno se define para el ángulo agudo A como sigue:



En estas definiciones los términos opuesto, adyacente e hipotenusa se refieren a las *longitudes* de esos lados.

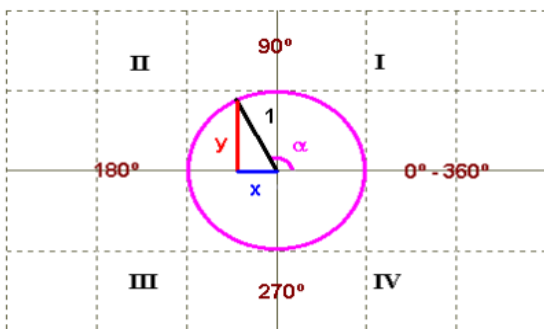
**CAH** Coseno es **A**dyacente entre  
**H**ipotenusa

$$\cos(A) = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

Hasta ahora se han visto razones trigonométricas solamente de ángulos agudos, pero estos conceptos se pueden extender a cualquier ángulo, incluso a los mayores de  $360^\circ$  pues estos se van a asemejar a algún ángulo entre  $0$  y  $360^\circ$  y por tanto sus razones trigonométricas serán iguales.

Las razones trigonométricas no dependen de lo grande que sea el triángulo, sino del ángulo en cuestión. Se supone que nuestro triángulo tiene hipotenusa 1. Este triángulo entonces se puede dibujar dentro de una circunferencia de radio unidad, el radio de la circunferencia sería la hipotenusa del triángulo y el ángulo se empieza a contar desde el eje positivo de las x, es decir el ángulo que se mide es el que forma el radio con el eje positivo x.

A esta circunferencia de radio 1 que tiene el centro en el origen de coordenadas se le llama **circunferencia goniométrica**. Los ángulos se miden desde el eje X y en sentido contrario a las agujas del reloj.

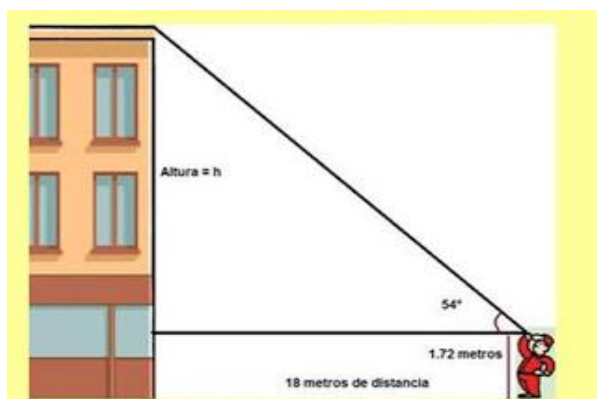


Definimos:  $\text{Coseno}(\alpha) = x$ , es decir que coseno de  $\alpha$  es la medida de X

¿Qué sucede con la longitud de X a medida que el ángulo  $\alpha$  aumenta?

Responder las siguientes preguntas:

1. La razón trigonométrica del coseno depende de la longitud del lado del triángulo o de la medida del ángulo.



2. Una persona observa con un ángulo de  $54^\circ$  lo alto de un edificio; si la persona mide 1.72 metros y está ubicada a 18 metros de la base del edificio. ¿Cuál es la altura en metros del edificio?

3. Si se sabe que:  $\text{Cos } \alpha = 0.5$  ¿Cuál es el valor de  $\alpha$ ?
4. Utiliza la calculadora para hallar:  
 $\text{Cos}(340^\circ)$ ,  $\text{Cos}(200^\circ)$ ,  $\text{Cos}(30^\circ)$ ,  $\text{Cos}(100^\circ)$ . Compara las magnitudes y responde ¿Por qué se obtuvieron valores positivos y negativos?

TOMADO DE: <https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-trig-ratios-intro/a/finding-trig-ratios-in-right-triangles>  
[http://ieszaframagon.com/maticas/4\\_eso/trigonometria/web/otroangulo.htm](http://ieszaframagon.com/maticas/4_eso/trigonometria/web/otroangulo.htm)  
<http://www.xtec.cat/~jlagares/mates/4eso/trigonometria/Trigonometria/trigonometria/angcual.htm>  
<http://profejosedavid.blogspot.com.co/>

### **Anexo 9. Estrategia de aprendizaje para movilizar los conocimientos en torno al Teorema del Coseno**

La estrategia que moviliza los conocimientos adquiridos sobre el Teorema del Coseno termina con la entrega de un producto final, este con el objetivo de promover en el estudiante el desarrollo de habilidades de lectura comprensiva con la búsqueda, selección e interpretación de información proveniente del internet con un propósito claramente definido por el docente, alineado con el contenido bajo consideración (Oliveras & Sanmartí, 2009)

Desde luego, la comprensión inicial alcanzada por los estudiantes de manera individual es posteriormente socializada en estructuras de trabajo cooperativo y discusión con toda la clase. Esta transacción de significados y formas de significar fue orientada por la profesora con el objetivo de dinamizar la discusión y resaltar aspectos claves de las diferentes actividades. Para ello, la profesora es apoyada en el marco teórico propuesto por (Oliveras & Sanmartí, 2009), formuló un conjunto de interrogantes que orientan al estudiante en la elaboración de dicho producto que consiste en una presentación en Power Point. A continuación se describen las preguntas en mención.

*Conjunto de interrogantes que representa los niveles de lectura comprensiva junto con las ideas que estructuran el contenido del Teorema del Coseno.*

<b>PREGUNTAS</b>	<b>NIVELES DE COMPRENSIÓN</b>
1. ¿Qué elementos debe tener el triángulo para aplicar la definición del Teorema del Coseno?	LITERAL
2. Relaciona los elementos del triángulo para representar el lenguaje escrito, la expresión algebraica y la figura geométrica.	INFERENCIAL
3. Resuelve un problema aplicando el Teorema del Coseno (haciendo énfasis en los datos conocidos y desconocidos) y realiza la representación del triángulo y la expresión algebraica, dando argumentos coherentes acerca de la aplicación del Teorema.	INFERENCIAL
4. ¿En qué situaciones reales tiene aplicación el Teorema del Coseno?	CRÍTICO
5. De acuerdo con el punto anterior. ¿Crees importante para el desarrollo de la humanidad la aplicación del Teorema del Coseno?	CRÍTICO

### Anexo 10. Resultados prueba de caracterización de la fluidez lectora. Velocidad

No. Estudiante	Niveles de velocidad lectora	
	Caracterización inicial	Caracterización final
1	MB (157)	MR (214)
2	MB (157)	MR (230)
3	MB (157)	MR (210)
4	MB (160)	MA (180)
5	MB (157)	MA (183)
6	MB (125)	MB (157)
7	MB (157)	MR (230)
8	MB (157)	MR (214)
9	MB (159)	MB (162)
10	ML (125)	MR (214)
11	MA (177)	MR (236)
12	ML (125)	MR (230)
13	MB (160)	R (204)
14	ML (125)	MB (157)
15	ML (125)	MB (157)
16	MB (157)	MR (230)

*Fuente: Elaboración propia, 2018*

### Anexo 11. Rúbrica de seguimiento aprendizaje autónomo

**Trabajo: contribución al aprendizaje autónomo del Teorema del Coseno basada en el desarrollo de habilidades de fluidez y comprensión lectora**

**Objetivo de la actividad:** Valorar los aspectos relacionados con el trabajo realizado durante la estrategia implementada en el aula de matemáticas.

Aspectos a evaluar	Indicadores	BAJO	BASICO	ALTO	SUPERIOR
Dimensión: responsabilidad	Puntualidad en la entrega de los trabajos, a pesar de las dificultades.	Se le dificulta entregar los trabajos o los entrega siempre fuera de plazo.	A menudo entrega los trabajos fuera de plazo o lo hace sin que estén bien acabados.	Casi siempre entrega los trabajos dentro del plazo y bien acabados	Siempre entrega los trabajos dentro del plazo y los acaba con antelación para poder revisarlos.
Dimensión: capacidad de aprendizaje	Análisis y síntesis de la información: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ordenación y explicación coherente de las ideas y conceptos básicos</li> <li>• Identificación correcta de los conceptos fundamentales</li> </ul>	Presenta dificultad al distinguir el nivel de importancia de la información.	Identifica los conceptos importantes, pero concede importancia a algunos que no lo son o no establece todas las relaciones significativas	Selecciona y enumera correctamente los principales conceptos e identifica por sí mismo las relaciones significativas.	Ordena y describe con claridad y originalidad las principales relaciones entre los conceptos fundamentales.
	Aplicación de los conocimientos teóricos a situaciones reales: Selección de un proceso o de procedimientos de entre los que propone el profesor.	Se le hace difícil priorizar entre los procesos o procedimientos propuestos por el profesor, y se bloquea.	Selecciona algunos procesos o procedimientos, pero sin un criterio adecuado.	Utiliza el proceso o procedimiento apropiados de entre los propuestos por el profesor, pero sin justificarlo del todo.	Razona sobre los ajustes entre el proceso o procedimiento más apropiado y los objetivos de aprendizaje, y puede llegar a una nueva propuesta.

	<p>Adaptación a situaciones nuevas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Intercambio de ideas e información con el profesor y los compañeros más expertos</li> <li>• Aprendizaje de los propios errores o de las críticas</li> <li>• Análisis para mejorar</li> </ul>	Se le dificulta reconocer sus errores y las críticas de los demás.	Muestra una actitud pasiva en lo relativo a sus errores.	Acepta las críticas que se le hacen y aprende de sus errores.	Se autocritica y solicita opiniones críticas sobre su trabajo habitualmente para mejorar su grado de cumplimiento.
	Toma de decisiones en ámbitos concretos de trabajo.	Se bloquea en la toma de decisiones o es muy poco consecuente.	A veces carece de coherencia en la toma de decisiones y no toma las decisiones acertadas.	Sabe tomar decisiones acertadas, pero le cuesta justificarlas.	Destaca en la toma de decisiones, acertadas y coherentes, y sabe justificarlas con criterios
Participar y colaborar activamente en las tareas del equipo, y fomentar la confianza, la cordialidad y la orientación en el trabajo conjunto.	Colaboración en la definición y en la distribución de las tareas del trabajo en grupo	Frena el trabajo de los demás.	Solo realiza la parte que el resto del grupo ha decidido llevar a cabo.	Fomenta la organización y la distribución de tareas	Participa en la planificación., recogiendo las intervenciones del resto del grupo, e incorpora propuestas.
	Compartir con el equipo el conocimiento y la información.	Persigue sus objetivos particulares.	Persigue sus objetivos particulares.	Asume los objetivos del grupo.	Promueve y moviliza los objetivos del grupo.
	Implicación en los objetivos del grupo y retroalimentación constructiva	Se le dificulta implicarse y pone trabas.	Presenta dificultad a la hora de implicarse. Acepta las opiniones de los demás y ofrece su punto de vista de modo constructivo.	Fomenta el diálogo constructivo.	Integra e inspira la participación de los demás.

Contribuir a la consolidación y al desarrollo del equipo, favoreciendo la comunicación, la distribución equilibrada de tareas, el clima interno y la cohesión.	Aceptación y cumplimiento de las normas del grupo.	Se le dificulta aceptar y cumplir las normas del grupo.	Intenta modificar las normas del grupo en beneficio propio.	Acepta y cumple las normas del grupo	Participa en el establecimiento de las normas y fomenta nuevas normas para mejorar el funcionamiento del grupo.
	Contribución al establecimiento y a la aplicación de los procesos del trabajo en equipo.	Le cuesta conocer o interesarse en conocer los procesos del equipo.	Conoce, pero no aplica los procesos del equipo.	Aplica los procesos del equipo	Aplica y mejora los procesos del equipo
	Actuación para afrontar los conflictos del equipo y su cohesión	En ocasiones provoca conflictos.	Evita afrontar el conflicto y se muestra pasivo.	Actúa positivamente en la resolución de conflictos.	Capta los conflictos y actúa rápidamente para evitarlos. Soluciona los conflictos.
	Colaboración en la definición y en la distribución de las tareas del trabajo en equipo.	Actúa sin planificación previa.	Improvisa la planificación, haciéndola poco realista.	Planifica en plazos realistas.	Distribuye tareas según las habilidades de los miembros del equipo de modo realista.
Generar nuevas ideas para problemas que se le planteen y transmitirlos adecuadamente al grupo.	Aporta ideas originales para solucionar los problemas presentados con los recursos disponibles	Se limita a repetir ideas.	Propone ideas que no son originales	Propone ideas que pueden solucionar los problemas presentados.	Destaca la originalidad de sus propuestas, que se ajustan a los recursos disponibles.



	Integra los conocimientos de diferentes disciplinas para generar ideas.	Muestra dificultad en integrar conocimiento previo en sus propuestas.	Integra diferentes conocimientos previos, pero no aporta ideas originales.	Integra los conocimientos para aportar ideas originales.	Integra los conocimientos para aportar ideas que mejoren un problema.
	Expresa formalmente las ideas.	Se le dificulta expresar sus ideas con claridad.	Expresa las ideas con dificultad.	Sabe expresar las ideas de modo organizado y estructurado	La manera de expresar las ideas facilita la generación de nuevas ideas por parte de los demás.

Fuente: Adaptada de <http://www.ub.edu/ice/sites/default/files/docs/qdu/26cuaderno.pdf>

## Anexo 12. Resultado de comprensión lectora del estudiante 16

1. El sentido de la palabra DEDUCCIÓN en el contexto del primer párrafo de la lectura es: \*

- A. Suponer  
 B. Calcular  
 C. Sospechar  
 D. Dudar

2. La expresión "altitud sobre el nivel del mar", se refiere: \*

- A. a la distancia vertical de un punto de la Tierra respecto al nivel del mar  
 B. a la distancia horizontal de un punto de la Tierra respecto al nivel del mar  
 C. a la distancia por debajo del nivel del mar  
 D. a la distancia de la tierra con respecto a un punto en el centro de la tierra

3. La expresión "La aseveración de Wellerstein fue tan asombrosa" se refiere a: \*

- A. Una afirmación  
 B. Una contradicción  
 C. Una versión  
 D. Una prueba irrefutable  
 Otro: .....

7. La cifra que fluctúan entre 8.836 m y 8.847 m es: \*

- A. 8.835 m  
 B. 8.836 m  
 C. 8.846 m  
 D. 8.847 m

8. De acuerdo con la lectura se puede inferir que el TEODOLITO: \*

- A. Calcula con exactitud las medidas de longitud  
 B. Necesita de la medida de los ángulos y los lados de un terreno  
 C. La altitud interfiere con la medición exacta del Teodolito  
 D. La longitud interfiere con la medición exacta del Teodolito

9. A partir del contenido del texto se infiere que: \*

- A. No existen medidas absolutas en la naturaleza  
 B. La naturaleza no permite cambios  
 C. Es importante medir las alturas con el teodolito  
 D. La presión es un instrumento de medida

10. De acuerdo con el texto a nivel científico se infiere que: \*

- A. Los científicos llegan a acuerdos acerca de sus demostraciones  
 B. Afirman una teoría a partir de sus percepciones  
 C. Comprueban la veracidad de una teoría

4. En el párrafo No. 10 la palabra "espeta" se refiere a :

- A. Atravesar con una lanza  
 B. Contradecir una idea  
 C. Afianzarse a un sitio  
 D. Expresar una idea

5. La idea principal de la lectura es: \*

- A. La discusión de los científicos  
 B. Avances en los instrumentos de medición  
 C. El monte más alto del mundo  
 D. Los triángulos

6. A partir de la lectura se puede deducir que en la actualidad la altura del monte Everest: \*

- A. Aumentó debido al terremoto de Nepal  
 B. Permanece debido a que su altura no puede ser transformada  
 C. Aumentó, aunque no puede ser medida  
 D. Aumentó debido a los cambios climáticos

11. ¿Qué pretende informar el autor con el texto? \*

El quiere dar a conocer como se puede llegar a medir algunas cosas de la naturaleza, pero sin embargo en algunos casos la medida no es absolutamente constante y que cada vez se van actualizando los instrumentos de medición

12. ¿Cómo asumes la postura de los científicos nombrados en el texto? \*

Es un papel importante por que ello no se quedaron solo con lo que se les había dicho si no que al contrario trataron de hallar otro tipo de medida y lo consiguieron por eso los científicos no se puede quedar solo con una teoría si no que tienen que ir investigando y eso fue lo que hicieron dichos científicos

13. ¿Cuál es tu opinión personal con respecto al texto? (De acuerdo con lo que le llamó la atención en el texto) \*

Que es un buen aprendizaje por que muchas veces pensamos que las cosas nacieron con una sola medida y se tiene que quedar así y también en muchos casos no nos interesamos por lo que pasa realmente con la naturaleza y no investigamos realmente como se van dando los avances de las cosas importantes del planeta