Caracterización de ambientes de aprendizaje mediados por GeoGebra con la resolución de problemas para la construcción del concepto de área en el grado 7º - 2 de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña del municipio de Yumbo.

Dorian Gomez

Código A00350845

Director:

Hendel Yaker Agudelo

Profesor tiempo completo Depto. Matemáticas y Estadística

Departamento Matemáticas y Estadística

Universidad ICESI

Escuela de Ciencias de la Educación

Maestría en Educación

2019

Dedicatoria

A mis Padres por su comprensión y apoyo.

Agradecimientos

Gracias a la Gobernación del Valle, por ser uno de los beneficiarios de las becas del Proyecto “FORTALECIMIENTO DE CAPACIDADES DEL TALENTO HUMANO PARA LA EDUCACIÓN Y LA INNOVACIÓN MEDIANTE FORMACIÓN DE ALTO NIVEL. VALLE DEL CAUCA”.

Al profesor Hendel Yaker Agudelo por su colaboración y apoyo en cada una de las etapas de la elaboración del presente trabajo.

A la rectora de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña, Diana Mirelly Triviño Rincón, por permitirme realizar la intervención y el desarrollo de las actividades para el proyecto. Igualmente, a mis compañeros docentes y estudiantes, que colaboraron directa e indirectamente en su desarrollo.

Y a todos aquellos que auguraron que esto iba a llegar a buen término ¡Gracias!

Resumen

Este estudio tuvo como objetivo contribuir al estudio de entornos de aprendizaje mediados por las TIC; en consecuencia, nuestra tarea fue la de caracterizar diferentes entornos de aprendizaje mediados por el software dinámico GeoGebra con la resolución de problemas para la construcción del concepto de área en figuras planas. Esto fue desarrollado con los alumnos de 7º grado de la Institución Educativa, Rosa Zarate de Peña, del corregimiento de Dapa, perteneciente al municipio de Yumbo, Valle del Cauca. Para lograr este objetivo, primero se realizó una prueba de diagnóstico que midió el conocimiento previo de los estudiantes sobre el concepto de área, y luego se realizó la intervención a través de cuatro *hojas de trabajo* que fueron evaluadas en base a los *Estándares Básicos de Competencia* del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, y con el enfoque de la *resolución de problemas*, diferentes aspectos: la diferenciación entre el concepto de área y perímetro, la relación de dependencia o no, entre estas dos magnitudes (área y perímetro), el uso del concepto de área en diferentes contextos, etc. y con los cuales se trató de determinar los conocimientos, habilidades, actitudes y valores; todos ellos esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático.

Palabras clave: Entornos de aprendizaje, TIC, GeoGebra, resolución de problemas, área, perímetro y geometría.

Abstract

This study aimed to contribute to the study of ICT-mediated learning environments; consequently, our task was to characterize different learning environments mediated by the dynamic software GeoGebra with the resolution of problems for the construction of the concept of area in plane figures. This was developed with the students of grade 7 of the Educational Institution, Rosa Zarate de Peña, of Dapa district, belonging to the municipality of Yumbo, Valle del Cauca. In order to achieve this objective, a diagnostic test was first done that measured the students' prior knowledge about the concept of area, and then performed the intervention through four worksheets that were evaluated based on the Basic Competition Standards of the Ministry of National Education of Colombia, and with the problem-solving approach, different aspects: the differentiation between the concept of area and perimeter, the relationship of dependence or no, between these two magnitudes (area and perimeter), the use of the concept of area in different contexts, etc. and with which it was tried to determine the knowledge, skills, attitudes, and values; all of them essential for the development of the mathematical thinking.

Keywords: Learning environments, ICT, GeoGebra, problem-solving, area, perimeter, and geometry.

CONTENIDO

Lista de tablas

Lista de figuras

1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Contextualización

Una de las dificultades que presenta la didáctica de las matemáticas es la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Muchas veces lo reducimos a la memorización de una sola representación: fórmula, gráfico o enunciado, desconociendo que su aprehensión es mucho más que eso; y lo presenciamos a diario con nuestros estudiantes cuando se ven enfrentados a problemas que les cambian las condiciones o el formato a como vienen acostumbrados a resolverlos. Por lo anterior, es importante buscar nuevas formas de mejorar los procesos de aprendizajes con nuevos diseños de ambientes de aprendizaje y herramientas que nos faciliten la tarea.

En la actualidad vivimos un tiempo donde las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) se han convertido en una parte importante de nuestras vidas y sólo hasta ahora estamos midiendo su impacto. En lo que refiere a la educación vemos como cada vez más se ha convertido en una herramienta que si la empleamos bien puede afectar de manera significativa los procesos de enseñanza y aprendizaje.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Históricos

La geometría ha acompañado al hombre desde sus orígenes. Es así como podemos encontrar algunos diseños y dibujos geométricos en alfarería y cestería desde la época del neolítico (Cortes, 2012).

Figura 1. Muestra de una cerámica neolítica cardial

Recuperado de https://www.historiaeweb.com/2014/06/24/ceramica-neolitica/

Mesopotamia

Las tablillas encontradas en la región de Susa nos hablan de una cultura Mesopotámica conocedora de las áreas de los polígonos. En ellas encontramos comparadas las áreas y el cuadrado de los lados de polígonos regulares de hasta 7 lados. Uno de los rasgos de su geometría era que sus cálculos no necesariamente debían de ser exactos; y en su lugar fue más bien aproximativo. Es por ello que empleaban métodos de agrimensura para medir la superficie de diferentes figuras geométricas (Illana-Rubio, J.C. 2008).

En las tablillas (YBC 7302 e YBC 11120) según Caratini (como se cita en Illana-Rubio, J.C. 2008) se plantea la relación entre el área del círculo y la longitud de la circunferencia. En otra tablilla encontrada en Susa se da un valor a **Pi** igual a 3 1/8 = 3,125. En ella se relaciona la longitud de un hexágono y la circunferencia circunscrita (Figura 2.)

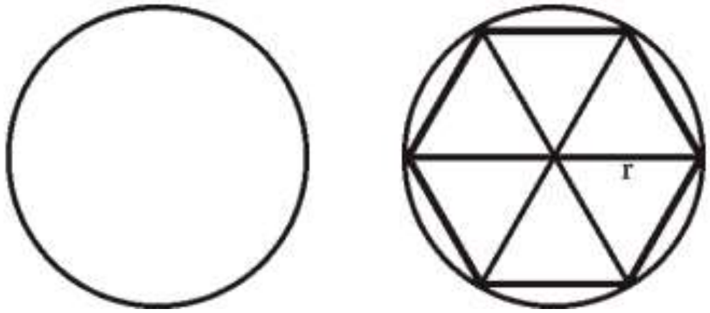


Figura 2. Cálculo del área y perímetro de la circunferencia con el hexágono inscrito.

Egipto

El “Papiro de Ahmes” más conocido como el “Papiro de Rhind” por llevar el nombre del anticuario que lo compró; contiene una serie de problemas y soluciones a temas de aritmética y geometría (Figura 3.)

Figura 3. Papiro de Amhes o Papiro de Rhind. Cortés(2018).

Uno de esos problemas presentes es el del cálculo del área del triángulo isósceles. Para resolverlo tomaban la mitad de lo que conocemos ahora como la base y la multiplicaban por la altura (Cortes, 2012).

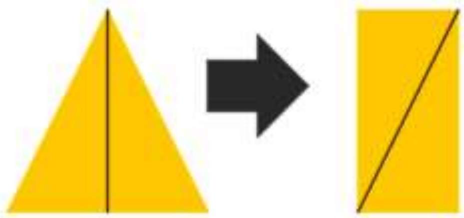


Figura 4. Cálculo del área de un triángulo isósceles como un rectángulo.

También se adelantaron a Pitágoras y construyeron su propio triángulo rectángulo formado a partir de 12 nudos equidistantes en una cuerda, como se observa en la Figura 5 y los empleaban para la medición de terrenos.

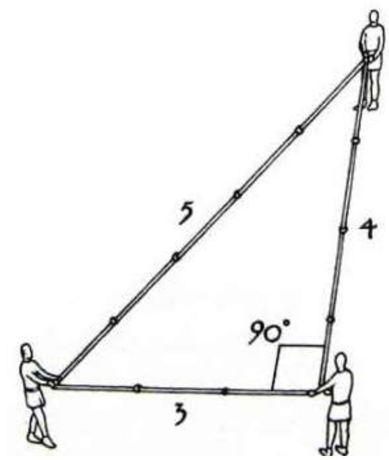


Figura 5. Triángulo Egipcio formando 12 nudos en una cuerda.

Recuperado de https://www.artifexbalear.org/corda12.htm

Así mismo calculaban el área de un círculo inscribiéndolo en un cuadrado dividido en 9 secciones iguales a través de un octágono, y eliminando los 4 triángulos de las esquinas. Como lo podemos ver en la Figura 6.

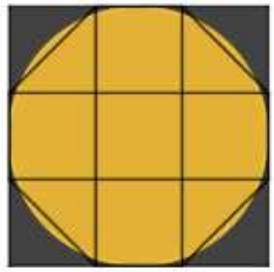
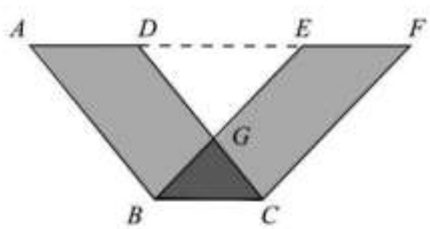


Figura 6. Método Egipcio para calcular el área de un círculo

Hasta aquí lo que encontramos en las *tablillas de Mesopotamia* y los *papiros en Egipto* son soluciones a casos muy particulares sin la rigurosidad, estructuración y sistematización de un pensamiento lógico como el que vamos a encontrar en *Euclides* en su magna obra *Elementos*. (Los *Elementos* se componen de 13 libros. Los cuatro primeros son sobre Geometría plana; del 5 al 10 sobre razones y proporciones; y finalmente del 11 al 13 tratan sobre Geometría del espacio)

Los fundamentos sobre el área empiezan en los *Elementos* a partir del primer libro. Las proposiciones I.35 a I.41 comprenden los diferentes modos de razonar de lo que hoy se representa bajo las fórmulas de área del triángulo A=1/2 b.h. y el paralelogramo A= b.h

> "La proposición I.35 dice:
>
> Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.



> Los paralelogramos en cuestión son *ABCD* y *EBCF*, quienes comparten la base *BC* y suben ambos hasta la paralela *AF*. Se debe observar que el triángulo *BCG* (en gris oscuro en nuestra figura) es común a los dos paralelogramos, por lo que la demostración estaría lista si comprobáramos la igualdad de los trapecios en gris claro (*ABGD y FEGC*). Para hacer evidente tal igualdad observamos que ambos trapecios provienen de quitar el triángulo *DEG* (en blanco) a los triángulos *EAB* y *F DC* que son iguales (congruentes) por la igualdad de sus tres lados. Esta igualdad de lados la justifica Euclides por consideraciones sobre paralelas.
>
> La demostración anterior refuerza nuestro punto principal: no hay números involucrados en el discurso; se demuestra a partir del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas, lo que le da un carácter algo lúdico.
>
> Esta característica es común a todas las demostraciones de áreas que encontramos en los libros I y II, pero cambia radicalmente (sin perder su carácter estrictamente geométrico) a partir del libro VI, donde los problemas se resuelven con la teoría de la proporción estudiada en el libro V" (Jiménez, 2010, p. 184).

El segundo libro se dedica a los problemas de área y consta de 14 proposiciones. La última proposición II.14 refiere al *problema de la cuadratura*, cuya denominación según Jiménez (2010) viene porque fue el cuadrado la figura patrón de las áreas, el problema consiste en construir un cuadrado de igual área a la figura rectilínea dada. Veámoslo con un triángulo:

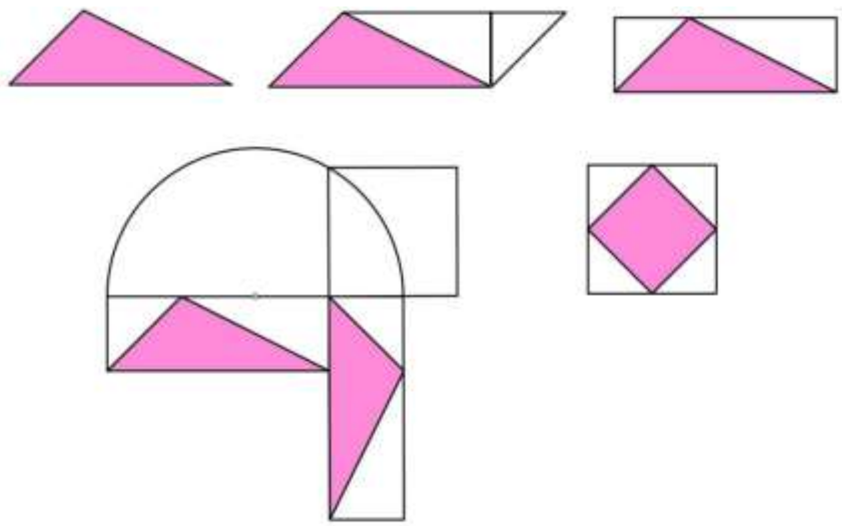


Figura 7. Secuencia de la cuadratura de un triángulo. Herrera (2011)

Del triángulo se pasa al paralelogramo, el cual se forma con dos copias del mismo, luego formamos el rectángulo con igual área; posteriormente, con la semicircunferencia formamos el cuadrado de igual área que el rectángulo. Y finalizamos con el cuadrado más pequeño que tendría la mitad del área del cuadrado y del rectángulo y el paralelogramo, e igual a la del triángulo.

Posteriormente nos encontramos con el "Problema de las áreas" consistente en encontrar el área bajo la curva. Igualmente, importante es la relación entre la longitud de la circunferencia y el área contenida en ella. Arquímedes se interesó en este problema haciendo uso del *método exhaustivo* (aproximar áreas bajo la curva a través de polígonos inscritos y circunscritos) que terminó con el *paso al límite*, la *noción de infinito* y, por último, con la aparición del *Cálculo* (González, D., Santa, Z. y Londoño, R., 2015)

1.2.2. Investigaciones

Dado el sinnúmero de trabajos que se encuentran en relación con el uso de las TIC (programas y metodologías) para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, nos centraremos en aquellos proyectos donde el uso de las TIC sirve como una herramienta para el aprendizaje de la Geometría y más específicamente para el concepto de Área.

Consideraré en primera instancia el trabajo realizado por Edwin Fernando Hernández Escobar (2016) para optar al grado de Magíster en Educación Matemática, titulado: "Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y de volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales" de la Universidad de Medellín. Su objetivo de investigación era: "*Implementar una estrategia desde el aprendizaje significativo que se articule con el origami y la mediación de las tecnologías digitales, relacionadas con el concepto de área y el volumen en el grado noveno"*. Este trabajo es particularmente importante porque su autor implementa como estrategia el uso del Origami mediado con las tecnologías digitales (GeoGebra). La muestra correspondió a los 22 estudiantes, 17 mujeres y 5 hombres, con edades que oscilan entre los 13 y 17 años de edad que cursan el grado 9o de la Institución Educativa Rural Carlos González del municipio de Belmira, Antioquia. El ambiente de aprendizaje mediado por las tecnologías (GeoGebra) en conjunto con el Origami favoreció la motivación del estudiante en el aprendizaje de los conceptos de área y volumen. Otro estudio interesante con el uso de las tecnologías fue el desarrollado por Mario Fernando Arenas Avella (2012) titulado "Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas" realizado para optar por el título de Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional sede Medellín. Su objetivo era: *“Diseñar e implementar una estrategia didáctica en los estudiantes del grado sexto aplicado en la enseñanza de la geometría en la temática de área y perímetro en figuras planas, con el uso de herramientas TIC (Moodle) y material concreto tangram”*. La muestra fue de 27 estudiantes del grado 7o cuyas edades oscilaban entre los 11 y 15 años de edad, pertenecientes a la Institución Educativa Barrio Santander sección Estado de Israel. A través de esta estrategia se fortaleció la adquisición de los conocimientos científicos con el cambió en la predisposición de los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas. Existe además el trabajo realizado por Blanca Lilia Arena y Otros (2014) de la Universidad de los Andes, quienes abordaron el tema de “Áreas de regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares” en la Maestría de Matemáticas. En él desarrollan una unidad didáctica en la institución educativa *Técnico Comercial de Tocancipá* perteneciente al sector oficial, en el grado 9º. La propuesta presenta como objetivos: “*1. Utilizar métodos geométricos de descomposición y recomposición en regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares para generar áreas básicas como triángulos, rectángulos y círculos. 2. Utilizar procedimientos aritméticos para el cálculo de áreas de regiones sombreadas entre polígonos y porciones circulares. 3. Analizar y solucionar situaciones problema que hacen necesaria la optimización de recursos que involucran áreas de regiones sombreadas.*” Su desarrollo permitió a los estudiantes diferentes posibilidades de aprendizaje a través del análisis de los sistemas de representación geométrico (Gráfico) y simbólico (Algebraico) a la hora de encontrar solución a las figuras sombreadas. Así mismo, se evidenció una estrategia de solución básica consistente en la composición y descomposición de las figuras geométricas. Por último, está el trabajo de investigación de Juan David González Molina (2014) titulado “Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas en el contexto de la agricultura del café" para optar el título de Magíster en Educación, en la línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia. El trabajo se encamina a la descripción del proceso de aprendizaje de los conceptos de perímetro y área, y la no correlación de sus medidas, en el contexto del cultivo del café que sucede en 3 estudiantes de una institución educativa rural del municipio de Andes. Para su realización se tomó como Marco Conceptual la *Enseñanza para la Comprensión*, creado por David Perkins, Howard Gardner y Vito Perrone; y para quienes la educación se logra a través del intercambio que se da entre conocimiento, habilidad y comprensión.

1.2.3. Curriculares

1.2.3.1. Lineamientos Curriculares en Matemáticas

El pensamiento espacial y sistemas geométricos

En esta sección el Ministerio de Educación Nacional (MEN) nos habla de la importancia de volver al estudio de la geometría intuitiva, la cual se había olvidado por la llegada de la "matemática moderna" y que resulta ser relevante para el estudio no sólo de la geometría sino de toda la matemática.

Howard Gardner (como se cita en MEN, 1998) nos dice que el pensamiento espacial es esencial para el desarrollo de la ciencia ya que nos permite representar y manipular, lo cual es de suma importancia para el planteamiento y resolución de problemas. Así mismo, algunas profesiones como las ciencias y la ingeniería, la arquitectura, el dibujo, requieren que el estudiante tenga desarrollado en un buen grado su pensamiento geométrico.

En los lineamientos se propone la *Geometría Activa* como una herramienta de explorar y representar el espacio además de renovar el currículo y el estudio de los sistemas geométricos (MEN, 1998)

> "Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.
>
> Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales".

Y es por ello que la *Geometría Activa* viene a servir de herramienta para favorecer dichos procesos e interacciones. En ella el estudiante es parte activa en la interacción con el mundo que le rodea. (MEN, 1998)

> "Se da prioridad a la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas y a la importancia

> de las transformaciones en la comprensión aun de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos. Se trata pues de 'hacer cosas', de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna. Esta conceptualización va acompañada en un principio por gestos y palabras del lenguaje ordinario, hasta que los conceptos estén incipientemente construidos a un nivel suficientemente estable para que los alumnos mismos puedan proponer y evaluar posibles definiciones y simbolismos formales".

Gutiérrez M., y otros (2006) nos proponen el siguiente esquema para mostrar las relaciones que se dan entre "los conceptos y los procesos caracterizados en el pensamiento espacial"

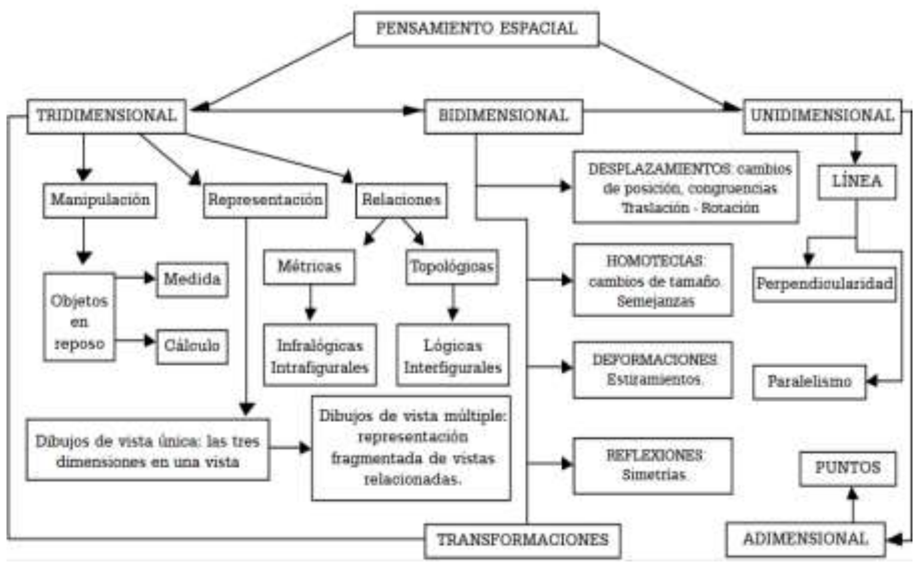


Figura 8. Mapa esquemático de los conceptos y procesos del pensamiento espacial (Gutiérrez M., 2008)

Lo tridimensional en lo bidimensional

Un rasgo nuevo a referirse es la importancia de la representación bidimensional de los objetos tridimensionales. Lappan y Winter (como se cita en MEN, 1998) nos dice que, aunque nos movilicemos y vivamos en un mundo tridimensional, su estudio en la escuela lo hacemos a través de representaciones bidimensionales, lo que suma una mayor dificultad a los estudiantes su comprensión.

Para este tipo de representaciones bidimensionales (2D) de objetos tridimensionales (3D) se emplean dibujos de vista única (perspectivas cónicas) y de vista múltiple (axonometría).

Las transformaciones

Carlos E. Vasco (como se cita en MEN, 1998) nos expresa que por mucho tiempo la predilección por las "figuras muertas", las relaciones entre líneas (paralelismo y perpendicularidad) y la congruencia o semejanza de formas geométricas, no han permitido que aparezca lo activo y dinámico que hay en los conceptos geométricos, las transformaciones y nos propone "devolver la dinámica a los sistemas geométricos, con sus operadores y transformaciones, que resultan de internalizar en forma de esquemas activos en la imaginación, los movimientos, acciones y transformaciones que se ejecutan físicamente. Esto quiere decir que una transformación no puede definirse, ni mucho menos simbolizarse formalmente, antes de que los alumnos hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos, deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse esos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material, a lo más acompañando esta imaginación con movimientos del cuerpo o de las manos."

En un aparte el MEN nos sugiere que para trabajar las transformaciones comencemos por los movimientos de nuestro propio cuerpo o sino arrastrando objetos en el piso. Esto nos lleva primero a las rotaciones y traslaciones, y de lo que se trata es ver cómo varía la orientación y dirección según el movimiento sin llegar a la definición. En sí, con las transformaciones lo que se quiere es trabajar la geometría de manera activa, que el estudiante haga y desarrolle sus representaciones.

El modelo de Van Hiele

El pensamiento geométrico evoluciona desde formas intuitivas hasta lograr formas deductivas que corresponden a niveles avanzados de escolaridad.

El modelo de Van Hiele es el que quizás mejor describe tal evolución. Éste estructura el aprendizaje de la geometría en cinco niveles: El primer nivel, es el de la *visualización*; el segundo del *análisis*; el tercero, del *ordenamiento y clasificación*; el cuarto del *razonamiento deductivo*; y el quinto, el del *rigor*. Estos dos últimos no llegan a ser alcanzado por los estudiantes ya que se necesita una elevada cualificación en matemáticas.

Sin embargo, el MEN (1998) hace algunos reparos frente al modelo de Van Hiele.

> "Aunque estos niveles son una aproximación aceptable a las posibles etapas en las que progresa el pensamiento geométrico, los docentes debemos ser críticos con respecto a ellos, pues no parecen dirigidos a lo que parecen ser los logros más importantes del estudio de la geometría: la exploración del espacio, el desarrollo de la imaginación tridimensional, la formulación y discusión de conjeturas, jugar con los diseños y teselaciones del plano y sus grupos de transformaciones. La propuesta de geometría activa, que parte del juego con sistemas concretos, de la experiencia inmediata del espacio y el movimiento, que lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio del espacio, y a la expresión externa de esos sistemas conceptuales a través de múltiples sistemas simbólicos, no

> coincide con la descripción de Van Hiele, más orientada a la didáctica clásica de la geometría euclidiana y al ejercicio de las demostraciones en T o a doble columna".

Por su parte Raymond Duval (como se citó en Gutiérrez M., 2008) nos dice que para el desarrollo del pensamiento geométrico se deben favorecer tres procesos cognitivos: La visualización, la construcción y el razonamiento. A continuación, se muestra un diagrama de dicho planteamiento.

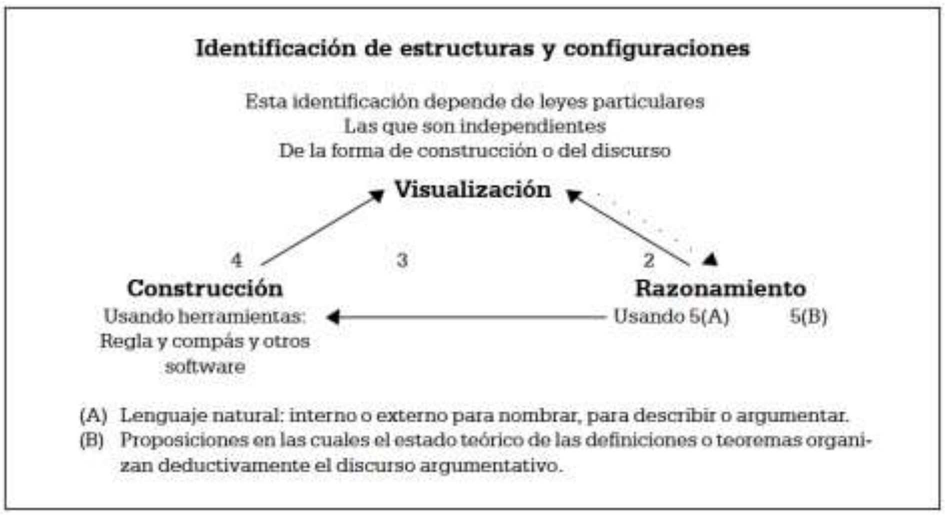


Figura 9. Procesos cognitivos involucrados en el desarrollo del pensamiento geométrico. Gutiérrez (2008)

1.2.3.2. Estándares Básicos de Competencias

Los estándares básicos de competencia en matemáticas nos hablan que el pensamiento espacial presenta tres momentos: En un *primer momento*, el estudiante reflexiona sobre las propiedades de los objetos que le rodean, su ubicación y relación con otros elementos, y consigo mismo. Un *segundo momento* es cuando a las representaciones que hace el estudiante se le agrega la metrización con lo que se llega a un nivel de complejidad mayor puesto que no sólo es suficiente las propiedades que resultan de los objetos con relación a otros, sino también aquellas como producto de sus medidas. El *tercer momento* se da cuando a partir del estudio de estas propiedades con la métrica se llega a un conocimiento formal. (MEN, 2006)

1.2.4. Legales

En este punto nos encontramos con la ley 1341 “Por la cual se definen principios y conceptos sobre la sociedad de la información y la organización de las tecnologías de la información y las comunicaciones - tic-, se crea la agencia nacional de espectro y se dictan otras disposiciones” del 30 de Julio del 2009, la cual en su Título I , Capítulo I , Artículo 2 “Principios Orientadores”, Numeral 7 “El Derecho a la comunicación, la información y la educación y los servicios básicos de las TIC”, nos dice que en correspondencia con los artículos 20 y 67 de la Constitución Nacional, será el Estado quien garantice a todo Colombiano el acceso a la información, el conocimiento y la cultura; también, la posibilidad de difundir sus ideas y opiniones. Sumado a lo anterior, el Estado favorecerá la creación de programas para que la población rural, y de escasos recursos puedan adentrarse a contenidos educativos dispuestos en internet para su formación integral e información de interés general.

1.3. Planteamiento del problema

El aprendizaje de los conceptos matemáticos demanda que los estudiantes posean la habilidad para pasar de un registro de representación a otro. Es por esto que a muchos de los estudiantes que inician la secundaria se les dificulta la comprensión y la resolución de problemas relacionados con el concepto de área. Y es que los estudiantes no consiguen hacer asociaciones entre los diferentes registros de representaciones: algebraico y gráfico. Los problemas asociados al concepto de área, y esto haciendo referencia al caso de su representación algebraica, son planteados para encontrar su valor numérico y sólo se necesita reemplazar en la formula (ecuación) el valor o valores que se desconocen. Un ejemplo de ello es el área de la circunferencia, cuya fórmula es $A=\pi r^2$: donde (π) es una constante y donde sólo varía el radio (r). Sin embargo, cuando el problema se plantea desde su gráfica, y se pide a los estudiantes deducir de ella los valores a reemplazar en la fórmula, muchos de ellos no saben qué responder y aparecen los obstáculos para realizar las asociaciones necesarias entre un registro de representación y otro para encontrar dichos valores.

GeoGebra es un software dinámico que permite tener en una misma interfaz, registros de representaciones tanto algebraicos como gráficos de los objetos matemáticos, lo cual le facilita al estudiante hacer asociaciones entre estos dos registros, ayudándolo así a transitar y pasar de uno tipo de registro de representación a otro; y es esto lo que constituye según Duval (2006) un elemento esencial en el aprendizaje de los conceptos en matemáticas.

La resolución de problemas, por su lado, favorece la comprensión de conceptos matemáticos, e igualmente promueve los desarrollos de programas de investigación, diseño curricular, educación matemática de los maestros e instrucción de las matemáticas a nivel del aula (Santos-Trigo y Moreno Armella 2013).

Por lo anterior, es fundamental conocer ¿Qué características del proceso de aprendizaje se observan en la construcción del concepto de área en un ambiente de aprendizaje mediado por GeoGebra con la Resolución de Problemas?

1.4. Justificación

Una de las dificultades que presentan actualmente los estudiantes que inician la secundaria es la escasa comprensión y aprehensión de los conceptos matemáticos a la hora de interpretar y resolver un problema. Según el profesor *Raymond Duval* (2006), la investigación en didáctica de las matemáticas se ha extendido a nuevos campos, y uno de esos nuevos campos refiere a las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión de los conceptos. Para él, la comprensión se da en la competencia de asociar distintos registros de representación (coordinar), y es, por esta razón que la *Conversión -cambio de registro de representación-* llega a convertirse en "el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas".

Un ejemplo, es el concepto del *área de la circunferencia* que puede verse representado algebraicamente y gráficamente.

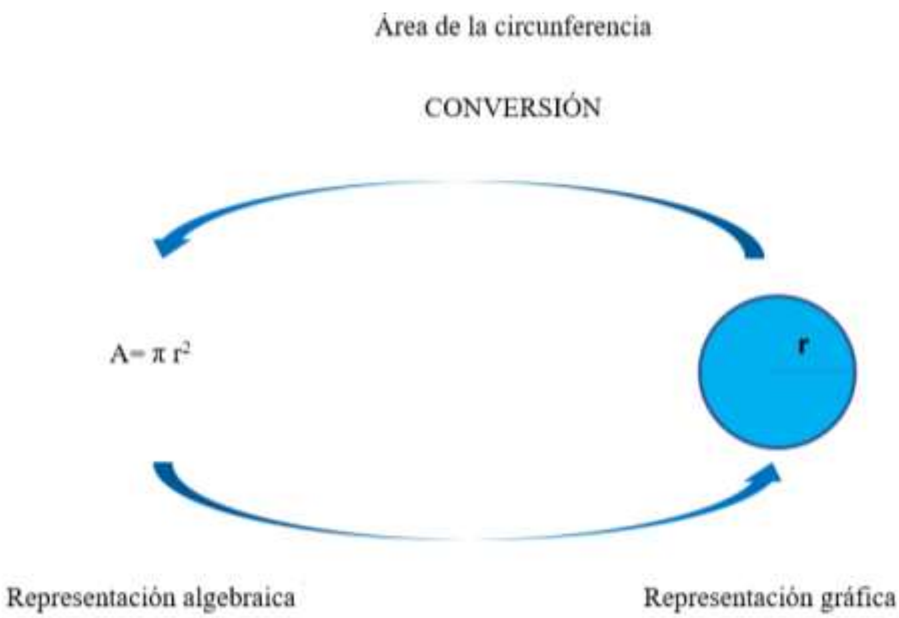


Figura 10. Registros de representación algebraico y gráfico del área de una circunferencia.

A pesar de los esfuerzos por parte del gobierno para hacer de Colombia el país mejor educado de América Latina en el 2025, los resultados en la prueba PISA del 2015 en matemáticas (390 puntos) según la OCDE (Organización para la Cooperación y el

Desarrollo Económico) muestran que todavía existe un 66% de estudiantes en Colombia que no alcanzan los objetivos mínimos en esta materia.

Por lo tanto, es necesario aunar esfuerzos para mejorar los procesos de aprendizaje que nos permitan cerrar esta brecha y lograr dicho objetivo. Y es en este punto donde las TIC como es el caso del uso de GeoGebra en conjunto con las actividades de la *resolución de problemas* aparecen para brindarnos nuevas maneras de alcanzarlo.

Es por esto que la propuesta de investigación va encaminada a diseñar, implementar e identificar las características del proceso de aprendizaje que se vislumbran en ambientes de aprendizaje mediados por *GeoGebra* con la Resolución de Problemas para la construcción del concepto de área en estudiantes del grado 7o - 2 de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña del municipio de Yumbo.

1.5. OBJETIVOS

1.5.1. Objetivo General

Establecer las características que se observan en la construcción del concepto de área en un ambiente de aprendizaje mediado por GeoGebra con la Resolución de Problemas en estudiantes de grado 7o - 2 de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña del municipio de Yumbo.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Diseñar un ambiente de aprendizaje mediado por GeoGebra a través del enfoque de resolución de problemas para la construcción del concepto de área en los estudiantes de grado 7o - 2 de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña del municipio de Yumbo.

- Implementar un ambiente de aprendizaje mediado por GeoGebra con el enfoque de resolución de problemas para la construcción del concepto de área en los estudiantes de grado 7o - 2 de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña de Yumbo.
- Identificar los aspectos del proceso de aprendizaje que se observan durante la implementación de un ambiente de aprendizaje mediado por GeoGebra y con la de resolución de problemas.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Ambientes de aprendizaje

Dado el buen número de concepciones que hay de lo que es un ambiente de aprendizaje, en el presente trabajo se tomará la que se encuentra en el MEN (2014) que expresa: "Un ambiente de aprendizaje es un espacio estructurado en donde confluyen estudiantes y docentes que interactúan con la intención de que ocurran aprendizajes ofreciendo oportunidades para que los estudiantes construyan conceptos, desarrollen habilidades de pensamiento, valores y actitudes." Así mismo, nos dice que las unidades principales de un ambiente de aprendizaje son:

- El espacio
- Las interacciones (estudiantes-profesor-currículo)
- Y los recursos

En lo que se refiere a la Educación Matemática, donde lo que se busca es formar estudiantes matemáticamente competentes, la caracterización de los ambientes de aprendizaje debe girar alrededor de: "1) Los cinco procesos generales de la actividad matemática 2) Los conocimientos básicos (cinco tipos de pensamiento matemático) y 3) Los contextos que dan sentido a la actividad matemática escolar”. Todos ellos presentes en los lineamientos y estándares del currículo de matemáticas MEN (2014).

Teniendo en cuenta lo expuesto hasta ahora, vamos a analizar los siguientes elementos para diseñar y gestionar ambientes de aprendizaje:

- Sus dimensiones
- El rol del profesor
- Y el proceso de matematización.

2.1.1. Dimensiones de los ambientes de aprendizaje

2.1.1.1. Espacio físico

En esta primera dimensión se presentan dos configuraciones: Una más “tradicional” donde se privilegia la comunicación unidireccional, el profesor es el emisor y los estudiantes los receptores (Figura 11).

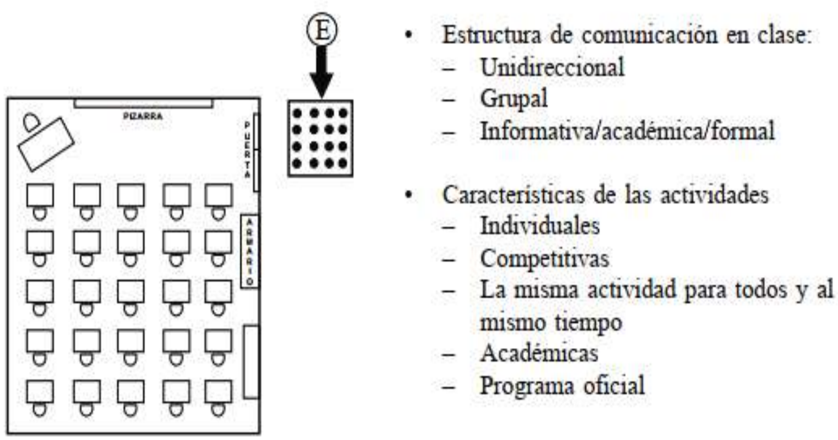


Figura 11. Configuración tradicional del espacio en el aula. Duarte (2003)

La otra configuración promueve un ambiente dialógico, donde todos son emisores y receptores. Y se privilegia además actividades de colaboración y cooperación. (Figura 12)

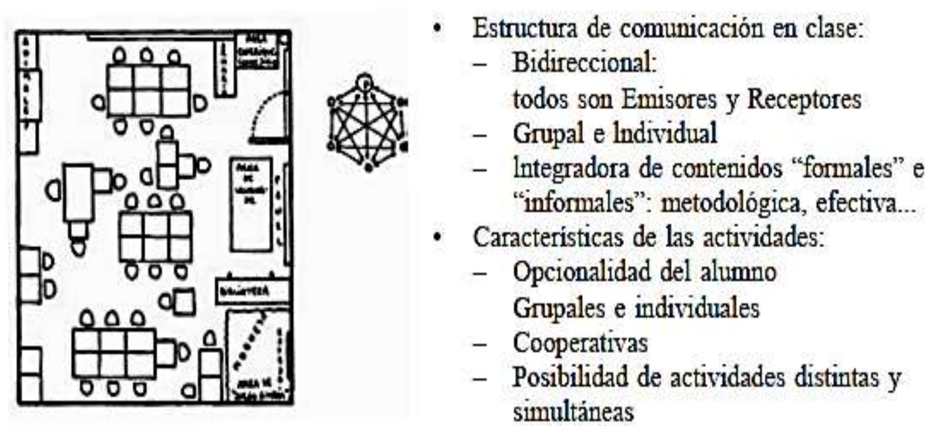


Figura 12. Configuración activa del aula de clase. Duarte (2003)

2.1.1.2. Modos de Aprendizaje

En esta otra dimensión se destacan dos modos de aprendizaje: Un primer modo consistente en el desarrollo de algoritmos donde los estudiantes reciben la tarea de ejercitarse en su correcta ejecución para obtener los resultados esperados. En cuanto a los temas a desarrollar, se inicia de lo más fácil para llegar a lo más difícil; y es el profesor quien da las pautas para avanzar. Los estudiantes en clase se limitan sólo a responder a las preguntas hechas por el profesor y en pasar los exámenes que se les realiza.

El segundo modo se caracteriza por privilegiar la resolución de situaciones problema. La matemática es concebida como una actividad donde el estudiante desarrolla propuestas de soluciones desde sus presaberes de manera intuitiva para luego con el profesor progresar en la elaboración de procedimientos propios de la matemática.

2.1.1.3. Recursos (tecnológicos)

Los recursos tecnológicos pueden ser empleados de dos maneras: Una como reemplazo de los ya tradicionales como la pizarra, las cartillas, y las tablas de multiplicar; sirviendo sólo para la ejecución de actividades que enfatizan la memorización y la realización de algoritmos. Y una segunda, es el empleo de estos como medios para la construcción de conceptos y la significación de los contenidos, encaminados a hacer de los estudiantes, sujetos cada vez más competentes en un mundo cada vez más globalizado.

2.1.1.4. Interacciones

En cuanto a las interacciones (estudiante-estudiante, estudiante-profesor) que se dan en el aula tenemos:

Primero. Aquéllas donde prima el aprendizaje individual. El control y la disciplina están a la orden del día. La clase se desarrolla de manera unidireccional, donde el profesor hace las veces del emisor y el estudiante de receptor.

Segundo. Donde las actividades se encaminan a que los estudiantes interactúen unos con otros. Se enfatiza en el trabajo colaborativo y cooperativo. La toma de conciencia por parte del estudiante de su función en el grupo es condición necesaria para el alcance de los objetivos.

2.1.2. El rol del profesor

El profesor debe propender por el desarrollo de actividades que garanticen la formación de estudiantes matemáticamente competentes: diseño de ambientes de aprendizajes adecuados a las actividades a desarrollar, gestionar los procesos en el aula, postular preguntas que lleven al cuestionamiento y la reflexión del porqué de las cosas, y validar la producción matemática de los estudiantes. Para ello es importante el establecimiento de normas que propendan por el respeto a la diferencia, la inclusión, etc. Así mismo, motivar a los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas a través del desarrollo de sus habilidades teniendo en cuenta su condición social, económica y cultural.

2.1.3. La matematización del mundo

La matematización del mundo consiste en tomar situaciones de la vida real, en las cuales, a través de su análisis y estudio, se destacan estructuras y procedimientos matemáticos como regularidades, generalizaciones, etc., para llegar finalmente a un modelo matemático.

El MEN (2014) destaca los cinco pasos del proceso de matematización: “1) Se inicia con un problema situado en la realidad o matemática; 2) Se organiza de acuerdo con conceptos matemáticos y se identifican las matemáticas relevantes al caso; 3). El problema se va abstrayendo progresivamente de la realidad mediante una serie de procesos, como la elaboración de supuestos, la generalización y la formalización, mediante los cuales se destacan los rasgos matemáticos de la situación y se transforma el problema del mundo real en un problema matemático que reproduce de manera fiel la situación; 4) Se resuelve el problema matemático; 5) Se confiere sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las posibles limitaciones de la solución” (p.25).

2.2. GeoGebra

GeoGebra es un software dinámico potente que se usa para la enseñanza de las Matemáticas y permite visualizar en una interfaz “amigable” varios registros de representación. Tiene la ventaja además de ser un software libre por el cual no se tiene que pagar y usarlo sin tener que estar conectado a internet, esto después de que sea descargado de la Web en el Computador, la Tablet o el celular. Aunque GeoGebra permite visualizar otros registros de representación (Hojas de Cálculo, Cálculo Simbólico CAS), son los registros algebraico y gráfico los que más se emplean para la enseñanza de la Geometría y los que presentan mayor dificultad por parte de los estudiantes de relacionarlos. En este último punto, GeoGebra presenta una característica importante, y es, el de la *vinculación* de los registros: los cambios que se realizan en uno de ellos, ya sea el algebraico o el gráfico, van a verse reflejados simultáneamente en el otro. esto lo convierte en una herramienta ideal para trabajar en áreas donde convergen las ciencias, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (**STEM**: Science, Technology, Enginnering & Mathematics)

La *Figura No.13* muestra los registros de representación algebraica (Vista Algebraica) y gráfica (Vista Gráfica) de una circunferencia.

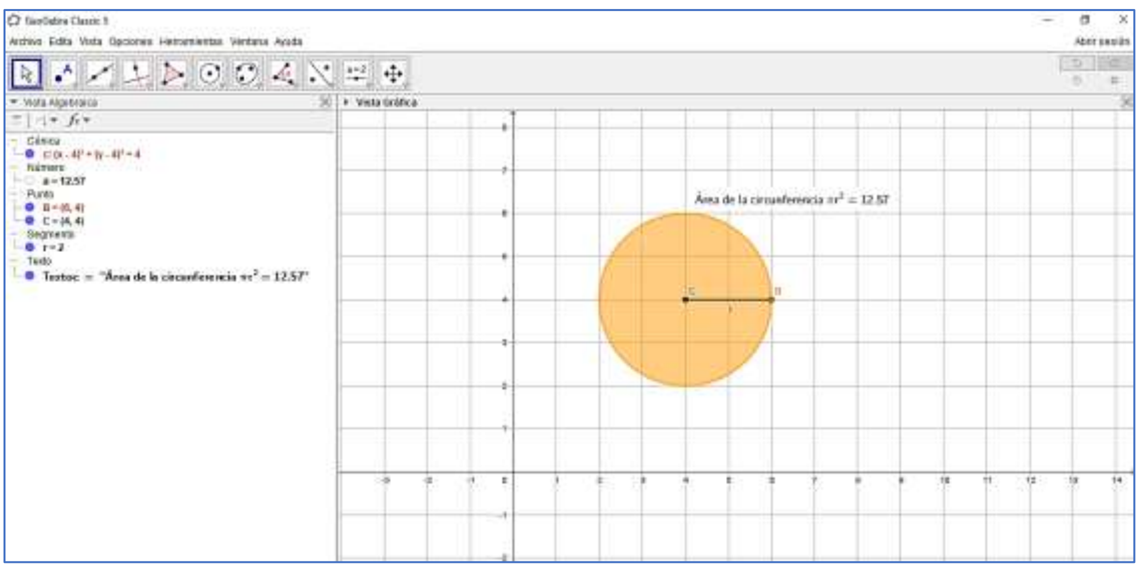


Figura 13. Registros de representación algebraico y gráfico de la circunferencia con GeoGebra.

Ahora, una actividad que sugiere un marco propicio para que los estudiantes comprendan y construyan los conceptos matemáticos es la *resolución de problemas*; por lo que ya hace unas décadas varios países la identifican como una propuesta importante en el estudio de las matemáticas (Santos-Trigo y Moreno Armella 2013).

2.3. Resolución de problemas

Pero antes de seguir es importante hacer claridad por lo que entendemos con el término de *resolución de problemas*. Vilanova, S. et al. (2001) refiere que la resolución de problemas ha tenido diferentes interpretaciones:

- Como recurso

Los problemas son vistos como como *medios* para alcanzar algunas metas ya sea como: justificar la enseñanza de la matemática, motivar el aprendizaje de contenidos, actividad recreativa con los conocimientos matemáticos, medio para desarrollar nuevas habilidades, y como práctica. Esto es, la resolución de problemas sirve para el logro de otros objetivos y tiene una interpretación mínima que es resolver las tareas propuestas.

- Como destreza

Consistente en el aprendizaje de métodos y técnicas a seguir para resolver los problemas que nos son planteados matemáticamente.

- Como la matemática misma

> La resolución de problemas es la ventana que da a los estudiantes la oportunidad de hacer matemáticas; en imaginar las distintas maneras de cómo se resuelve un problema (heurística) y luego ponerlas en práctica.

Pólya (1954) reflexiona sobre su propia experiencia como matemático y escribe sobre el proceso que se involucra en la resolución de problemas. Propone un marco de cuatro fases en la resolución de problemas: comprensión del problema, diseño de un plan de solución, realización del plan, y evaluación retrospectiva. Discute además la importancia de utilizar métodos heurísticos en la resolución de problemas.

A continuación, y siguiendo con las ideas de Pólya, Santos Trigo (1994) nos dice: "Schoenfeld (1985) crea un programa con el objetivo de caracterizar lo que significa pensar en matemáticas y documentar como los estudiantes llegan a ser exitosos en la resolución de problemas. Como resultado propone un marco con cuatro categorías: el empleo de recursos básicos, el uso de estrategias cognitivas (heurísticas), el empleo de estrategias de monitoreo y autoevaluación (metacognitivo), y las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas y la resolución de problemas".

Vilanova, Silvia; y otros (2001) indican la importancia de seguir investigando en aspectos como: 1) el papel del maestro; 2) la caracterización de las clases y 3) los ambientes de aprendizaje.

Y es por estos avances hechos hasta el momento que se escogerá como marco, la *resolución de problemas* para abordar la mediación de GeoGebra en la construcción de los conceptos matemáticos (geométricos).

2.4. La "conceptualización" en matemáticas.

2.4.1. Duval y la "Teoría de los registros de representación semiótica"

Uno de los problemas en la enseñanza de las matemáticas está dado por la dificultad que se tiene a la hora de conceptualizar los objetos matemáticos. Esta conceptualización para Duval (2006) se da a través de "relacionar distintos registros de representaciones" de un mismo concepto, y según D´Amore B. (2004) en la capacidad de representar los conceptos en un registro, de ***tratar*** las representaciones al interior de un registro y de ***convertir*** las representaciones de un registro a otro (Transformaciones).

D’Amore B. (2004) en su trabajo “*Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética*”, nos da unos ejemplos de registros y representaciones semióticas:

“ Concepto **C**

$\mathbf{r}^{\mathbf{m}}$ = registro semiótico (m = 1, 2, 3, …)

$\mathbf{R}^{\mathbf{m}}_{\mathbf{i}}$ (A) = representación semiótica i-ésima (i = 1, 2, 3, …) de un contenido A en el registro semiótico rm.

registro semiótico $\mathbf{r}^{1}$: La lengua común

representación semiótica R^{1}_{1}: un medio

representación semiótica R^{1}_{2}: la mitad

registro semiótico $\mathbf{r}^{2}$: El lenguaje aritmético

representación semiótica R^{2}_{1}: ½ (escritura fraccionaria)

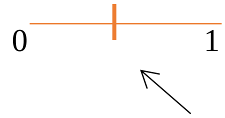
representación semiótica R^{2}_{2}: 0.5 (escritura decimal)

representación semiótica R^{2}_{3}: $5 \cdot 10^{-1}$ (escritura exponencial)

registro semiótico $\mathbf{r}^{3}$: El lenguaje algebraico:

representación semiótica R^{3}_{1} $\{x \in Q+ / 2x-1=0\}$ (teoría de conjuntos)

representación semiótica R^{3}_{2}: $y = f(x): x \rightarrow x/2$ (escritura funcional)

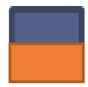
registro semiótico $\mathbf{r}^{4}$: El lenguaje figural representación semiótica $R^4{}_1$: 

etc.

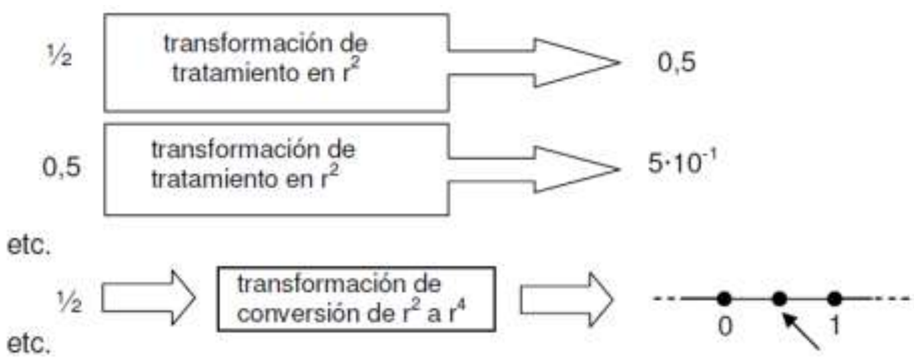
registro semiótico r^5: esquemas pictográficos

representación semiótica $R^5{}_1$: 

representación semiótica $R^5{}_2$: 

representación semiótica $R^5{}_3$: 

etc. ”



En lo que respecta a nuestro trabajo vamos a tratar de que los estudiantes puedan a través de la interfaz de GeoGebra la fácil asociación de los registros de representación algebraico y gráfico, y que esto les sirva para más adelante lograr las transformaciones de *tratamiento* y transformaciones de *conversión*.

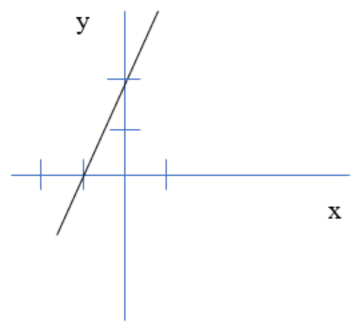
Otros ejemplos:

Transformaciones de *tratamiento*: Un ejemplo sencillo es la ecuación de la recta, la cual puede ser escrita de diferentes formas, ya sea para encontrar (según sea el caso o problema) los valores de “x” o “y”, el intercepto con el eje y (b), o la pendiente (m)

y = m.x +b => **x** = (y – b) / m => **b** = y - m.x => **m**= (y – b)/x

Transformaciones de *conversión* : Siguiendo con el ejemplo anterior podemos realizar la gráfica de una determinada ecuación de la recta, y realizar el cambio de registro: de uno algebraico a otro gráfico.

$y = 2x + 2$



Registro algebraico Registro gráfico

Y es en este punto donde *GeoGebra* con la posibilidad de vincular dos registros de representación en una misma interfaz facilita la asociación entre los mismos.

2.4.2. Serpinska y los "Actos de comprensión"

Para Anna Serpinska (1992) aprender un concepto en Matemáticas pasa por una serie de *actos de comprensión*: Identificación, discriminación, generalización y síntesis. Por los cuales se llega primero a destacar un objeto (matemático) entre varios, luego diferenciarlo de otro, seguidamente la posibilidad de ampliar su clase a través de una toma de conciencia y finalmente hallar relaciones entre situaciones que se presentan en contextos distintos. Un término importante en su teoría es el de los "obstáculos epistemológicos" los cuales los describe como el "resultado de formas particulares de enseñar estos conceptos, y no son idiosincrásicos, ni algo que ocurre en una persona o dos. Son comunes en el marco de alguna cultura, sea presente o pasada, y parecen ser los obstáculos más objetivos a las nuevas formas de conocimiento.”

2.4.3. Vergnaud y los “Campos Conceptuales”

Vergnaud (1990) por su parte, señala que un concepto es una “tripleta de conjuntos C (S, I, Γ) donde **S** representa el conjunto de situaciones que le dan su sentido; **I**, las invariantes (objetos, propiedades, relaciones, teoremas) que permiten su operacionalidad; y **Γ**, el conjunto de las representaciones simbólicas.”. Obando Z. et al. (2006) resume lo planteado por Vergnaud diciendo que para aprender un concepto no es suficiente una sola situación, sino que es necesario un conjunto de situaciones donde se ponen en juego otros conceptos y otras representaciones, por lo que su aprendizaje es un proceso que requiere de tiempo.

3. METODOLOGÍA Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Se diseñó una prueba diagnóstica con lo cual se buscó indagar sobre el nivel de conceptualización de área que tienen los estudiantes. El test tuvo preguntas tipo selección múltiple con única respuesta; preguntas abiertas, y problemas con su respectiva justificación de la solución. Se busca a través del test medir la capacidad que tiene el estudiante para emplear sus propios recursos (conocimientos previos) y responder a las preguntas que se les hacen.

Se hicieron observaciones sobre los posibles cambios subjetivos que ocurren en los estudiantes a lo largo de la intervención. Esto sirvió como complemento para los resultados obtenidos en las hojas de trabajo.

Los pasos que se llevaron a cabo para realizar la presente investigación fueron:

1. Revisión del estado del arte: Este paso sirvió para escoger la metodología más adecuada para responder a la pregunta de investigación.
2. Diseño, revisión y aplicación de los instrumentos de investigación de forma que respondan a los objetivos trazados en el proyecto.
3. Procesamiento de la información obtenida de manera que se pueda realizar un análisis responsable de la misma.
4. Redacción y discusión de los resultados de acuerdo a los objetivos que se plantearon al inicio del proyecto, y que sirvan de insumo para futuras investigaciones que se hagan sobre la misma línea de trabajo.

3.1. Tipo de Investigación

Atendiendo a la pregunta de investigación y para darle respuesta se trabajó en un diseño de Investigación con un *enfoque mixto* (se analizarán valores numéricos y no numéricos), *no experimental* (no se busca establecer un vínculo de causalidad), *longitudinal* (por que se trabajará en diferentes momentos durante un periodo académico) y *de panel* (se seleccionará al grupo que se acompaña) El *tipo de muestreo* utilizado es *no probabilístico* porque se trabaja con los estudiantes de un sólo curso.

3.2. Participantes

En el presente estudio participaron los estudiantes del grado 7-2 de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña, la cual forma a sus estudiantes en competencias para el trabajo y la continuación de sus estudios en la Universidad, ofreciendo las modalidades de técnico ambiental y gastronómico. El establecimiento educativo se ubica en el corregimiento de Dapa del municipio de Yumbo, Valle del Cauca. El curso que se intervino está compuesto por 7 hombres y 14 mujeres, cuyas edades oscilan entre los 12 y 13 años de edad. Todos pertenecientes al estrato 2. Los miembros que componen el núcleo familiar de los estudiantes son trabajadores de la zona, y algo que caracteriza a Yumbo en términos generales es la acogida de la población flotante; esto quiere decir que son personas que vienen de otros municipios en busca de mejores oportunidades laborales.

Principios y fundamentos institucionales

La Institución Educativa Rosa Zarate de Peña tiene como base de sus procesos de formación a la Pedagogía Crítica, la cual es promotora de un pensamiento reflexivo y crítico de la realidad social para actuar sobre ella y ser gestores de cambio.

El establecimiento educativo por encontrarse en un sector que destaca por su turismo gastronómico y los pasajes naturales, ofrece a sus estudiantes un bachillerato técnico ambiental y gastronómico, con la oportunidad de continuar sus estudios a nivel profesional.

Por lo anterior, la institución educativa tiene como principio el amor por el ser humano y la naturaleza.

3.3. Etapas del estudio

3.3.1. Etapa de Diseño

Esta primera etapa presenta dos momentos: Un primer momento donde se elabora una prueba diagnóstica con la cual se busca conocer a través de la resolución de problemas, el nivel de conceptualización de *área* que manejan los estudiantes. Otro, en el que se elaboran 4 *Hojas de Trabajo* que presentan cada una sus propias intencionalidades que se explican a continuación:

- Reconocer a *GeoGebra* como un software dinámico y medio tecnológico que le permite a su usuario la visualización de registros de representación (algebraico y gráfico) y la elaboración de figuras planas a través de los comandos con los que cuenta.

- Identificar y diferenciar los conceptos de *área y perímetro*, a través de la medición en diferentes figuras planas.
- La *resolución de problemas* con el uso de GeoGebra donde se mida la capacidad de los estudiantes para descomponer y componer figuras y dar solución a los problemas planteados.
- Y finalmente la elaboración de figuras planas que representen diseños de la vida real presentes en la arquitectura, ingeniería, arte y otros (Contextualización).

3.3.2. Etapa de revisión

En esta etapa se presentó ante el director del proyecto la evaluación diagnóstica, y las Hojas de Trabajo para realizar posteriormente los diferentes ajustes para su posterior aplicación.

3.3.3. Etapa de aplicación

La prueba diagnóstica presentó un primer piloto con dos estudiantes de grado 7-1 para realizar algunos ajustes en su posterior aplicación. A continuación, se presenta una tabla con las fechas tanto para la prueba diagnóstica como para la aplicación de las Hojas de Trabajo.

Tabla 1. Cronograma de las actividades

Fecha de aplicación	Actividad	Tiempo
14/08/2019	Prueba Diagnóstico	120 minutos
11/09/2019	Hoja de trabajo No. 1	120 minutos
12/09/2019	Hoja de trabajo No. 2	120 minutos
19/09/2019	Hoja de trabajo No. 3	120 minutos

20/09/2019	Hoja de trabajo No. 4	120 minutos

3.3.4. Etapa de procesamiento

Luego de realizadas la prueba diagnóstica y las Hojas de Trabajo se procedió a sistematizar los resultados para su posterior estudio y obtención de información. Las fotografías también se organizaron de acuerdo a la actividad y fechas de realización.

3.3.5. Etapa de Análisis

Éste se llevó a cabo desde el punto de vista cuantitativo y cualitativo. Para el estudio cuantitativo de los resultados se hizo uso del *gráfico de barras* y de los términos de *correcto, incorrecto y no sabe*. El estudio cualitativo por su parte se llevó a cabo teniendo en cuenta los *Estándares Básicos de Competencias* del MEN y los referentes teóricos de la conceptualización en Matemáticas.

4. DISEÑO Y ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

Se diseñó una Prueba Diagnóstica y 4 Hojas de Trabajo (HT) que sumaron en total 5 intervenciones. La Prueba Diagnóstica contó con un Piloto para conocer la opinión de los estudiantes sobre el tipo de preguntas y efectuar los cambios correspondientes, más a la forma que al contenido de la prueba, y que sirvió para mejorar la comprensión por parte de los estudiantes del cuestionario. Las cuatro HT contaron cada una con los temas que se abordaron y las competencias trabajadas. Así mismo con la estrategia didáctica empleada para su realización.

4.1. Prueba diagnóstica

Con la prueba diagnóstica se espera medir el conocimiento que tienen los estudiantes con respecto a los conceptos de área y perímetro.

4.1.1. Presentación de la actividad

La prueba consiste en 12 preguntas: las **3** primeras piden medir el área y el perímetro de determinadas figuras de acuerdo a un patrón de medida; la **4** y la **5**, solicitan realizar un diseño con una determinada medida de área y perímetro; la **6**, mostrar su saber sobre la relación de las medidas del área y el perímetro de acuerdo a lo realizado en los puntos anteriores; la **7** su conocimiento sobre la dependencia de estas dos medidas con respeto a la forma de las figuras; la **8** su capacidad para calcular el área y el perímetro de las figuras haciendo uso de los recursos a su disposición: el registros gráfico (cuadrado de la rejilla) y el algebraico (fórmulas); la **9,** la habilidad para asociar los registros de representación gráfico y algebraico; la **10** la competencia para resolver el problema de relación existente entre el área y el perímetro; la **11** y **12**, el uso de su intuición y saberes previos para descomponer una figura en tres subfiguras con la misma área.

4.1.2. Objetivos

Indagar las concepciones que tienen los estudiantes del grado 7-2 de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña sobre el área y el perímetro de figuras planas. Igualmente, conocer sus competencias para relacionar los diferentes registros de representación y dar solución a los distintos problemas que se plantean.

4.1.3. Contexto de la intervención

La prueba diagnóstica presenta un pilotaje el día 12 de agosto, lo cual lleva a realizar cambios en la pregunta número **1** y la **6**. La primera porque las indicaciones de medir el área y el perímetro de las figuras con la unidad cuadrada estaban dadas al final y según sugerencias de los estudiantes a los que se le realizó la prueba, estas deberían de ir al inicio. Con respecto a la pregunta número **6**, los estudiantes señalaron que no comprendían lo que se les pedía como respuesta, por lo cual se replanteó la pregunta nuevamente. La prueba se realizó el día 14 de agosto y duró aproximadamente una hora y media. Se les precisó la importancia de la prueba y se resolvieron las dudas que presentaron al respecto.

4.1.4. Análisis cuantitativo y cualitativo

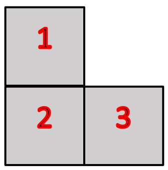
A continuación, se llevará a cabo el análisis de cada una de las preguntas de la Prueba Diagnóstico, y algunas respuestas dadas por parte de los estudiantes con sus respectivas observaciones, y al final un diagrama de barras con el resultado.

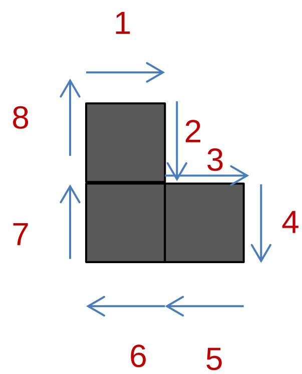
Pregunta #1

1. Considere el siguiente *cuadrado* como unidad de medida.

Encontremos ahora el *área* y el *perímetro* a la siguiente figura geométrica:

Si observamos bien la figura contiene **3** unidades de ***área*** y **8** unidades de ***perímetro***.





Ahora sí, y de acuerdo con el ejemplo determinemos la medida del contorno (perímetro) y la medida de la superficie (área) de las siguientes figuras:

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Área: _____ Área: _____ Área: _____

Perímetro: _____ Perímetro: _____ Perímetro: _____

En esta primera pregunta se quiere conocer si los estudiantes pueden diferenciar las medidas de *área* y *perímetro* en varias figuras, además si son capaces de determinar su valor de acuerdo a un *patrón de medida*.

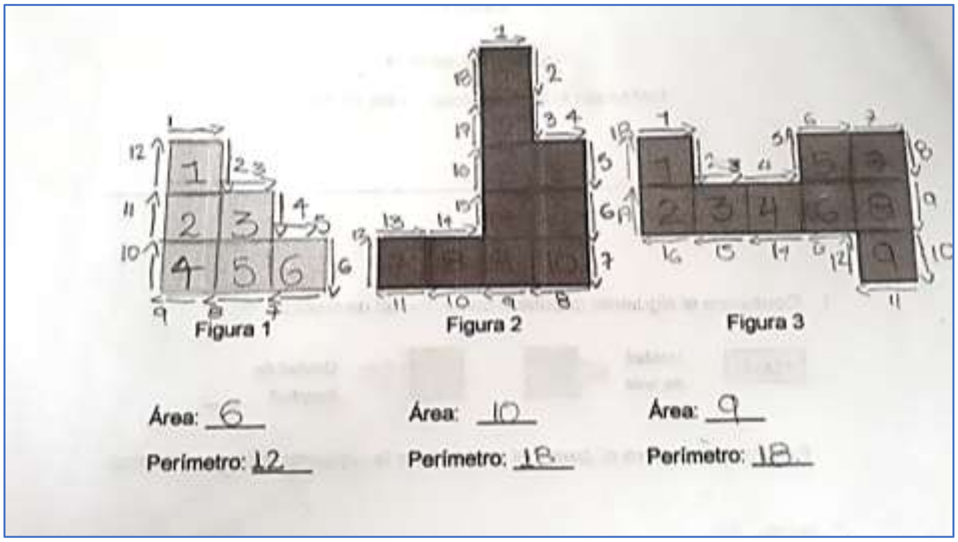


Figura 14. Respuesta de la estudiante No. 15 a la Pregunta No. 1 de la prueba diagnóstica.

Como observamos en la Figura 14, la estudiante No. 15, no tuvo dificultad en medir el área y el perímetro de las tres figuras de acuerdo a la unidad de medida, y así resultó para la gran mayoría de sus compañeros como lo observamos en el siguiente gráfico.

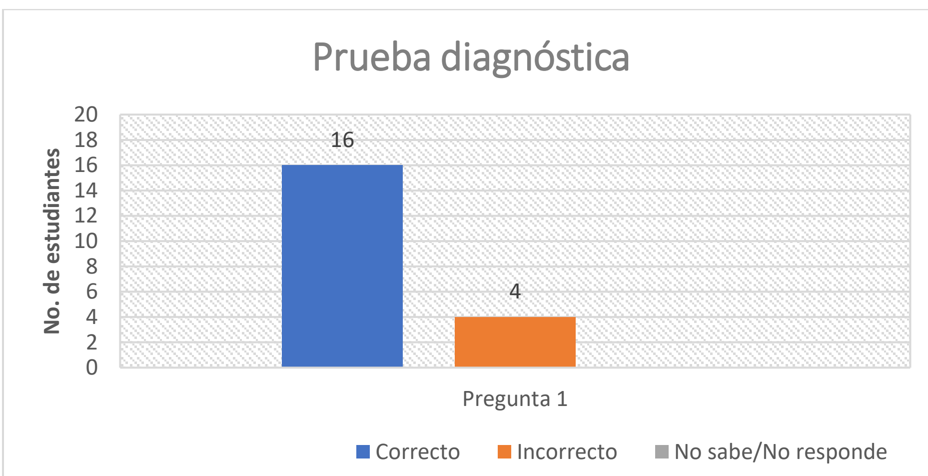


Figura 15. Resultados a la pregunta No. 1

Pregunta #2

2. Jorge, Leidy y Carolina están debatiendo sobre el perímetro y el área de las siguientes dos figuras, sin ponerse de acuerdo. Jorge afirma que la **Figura 1** tiene mayor perímetro y mayor área que la **Figura 2**; Leidy en cambio dice que la **Figura 1** y la **Figura 2** tienen ambas el mismo perímetro y la misma área, y Carolina finalmente asegura que la **Figura 1** tiene mayor perímetro, pero menor área que la **Figura 2**. ¿Cuál tiene la razón? Justifica tu respuesta.

Recuperado de *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado (2014)*

Con esta pregunta se pretende que los estudiantes resuelvan un problema que pone en juego la capacidad de inferir, a través de la medición del área y el perímetro, cuál de los tres participantes tiene la razón.

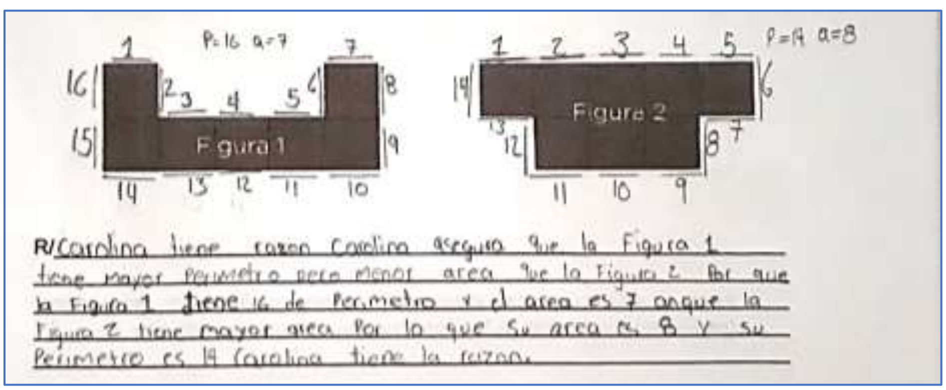


Figura 16. Respuesta del estudiante No. 18 a la Pregunta No. 2 de la prueba diagnóstica.

El estudiante No. 18 justifica la respuesta de acuerdo a su medición con la unidad de medida cuadrada. A pesar que el procedimiento para encontrar la solución es igual al anterior problema, los resultados arrojaron un aumento de las respuestas incorrectas (42%).

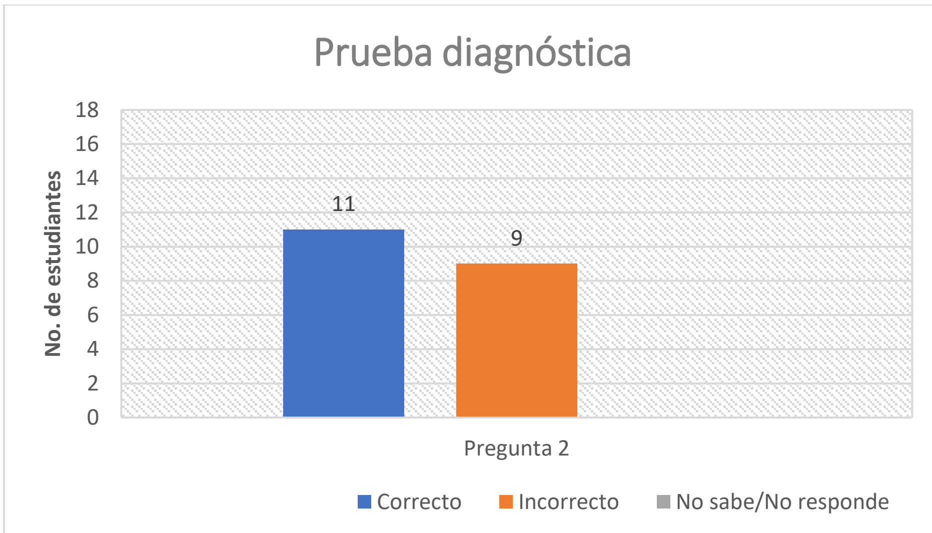


Figura 17. Resultados a la pregunta No. 2

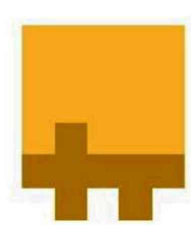
Problema #3

3. Calcular el perímetro y el área de los partes sombreados (regiones con el color más oscuro) de cada figura.

   Unidad de medida: 

Figura 1

Figura 2



Recuperado de *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado (2014)*

Área de la Figura 1: ___ Área de la Figura 2: ___

Perímetro de la Figura 1: ___ Perímetro de la Figura 2: ___

En este problema se espera que los estudiantes puedan diferenciar y ser capaces de medir el área y el perímetro del área sombreada de acuerdo a la unidad de medida dada.

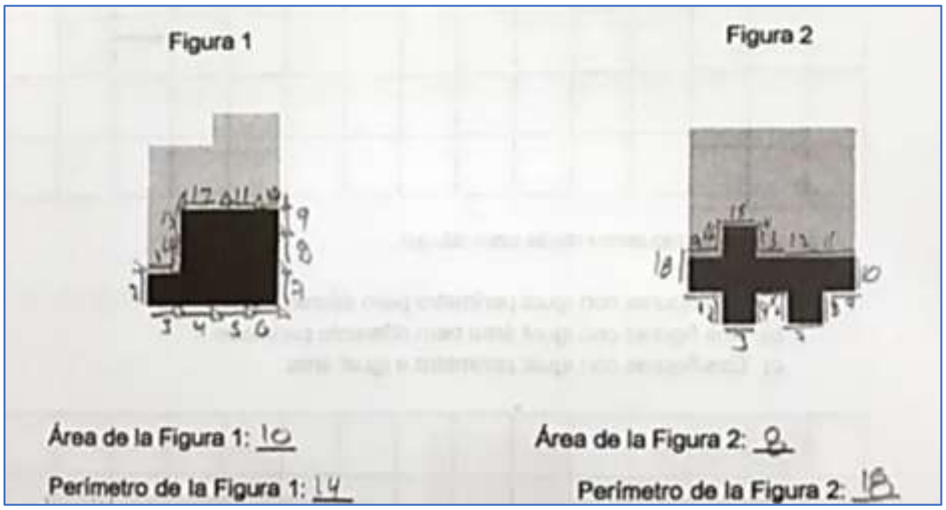


Figura 18. Respuesta del estudiante No. 8 a la Pregunta No. 3 de la prueba diagnóstica.

Aquí el alumno No. 8 responde correctamente midiendo el área y el perímetro de la figura sombreada. Se detalla que las respuestas correctas aumentaron de nuevo.

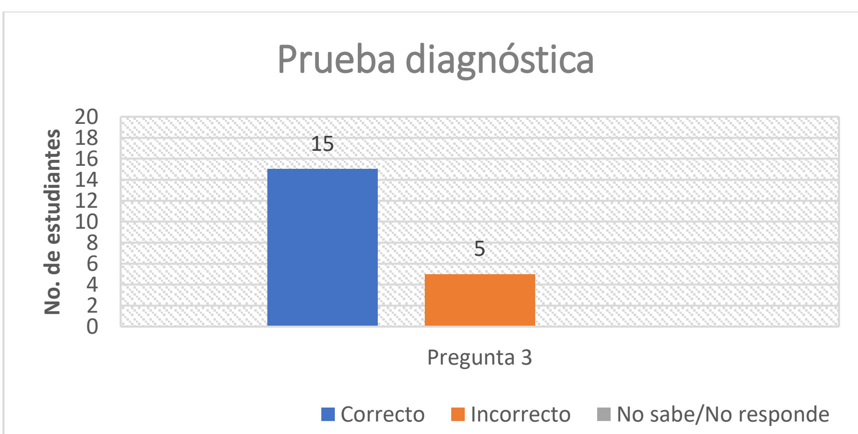


Figura 19. Resultados a la Pregunta No. 3

Problema #4

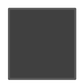
4. En la siguiente rejilla

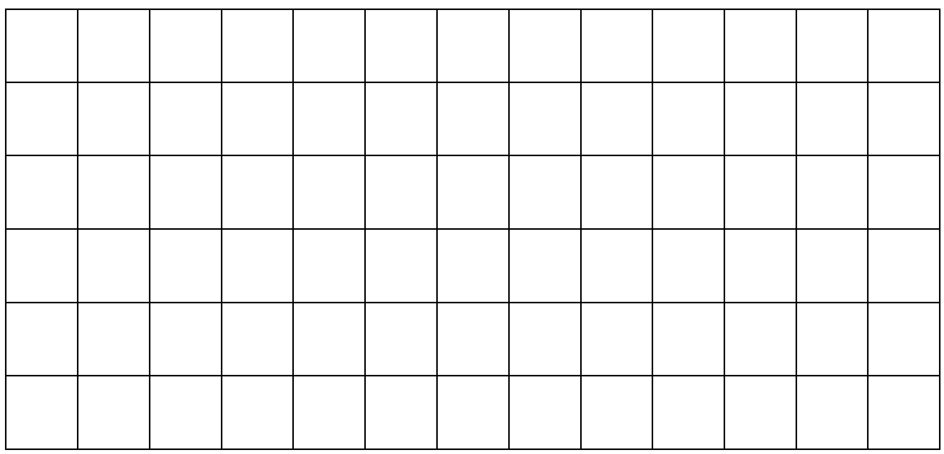
   Dibuje:

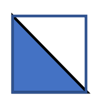
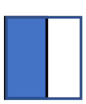
   a) Una figura con un área de 6 unidades cuadradas

   b) Una figura con 12 unidades de perímetro

   c) Una figura con 4 ½ unidades de área y 11 unidades de perímetro

   Unidad de medida: 



Se espera que con este ejercicio los estudiantes reconozcan y diferencien **a)** la medida del área y la **b)** del perímetro. Así mismo, dependiendo de cómo dibuje la mitad del área de la *unidad cuadrada* se obtienen diferentes resultados con respecto al perímetro: no es lo mismo dividir la *unidad de medida* a la mitad por su diagonal  que por uno de sus lados  lo cual es importante para dar solución al literal **c)** donde se pide hacer una figura con un área y perímetro dados.

Veamos ahora tres intentos que realizaron los estudiantes para encontrar la solución, analizando más en detalle la solicitud que se le hace en el punto c) lo cual les exige tener claro la no dependencia el perímetro del área y la descomposición de la unidad cuadrada por la mitad según un perímetro establecido.

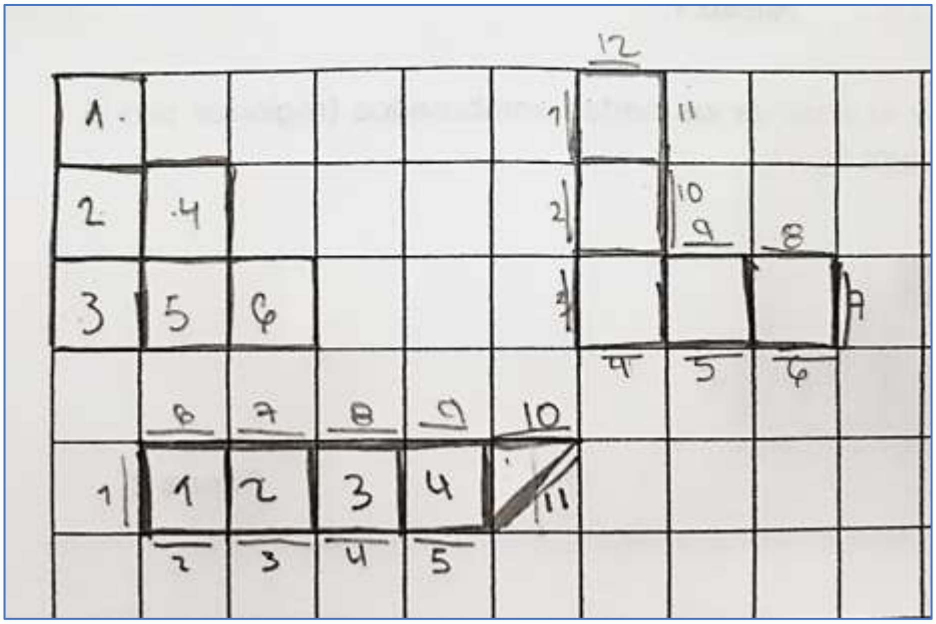


Figura 20. Respuesta del estudiante No. 11 a la Pregunta No. 4 de la prueba diagnóstica.

La estudiante No. 11 realiza la división de la unidad cuadrada por la diagonal sin percatarse que al hacerlo el resultado es mayor a la *unidad de longitud* solicitada.

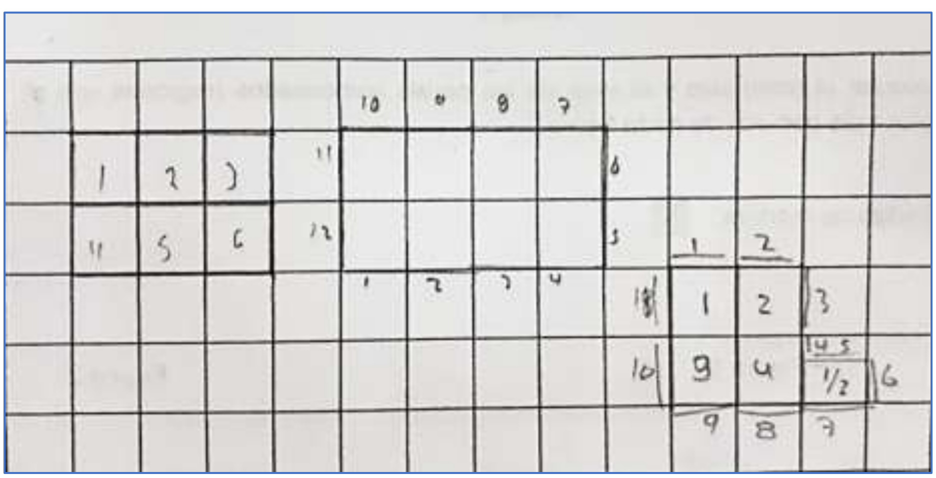


Figura 21. Respuesta del estudiante No.3 a la Pregunta No. 4 de la prueba diagnóstica.

Por su parte los estudiantes No. 3 y No. 14, logran el resultado dividiendo la unidad cuadrada a la mitad y obteniendo la *unidad de longitud* esperada.

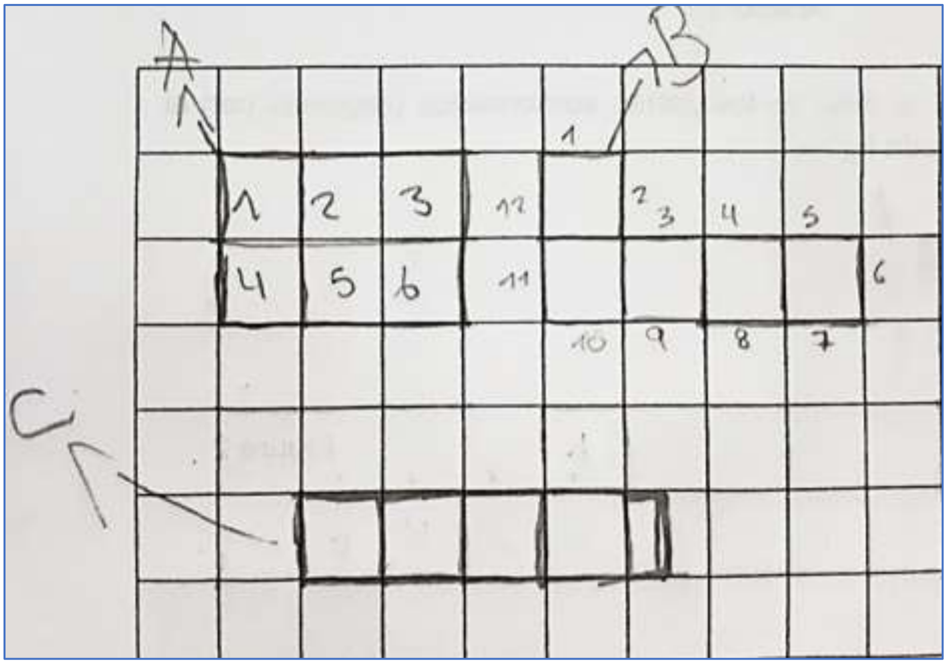


Figura 22. Resultado del estudiante No. 14 a la Pregunta No. 4 de la prueba diagnóstica.

Los resultados muestran ahora que de los 20 estudiantes sólo 2 lograron hacerlo.

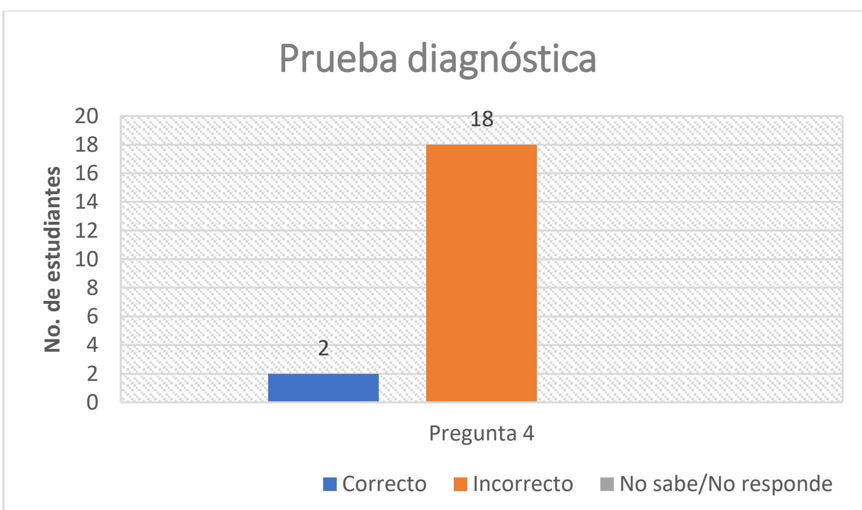


Figura 23. Resultados a la Pregunta No. 4

Problema #5

5. Utiliza la siguiente rejilla para dibujar:

   a) Dos figuras con igual perímetro, pero diferente área

   b) Dos figuras con igual área, pero diferente perímetro

   c) Dos figuras con igual perímetro e igual área

Este ejercicio pretende que los estudiantes de manera intuitiva puedan comprender que no existe una relación de dependencia entre la medida del área y la medida del perímetro, lo cual resulta ser en uno de los muchos obstáculos con los que se ven enfrentados los estudiantes.

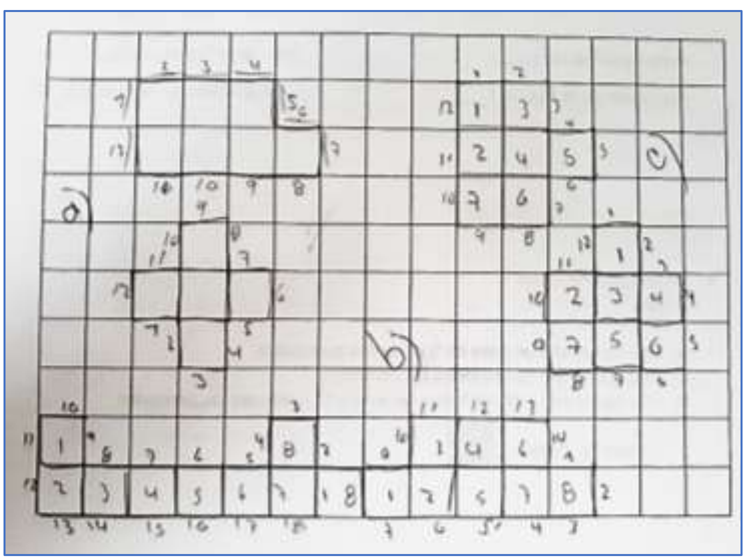


Figura 24. Respuesta del estudiante No. 3 a la Pregunta No. 5 de la prueba diagnóstica.

El estudiante No. 3 es uno de los que logra realizar lo solicitado haciendo un conteo tanto para el perímetro como para el área.

De nuevo el número de escolares que logra realizar la actividad en su totalidad es muy poca comparado con los que no la realizan o no la hacen en su totalidad.

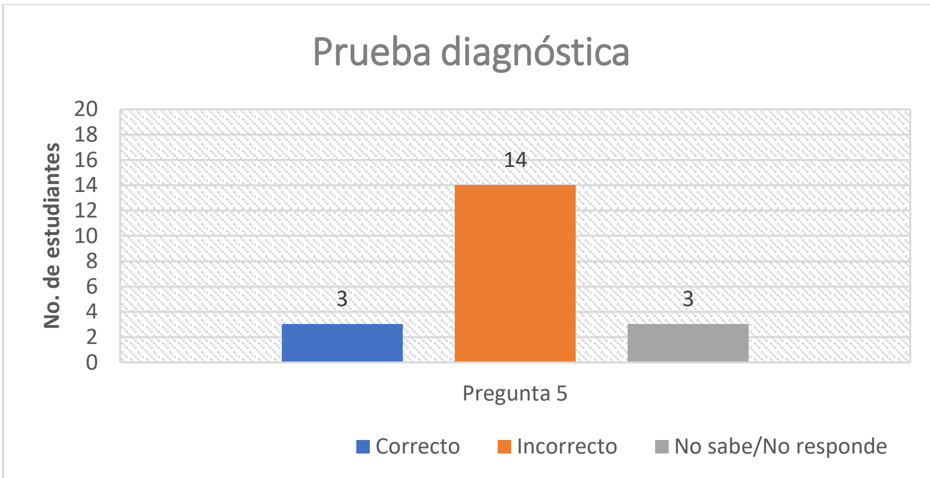


Figura 25. Resultados a la Pregunta No. 5

Problema # 6

6. De acuerdo a lo realizado hasta ahora consideras que existe una relación de dependencia entre el perímetro y el área. (Ejemplo: si se incrementa el perímetro también se incrementa el área)

a. Sí

b. No

Justifica tu respuesta:

R/____

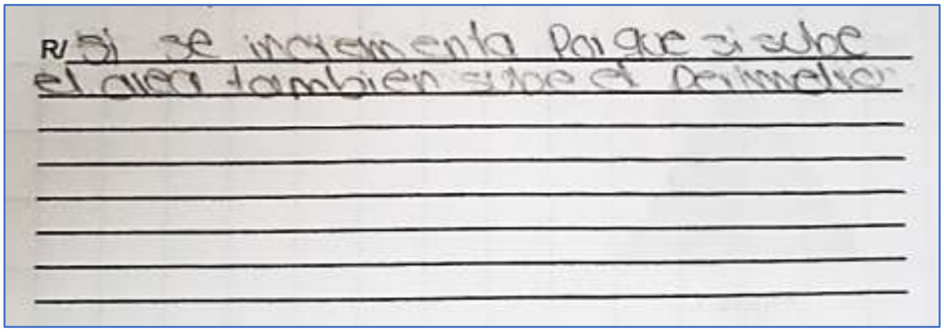


Figura 26. Respuesta del estudiante No. 14 a la Pregunta No. 6 de la prueba diagnóstica

En esta pregunta los estudiantes no lograron relacionar lo realizado en el ejercicio anterior que pretendía mostrarles la independencia de las dos medidas. Se muestra la respuesta que dio la estudiante No. 14 que fue muy similar a la entregada por sus compañeros.

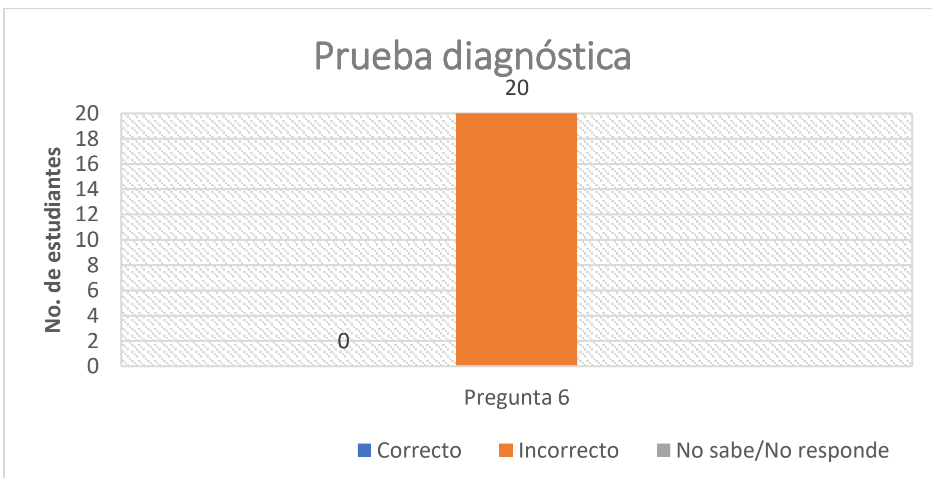


Figura 27. Respuestas a la Pregunta No. 6

Problema # 7

7. A continuación, tenemos tres figuras:

¿Es posible que estas tres figuras puedan tener la misma área y perímetro?

Explica tu respuesta:

R/____

Con esta pregunta se quiere conocer si el estudiante percibe la independencia de la medida del área y el perímetro con las formas de las figuras, y comparar haciendo estimaciones o aproximaciones.

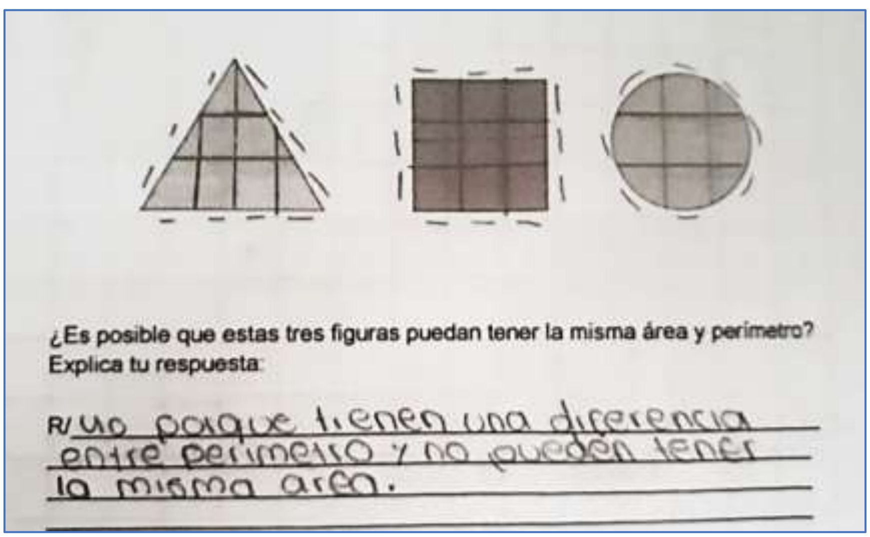


Figura 28. Respuesta del estudiante No. 4 a la Pregunta No. 7 de la prueba diagnóstica.

La alumna No. 4 empleó para dar solución al problema la misma unidad de medida cuadrada para las tres figuras, con lo cual realizó una estimación de su área y perímetro a través de su conteo. Los demás estudiantes no utilizaron un mismo patrón de medida o se limitaron a responder sin realizar una justificación.

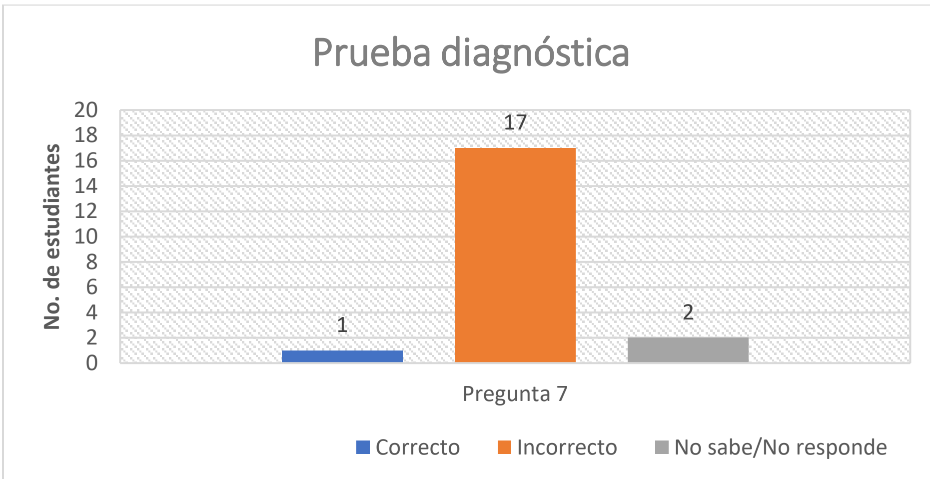


Figura 29. Respuestas a la Pregunta No. 7

Problema #8

8. A continuación, te presentamos varias figuras. Calcula su área y perímetro tomando como unidad de medida el cuadrado.

   (Utiliza el espacio de al lado de cada figura para hacer tus cálculos)

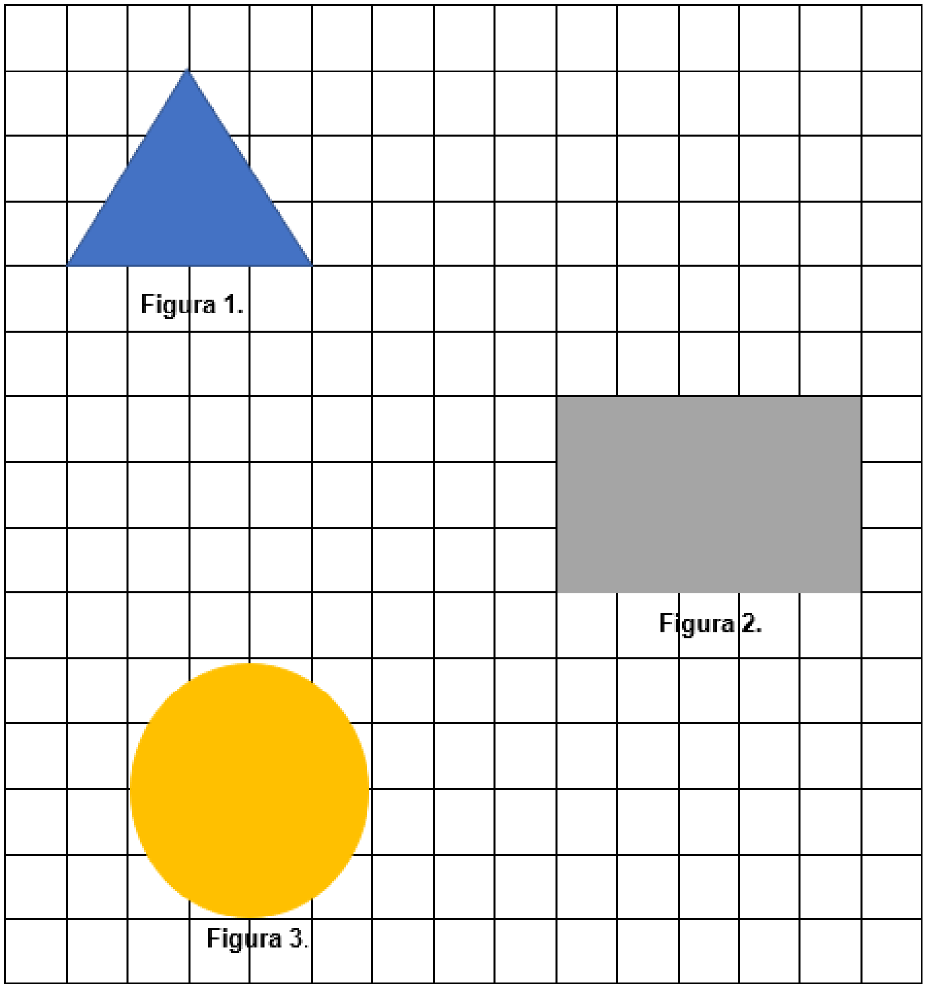


Figura 1. Perímetro=______________ Área=_________________

Figura 2. Perímetro=______________ Área=_________________

Figura 3. Perímetro=______________ Área=_________________

En este problema se quiere saber si el estudiante puede calcular y realizar la medición del área y del perímetro a través de diferentes registros de representación: algebraico, a través del uso de fórmulas y gráfico, mediante el conteo de las unidades cuadradas en cada figura.

El estudiante No.3 realiza una estimación o aproximación del área de las tres figuras a través de la unidad de medida cuadrada. Cabe resaltar que, a pesar de no utilizar las fórmulas del área de cada una de las figuras, sus resultados son muy aproximados para el caso de la circunferencia donde su perímetro y área son iguales, y exactos en el del triángulo equilátero donde su perímetro es 12 unidades de longitud y su área igual a 6 unidades cuadradas.

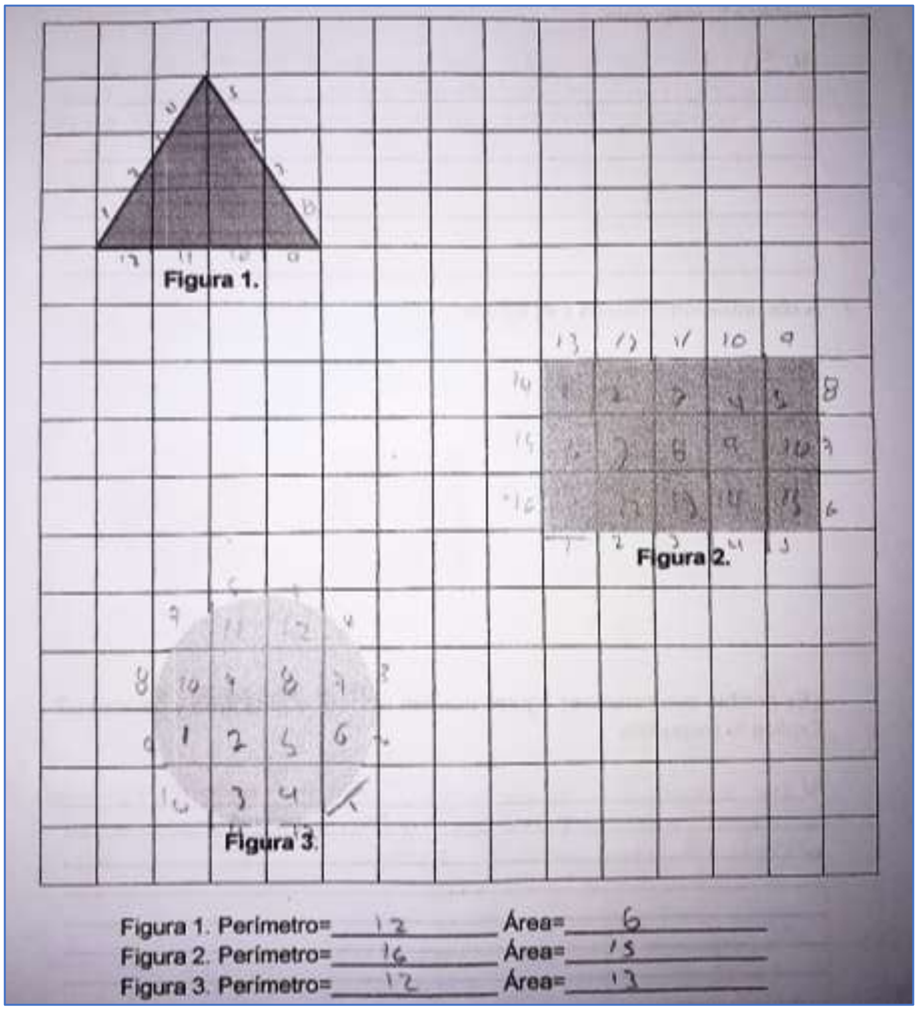


Figura 30. Respuesta del estudiante No.3 a la Pregunta No. 8 de la prueba diagnóstica.

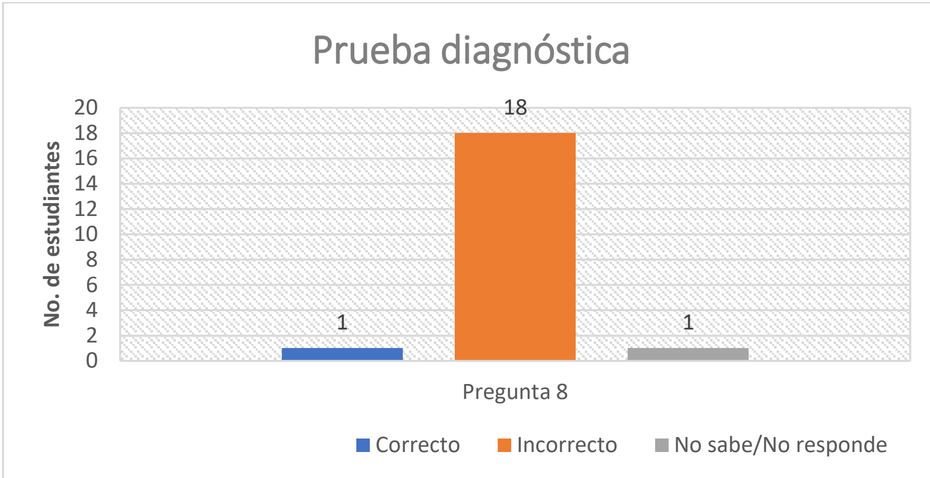


Figura 31. Respuestas a la Pregunta No. 8

Problema #9

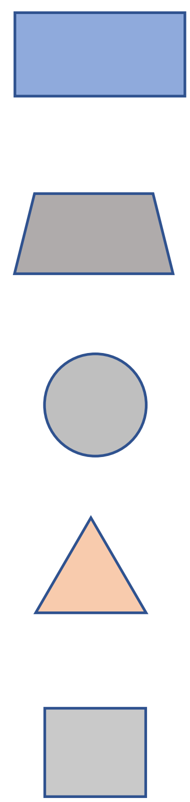
9. Relaciona con una *línea* la fórmula de área con la figura a la que corresponda:

$A= L^2$

$A= \frac{\mathbf{b}(\text{base}) \text{ x } \mathbf{h}(\text{altura})}{2}$

$A= \pi r^2$

A= **a** (lado $_1$) **x** **b** (lado $_2$)



Aquí los estudiantes muestran su competencia para asociar el *registro algebraico* representado en la fórmula con el *registro gráfico* representado por la figura.

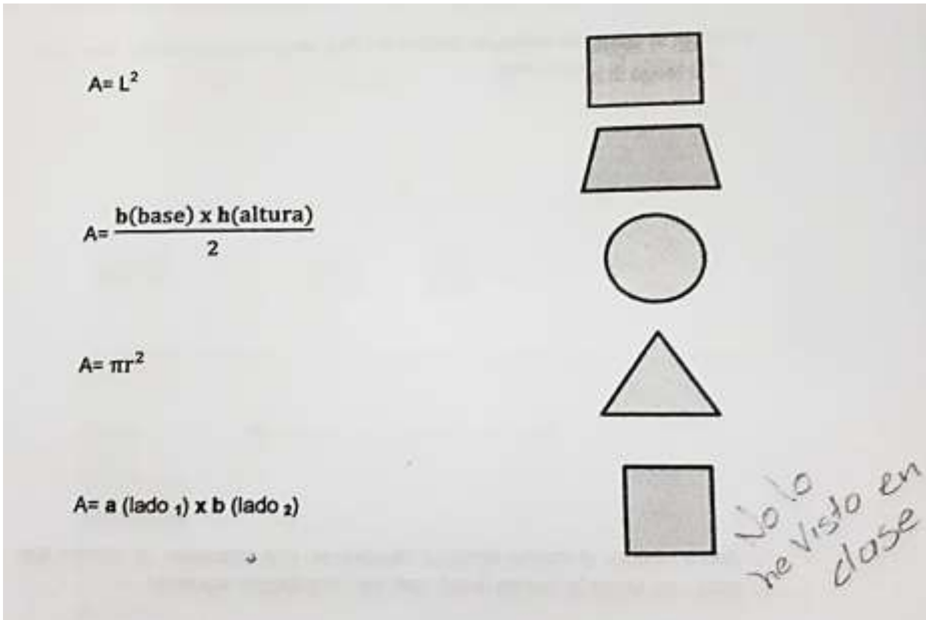


Figura 32. Respuesta del estudiante No.10 a la Pregunta No. 9 de la prueba diagnóstica

Todos los estudiantes manifiestan en su conjunto no haber visto o no recordar las fórmulas para el cálculo del área de las figuras que se les presentan. Para Duval, uno se ha apropiado de un concepto, cuando se posee la habilidad de pasar de un registro de representación a otro, algo que por lo visto en este ejercicio los alumnos no lo han adquirido.

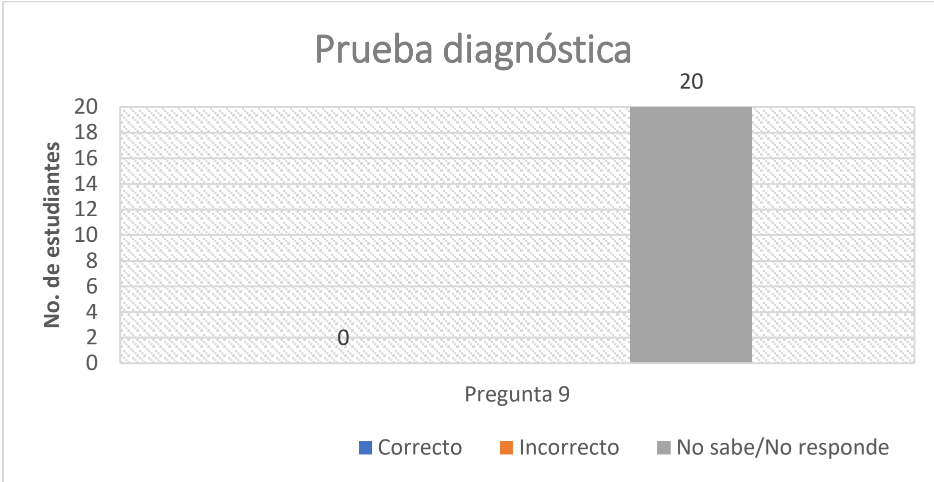


Figura 33. Respuestas a la Pregunta No. 9

Problema #10

10. Se tienen dos lotes **A** y **B**. El lote **B** es el doble (duplica el área) del lote **A**. Si para cercar el lote **B** se emplearon 600 metros de alambre de púa. ¿Cuántos metros de alambre de púa se necesitarán para cercar el lote **A**?

Justifica tu respuesta:

R/____

Nuevamente lo que se quiere conocer con este problema es la capacidad del estudiante de reconocer que no existe una dependencia tal que al aumentar el área de la figura el doble, su perímetro también será el doble.

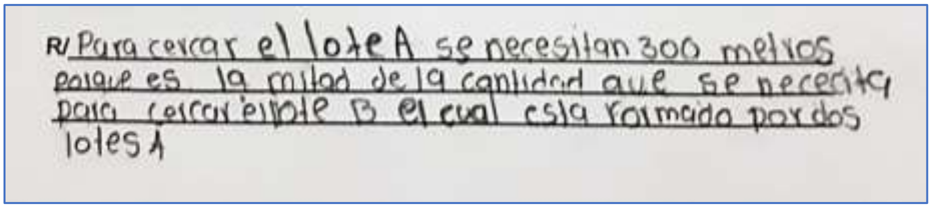


Figura 34. Respuesta del estudiante No. 23 a la Pregunta No. 10 de la prueba diagnóstica.

En este caso, la estudiante No.23 deduce su respuesta a partir de la concepción de dependencia que aún persiste en los estudiantes del área con relación al perímetro. En este sentido se aplica lo que para Anna Sierpinska es un *obstáculo epistemológico*: Una creencia que se repite y persiste en el tiempo en un determinado grupo de personas (Sierpinska, 1992) y que se respalda también por la investigación de D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007) sobre "las convicciones de maestros y de estudiantes en lo que concierne a las relaciones existentes entre perímetro y área de una figura plana."

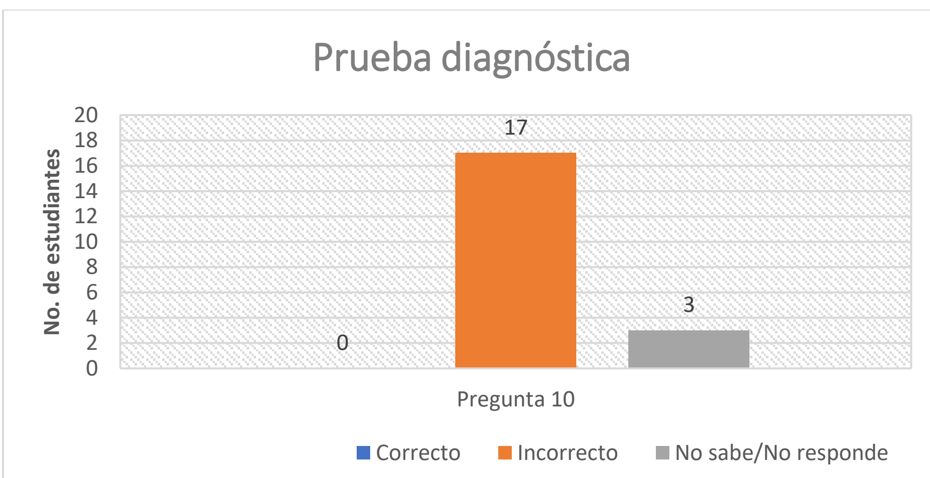
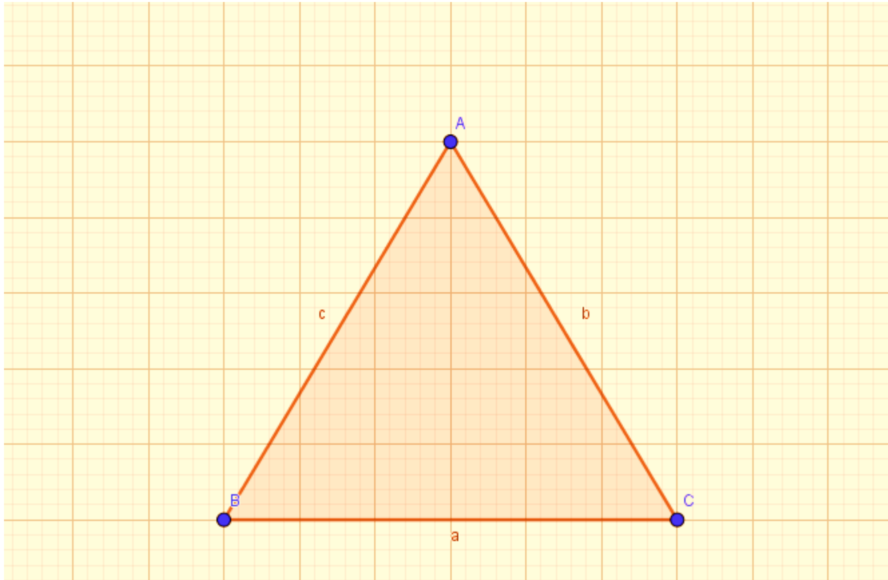


Figura 35. Respuestas a la Pregunta No. 10

Problema #11

11. Dado el siguiente triángulo dividirlo en tres secciones de manera que cada una tenga la misma área.



Con este ejercicio se espera que los alumnos muestren su competencia de descomponer una figura (triángulo equilátero) en tres subfiguras que tengan la misma área y para lo cual cuentan con la ayuda de la cuadrícula para realizar sus mediciones. La solución puede hallarse a través del *Teorema de Thales* o formando tres subtriángulos desde el *baricentro*, el cual se obtiene a partir de la intersección de al menos dos de sus *medianas*.

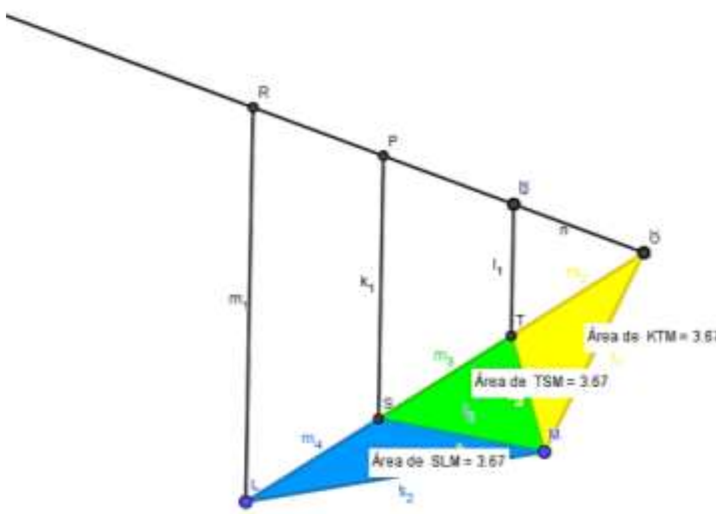


Figura 36. Teorema de Tales

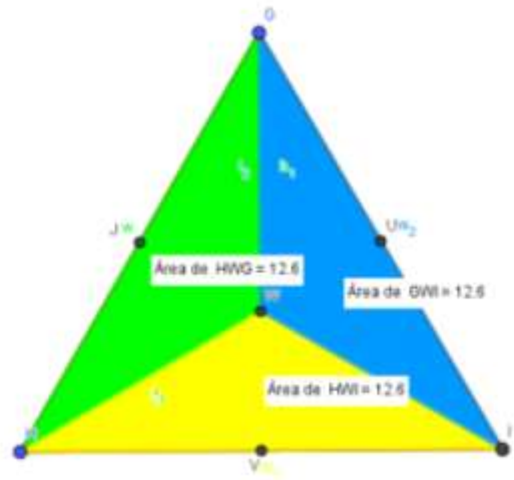


Figura 37. Subtriángulos obtenidos desde el baricentro del triángulo

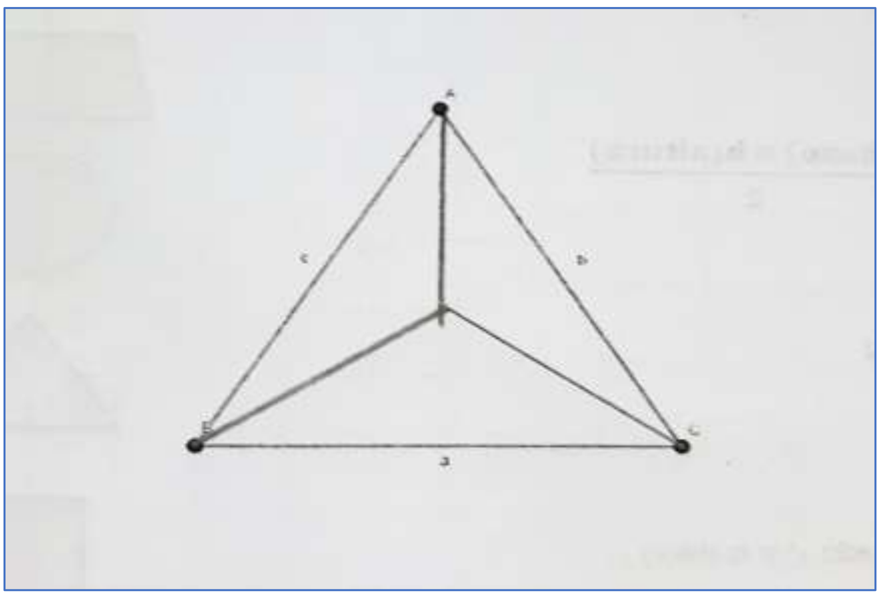


Figura 38. Respuesta del estudiante No. 5 al Problema No. 11 de la prueba diagnóstica

El estudiante No. 5 fue uno de los doce alumnos que encontraron la solución a partir de la formación de tres triángulos desde el *baricentro*. Sin embargo, esta solución se logra con una estimación intuitiva a partir del gráfico que del conocimiento mismo de las *líneas notables* del triángulo. ¿Cómo explicarlo? Una respuesta podría ser las *representaciones icónicas* a las que han sido expuestos los estudiantes por medio de textos (académicos y no académicos) o a través de los diferentes medios de comunicación (internet, televisión), o

vistos en marcas comerciales, como por ejemplo, el de la Mercedes-Benz

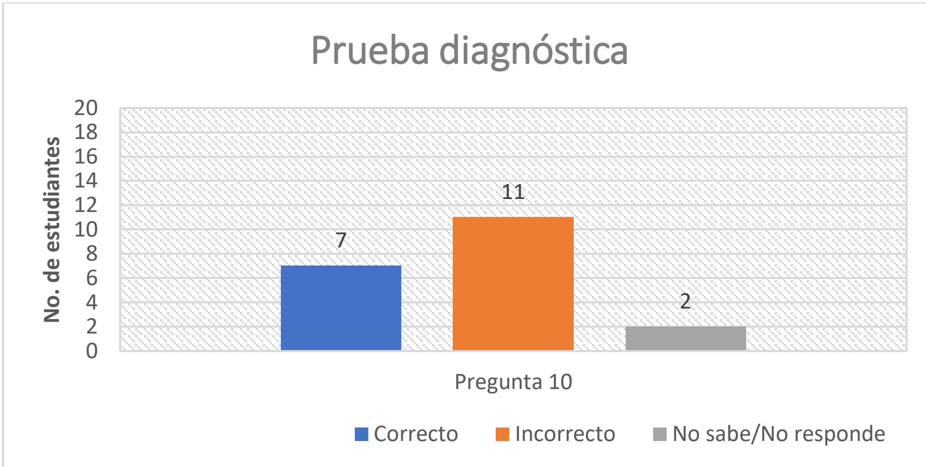
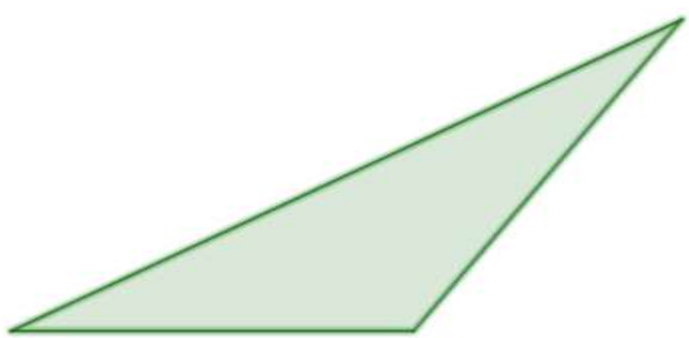


Figura 39. Respuestas a la Pregunta 11

Problema #12

12. Ahora realizar el mismo ejercicio (dividirlo en tres secciones de manera que cada una tenga la misma área) pero con el triángulo siguiente.



Igual que en el ejercicio anterior se espera que los estudiantes muestren su habilidad para dividirlo en tres subfiguras con igual área.

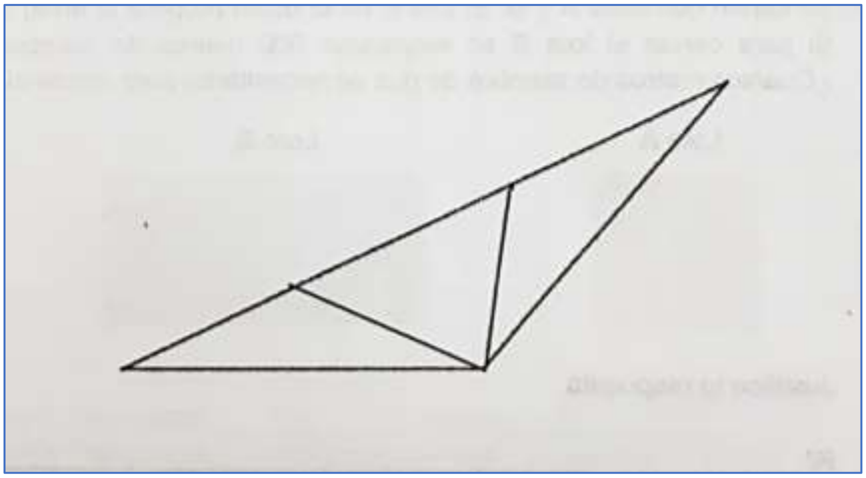


Figura 40. Respuesta del estudiante No. 11 a la Pregunta No. 12 de la prueba diagnóstica

La estudiante No. 13 logra dividir el triángulo en tres subtriángulos con igual área. Podría deducirse a partir del gráfico que obtiene un resultado similar al que se logra con el *Teorema de Thales* y esto nos llevaría a pensar que su nivel en la teoría de Van Hiele se encontraría dentro de los últimos. No obstante, al indagar al estudiante nos damos cuenta que lo que llevó a obtener este resultado fue un proceso de estimación y/o aproximación de las áreas.

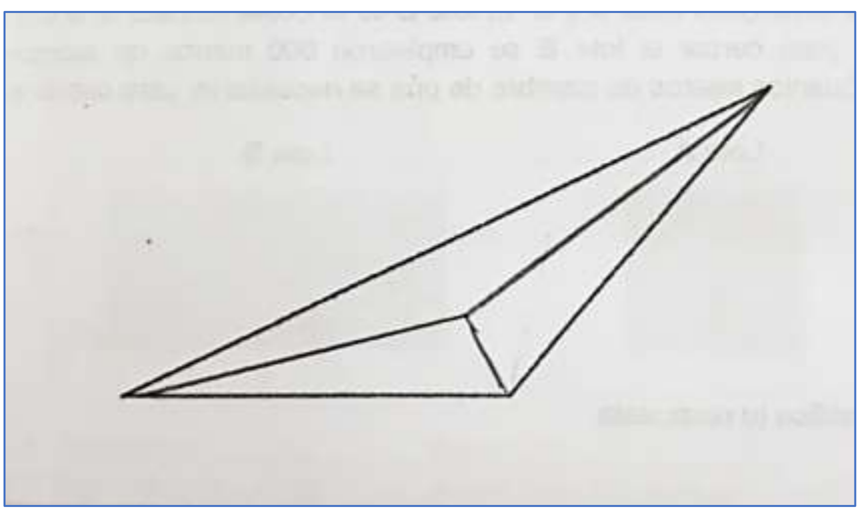


Figura 41. Respuesta del estudiante No. 5 a la Pregunta No. 12 de la prueba diagnóstica

Este otro resultado el estudiante No. 5 lo hace a partir del *baricentro* logrado desde su propia estimación.

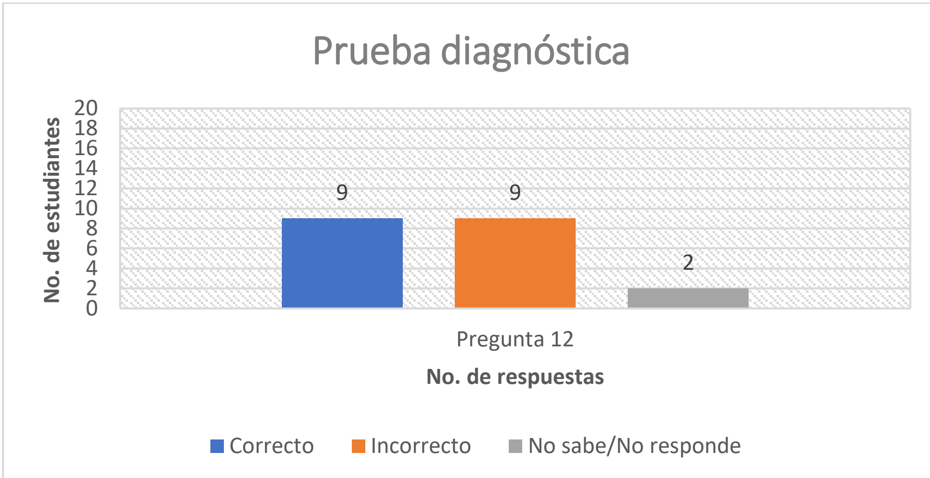


Figura 42. Respuestas a la Pregunta 12

4.1.5. Consideraciones al final de la intervención.

Se observa de acuerdo a los gráficos que los estudiantes presentaron dificultades en los problemas donde la comprensión de lectura y la interpretación es de gran importancia para su resolución. Igualmente, los ejercicios donde la competencia es medir a través del conteo de unidades de longitud y de área (Preguntas 1, 2 y 3) y estimar por medio de la división una figura en subfiguras con igual área (Preguntas 11 y 12), los resultados fueron positivos.

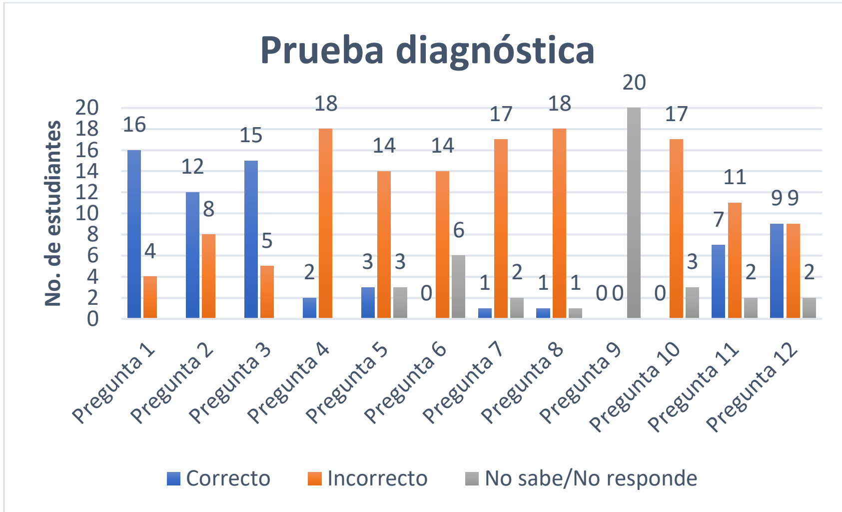


Figura 43. Consolidado de las respuestas dadas en la prueba diagnóstica

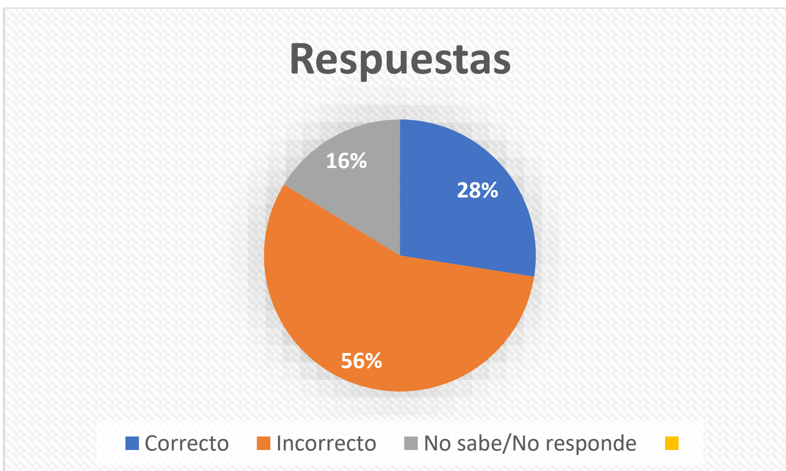


Figura 44. Consolidado porcentual de las respuestas dadas en la prueba diagnóstica

4.2. Hoja de Trabajo No. 1.

4.2.1. Presentación de la actividad

En la primera hoja de trabajo el estudiante hace un reconocimiento de GeoGebra: el menú, la barra de herramientas, sus comandos y funciones, la vista algebraica y gráfica, a través de una exploración guiada por el profesor. Trabajarán algunas propiedades presentes en los cuadriláteros, trapecios, paralelogramos, rectángulos, rombos y cuadrados. Así mismo, posee actividades donde pondrán a juego su creatividad con la formación de figuras a través del Tangram.

4.2.2. Objetivos

La hoja de trabajo No. 1 tiene como propósito básico la *exploración* de GeoGebra, su interfaz, la identificación de los registros de representación algebraico y gráfico, el conocimiento mediante algunas construcciones de las propiedades de algunos cuadriláteros, y la creatividad representada en la elaboración del Tangram y de varias figuras con cada una de sus piezas. Por lo tanto, los resultados serán dados a través de las observaciones hechas en la clase de sus actitudes y comportamientos expresados durante su implementación.

4.2.3. Contexto de la intervención

La primera hoja de trabajo se llevó a cabo el día 11 de septiembre en la sala de cómputo de la Institución Educativa. Los estudiantes fueron ubicados por parejas para compartir cada computador e hicieran un trabajo de colaboración mutua.

4.2.4. Análisis

Se exploraron en la primera parte, algunos comandos como el de la recta, la recta perpendicular, la recta paralela, para formar una *trama de líneas*.

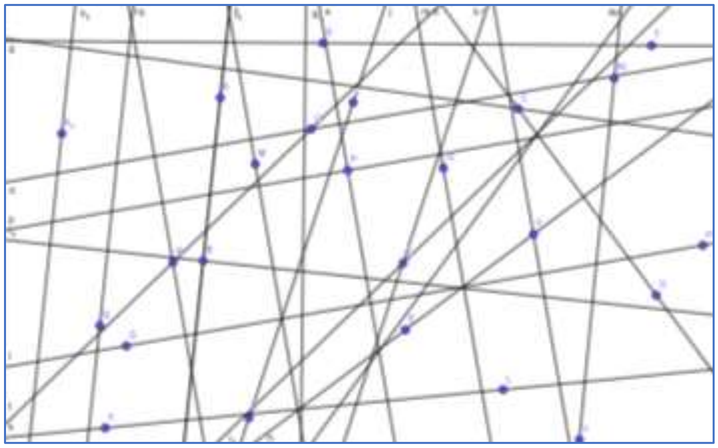


Figura 45. Trama de líneas

Luego, a partir de esta *trama de líneas*, identificaron algunos polígonos como los *cuadriláteros* cuya condición es que tengan *cuatro lados*, y donde se agrupan los trapecios, paralelogramos, rombos, rectángulos y cuadrados; los *trapecios* con la característica de tener *un par de lados paralelos*, y en el que están los paralelogramos, rombos, rectángulos y cuadrados; los *paralelogramos*, que tienen *dos pares de lados paralelos* y se hallan los rombos, rectángulos y cuadrados; los rombos, que tienen además de un par de lados paralelos, los *cuatro lados iguales*; los rectángulos poseen además de un par de lados paralelos, *sus lados contiguos forman ángulos rectos*, y es lo que hace que el cuadrado sea también un rectángulo; el cuadrado que además de tener dos pares de lados paralelos y formar ángulos rectos entre sí, sus lados son congruentes.

Esta forma de enseñarles a los estudiantes los diferentes tipos de cuadriláteros hace más fácil la sistematización y agrupación por sus propiedades.

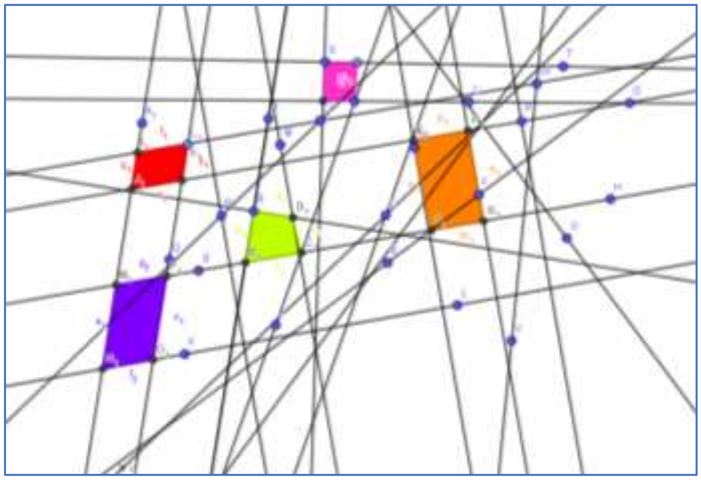


Figura 46. Cuadriláteros identificados en la trama de líneas

Luego se les pidió que utilizaran el comando de *Longitud* para medir el perímetro de los polígonos y el comando *Área* para realizar la medición de su superficie.

En la segunda parte se guió a los estudiantes en la elaboración del Tangram con los comandos de *Polígono* y *Polígono rígido* y la realización de algunos diseños. Esta actividad tomó más tiempo de lo esperado por lo que se aplazó la elaboración de los diseños para otro momento.

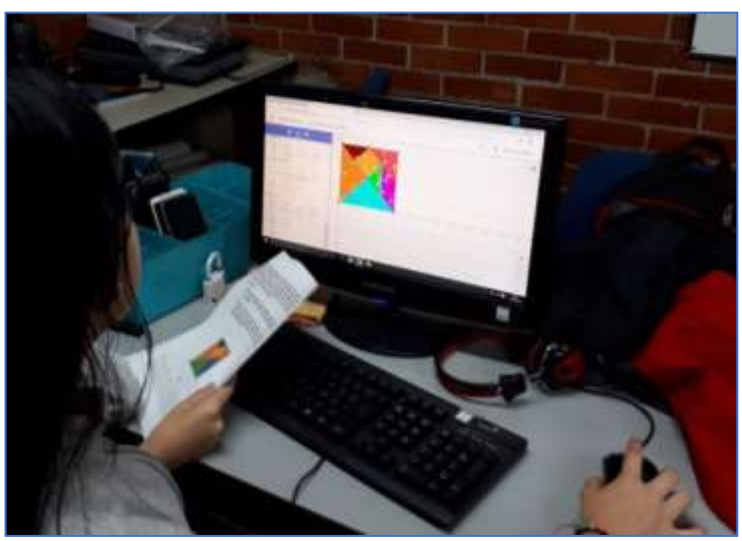


Figura 47. Pareja de estudiantes trabajando en la elaboración del Tangram

Figura 48. Bosquejo de un hombre sentado con las piezas del Tangram

4.2.5. Consideraciones al finalizar la intervención.

La actitud por parte de los estudiantes fue positiva al trabajar con el computador, su habilidad "innata" para usar los comandos y comprender las indicaciones propuestas en clase permitió que se cumpliera los objetivos casi en su totalidad.

4.3. Hoja de Trabajo No. 2

4.3.1. Presentación de la actividad

La hoja de trabajo No. 2 consistió en 4 actividades: la primera, en la elaboración de varios rectángulos que cumplieran la condición de tener un área determinada; la segunda, en el cálculo del área de un rombo a través de un procedimiento distinto al uso de la fórmula; la tercera en la determinación del área de un romboide conociendo la longitud de sus lados; y la cuarta, consistente en la variación de la medida del área y del perímetro en un conjunto de triángulos. Las anteriores actividades se llevaron a cabo con la ayuda de GeoGebra instalado en las Tabletas.

4.3.2. Objetivos

Medir la competencia de los estudiantes para deducir a través de diferentes procedimientos el tipo de relación que hay entre la medida del perímetro y el área en varios polígonos.

4.3.3. Contexto de la intervención

La clase se lleva a cabo el día 18 de septiembre en el salón donde se dicta la clase de Geometría. Se formaron grupos de 2 y 3 estudiantes a los que se les entregó la Hoja de Trabajo y una Tablet que tenía instalado GeoGebra para ayudarlos en la realización de las tareas. Se les indicó además que podía hacer uso de su cuaderno de notas del curso.

4.3.4. Análisis

Se hará un análisis de cada una de las preguntas y se presentarán algunas de las respuestas dadas por parte de los alumnos con sus respectivas observaciones; al final se mostrará un diagrama con el resumen de los resultados.

1. Dibuja varios rectángulos cuyo perímetro sea igual a 16 cm ¿El área de los rectángulos varía o es igual para todos? ¿Qué figura resultó con la mayor área? ¿Será posible encontrar una con la mayor área de todas?

R/____

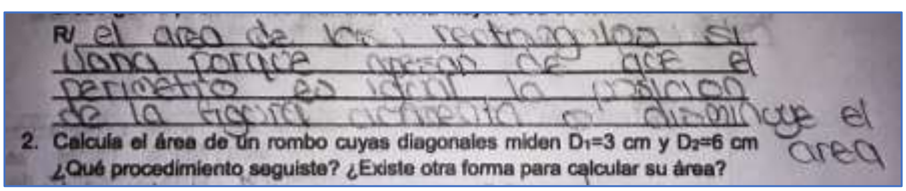


Figura 49. Respuesta de los estudiantes No. 11, 13 y 21 a la Pregunta No. 1

Aquí el grupo conformado por los estudiantes No. 11, 13, y 21, encuentran que el cambio del área viene determinado por la forma de la figura y no por su perímetro. Sin embargo, no llegan a discernir que el cuadrado es también un rectángulo y que por ello es la figura que resulta con mayor área.

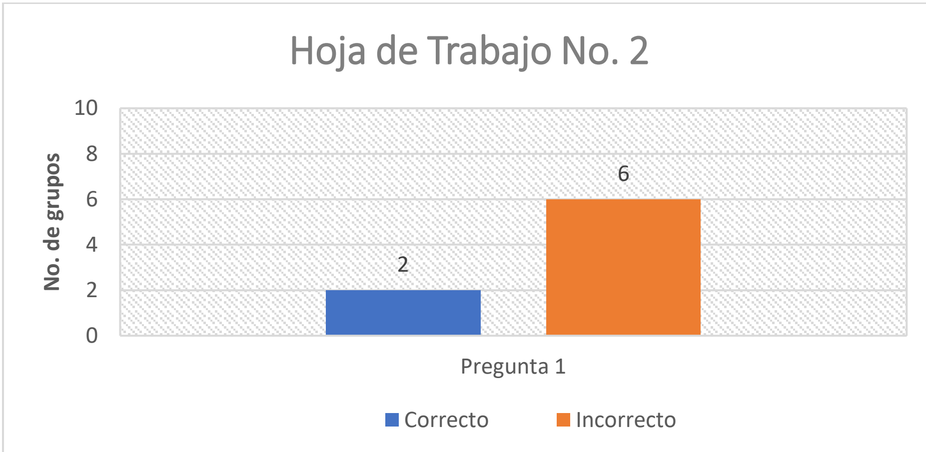


Figura 50. Respuestas de los grupos a la Pregunta No. 1

2. Calcula el área de un rombo cuyas diagonales miden D1=3 cm y D2=6 cm ¿Qué procedimiento seguiste? ¿Existe otra forma para calcular su área?

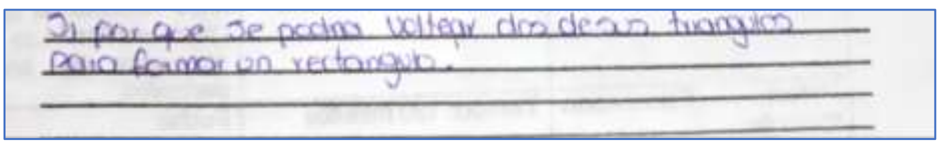


Figura 51. Respuesta de los estudiantes No. 1 y 15 a la Pregunta No. 2

El grupo conformado por las estudiantes No. 1 y 15 responden correctamente, transformando el rombo en un rectángulo al trasladar dos de los triángulos (generados por de la división del rombo al trazar sus diagonales) hacia los triángulos ubicados diagonalmente.

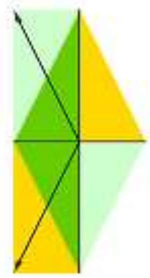


Figura 52. Rectángulo obtenido a partir de un rombo

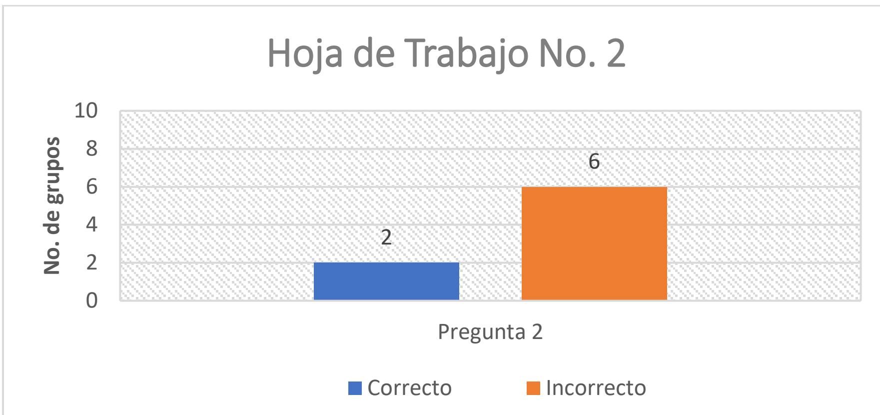


Figura 53. Respuestas de los grupos a la Pregunta No. 2

3. Traza un romboide cuyos lados L1=2cm y L2=5cm ¿Es posible determinar una única área con solo estos datos?

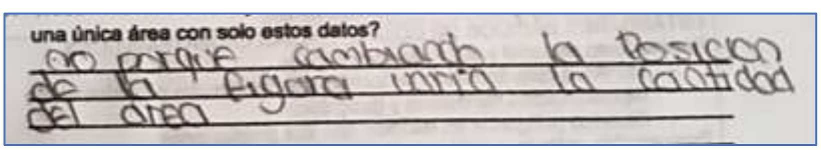


Figura 54. Respuesta de los estudiantes No. 11, 13 y 21 a la pregunta No. 3

El grupo conformado por las estudiantes No. 11, 13 y 21 pudieron determinar que al cambiar la forma del romboide cambia igualmente la medida del área sin que haya variación de su perímetro.

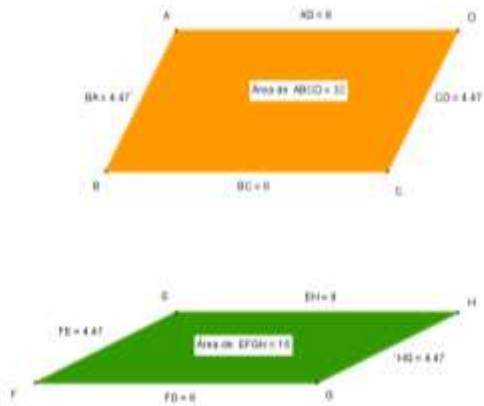


Figura 55. Dos romboides con igual perímetro, pero diferente área

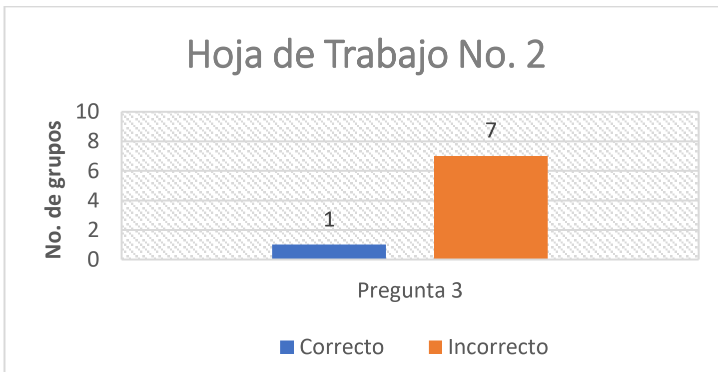
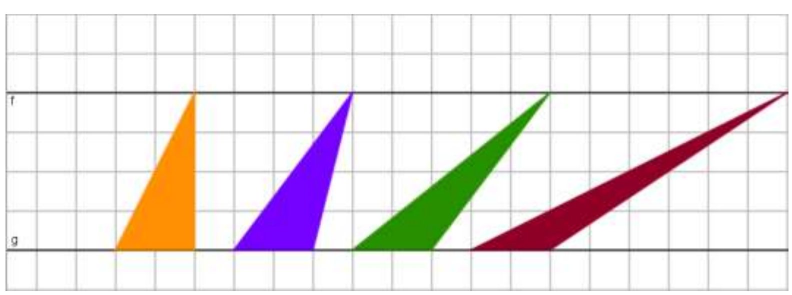
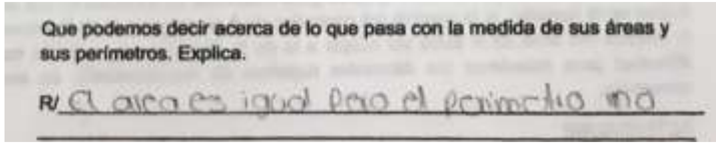


Figura 56. Respuestas de los grupos a la Pregunta No. 3

4. Bosqueja varios triángulos entre dos rectas paralelas como se muestra a continuación:



Que podemos decir acerca de lo que pasa con la medida de sus áreas y sus perímetros. Explica.


Que podemos decir acerca de lo que pasa con la medida de sus áreas y sus perímetros. Explica.

R/ El area es igual pero el perimetro no

Figura 57. Respuesta de los estudiantes No. 9,14 y 20 a la Pregunta No. 4

El grupo conformado por los estudiantes No. 9, 14 y 20 responden adecuadamente pero no explican su respuesta; lo hacen gráficamente a través de la construcción de los triángulos en medio de las dos rectas paralelas y la función de arrastre que permite GeoGebra.

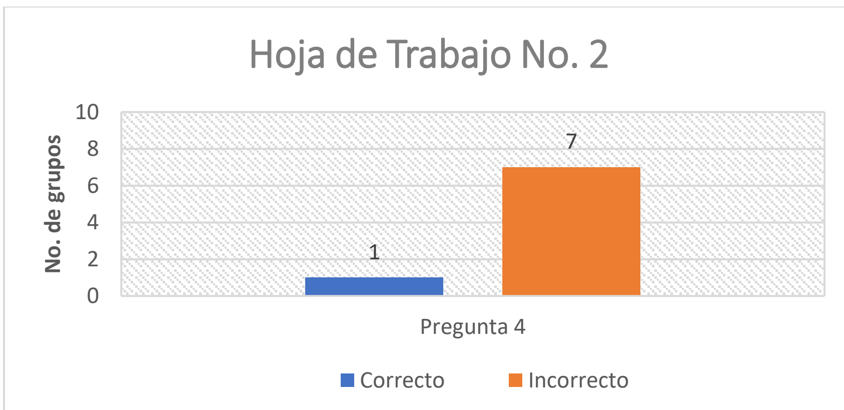


Figura 58. Respuestas de los grupos a la Pregunta No. 4

4.3.5. Consideraciones al finalizar la intervención.

En general los problemas resultaron ser un reto para los estudiantes, quienes al parecer no se habían enfrentado a este tipo de preguntas con anterioridad; se suma a esto la falta de competencia de pasar del registro escrito del lenguaje al registro gráfico y poder interpretar lo que se les estaba preguntando; otra dificultad fue la lenta respuesta de GeoGebra a las órdenes táctiles que se le hacía en las Tablets que terminó por minar la paciencia de algunos estudiantes, siendo utilizadas sólo por aquellos que tenían la habilidad de la espera.

4.4. Hoja de Trabajo No. 3.

4.4.1. Presentación de la actividad

La Hoja de Trabajo No. 3 se basó en 4 Problemas: el primero consistió en deducir a partir del triángulo y el cuadrado las diferencias entre la medida del área y el perímetro; el segundo en determinar cómo va variando el área de los cuadrados y poder así conjeturar un futuro resultado; el tercero en señalar que fracción de área ocupa la región sombreada frente al área total de cada una de las figuras presentadas; y el cuarto, consistente en establecer si las dos áreas (la sombreada y la otra) contenidas en el cuadrado en formas de triángulos son iguales o una es mayor que la otra.

4.4.2. Objetivos

Medir las competencias de los estudiantes para diferenciar las medidas del perímetro y el área en una figura, a través de la aplicación de transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones y reflexiones). Del mismo modo, resolver problemas estableciendo conjeturas y relaciones entre valores. Por último, dar solución a preguntas a través de la composición y descomposición de figuras planas.

4.4.3. Contexto de la intervención

La intervención se desarrolla en el salón de la clase de Geometría el día 19 de septiembre. Aquí se realiza una retroalimentación de las situaciones de la anterior Hoja de Trabajo, se señalan las relaciones existentes con los problemas propuestos en la actual. Se les indica a los estudiantes la posibilidad de utilizar su cuaderno de apuntes y del programa GeoGebra instalado en las Tablets.

4.4.4. Análisis

Se hará un análisis de cada una de las preguntas con la presentación de las respuestas dadas por los estudiantes con sus respectivas observaciones formadas durante la intervención.

Problema 1.

Teniendo presente que las partes que componen el cuadrado y el triángulo son iguales. ¿Qué podemos decir de las medidas del área y el perímetro de cada una de ellas? ¿Son iguales? ¿Diferentes? ¿Por qué? Argumenta tu respuesta.

Figura 1

Figura 2

Ilustración tomada de http://www.etudes.ru/en/models/dudeney-dissection/

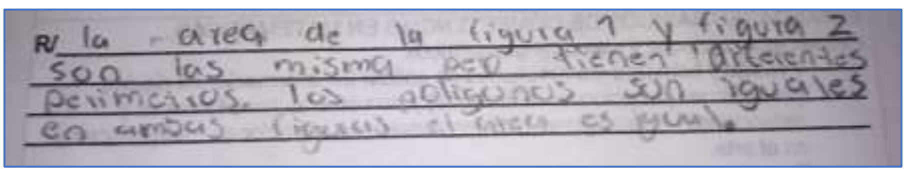


Figura 59. Respuesta de los estudiantes No. 6, 8 y 10 a la Problema No. 1

El equipo conformado por las estudiantes No. 6, 8 y 10 responden acertadamente a la pregunta, y basan su argumento en que las dos figuras tienen la misma área porque están conformadas por los mismos polígonos; no así, responde del porque tienen diferente perímetro.

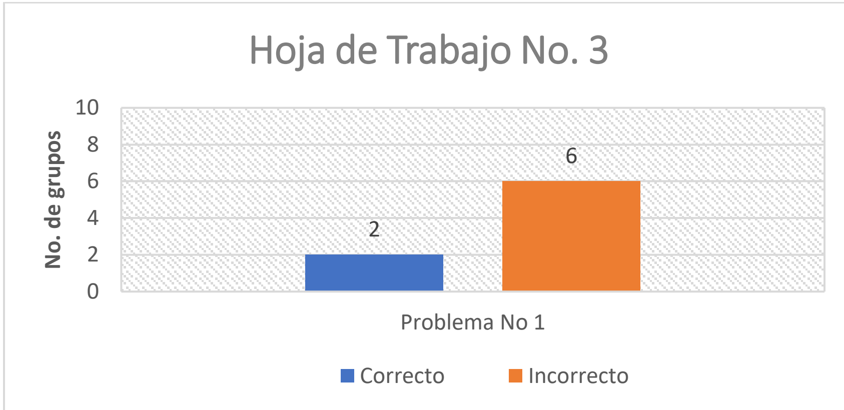
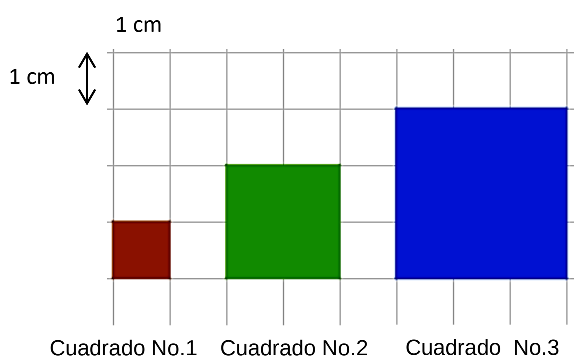


Figura 60. Respuestas de los grupos a la Problema No. 1

Problema 2.

Asumiendo que la longitud de cada cuadro es de 1cm. Calcula el área de cada una de los cuadrados que se presentan a continuación y discute con tus compañeros si se puede predecir cuál va a ser la medida del área del cuadrado No. 4 y de los siguientes. Explica.



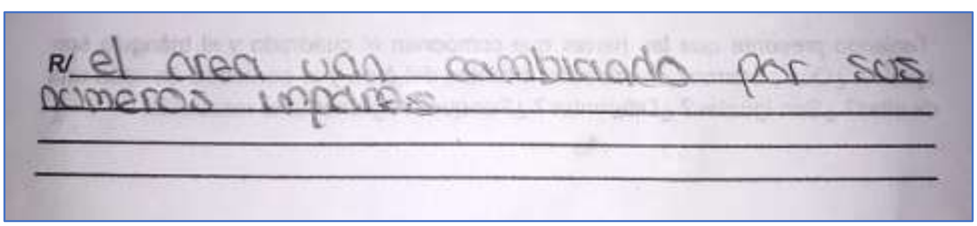
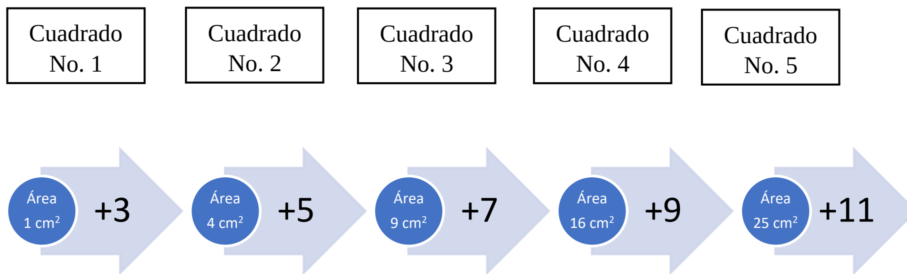


Figura 61. Respuesta de los estudiantes No. 11, 13 y 21 a la Problema No. 2

El grupo de las estudiantes No. 11, 13, y 21 fue el que más se acercó a un argumento de cómo cambia el área de los cuadrados. Si observamos, el área del primer cuadrado es 1

cm^2, el del segundo 4 cm^2, el tercero es 9 cm^2 , y el cuarto es 16 cm^2, y si continuamos, su variación se da, sumando valores impares al área que le antecede.



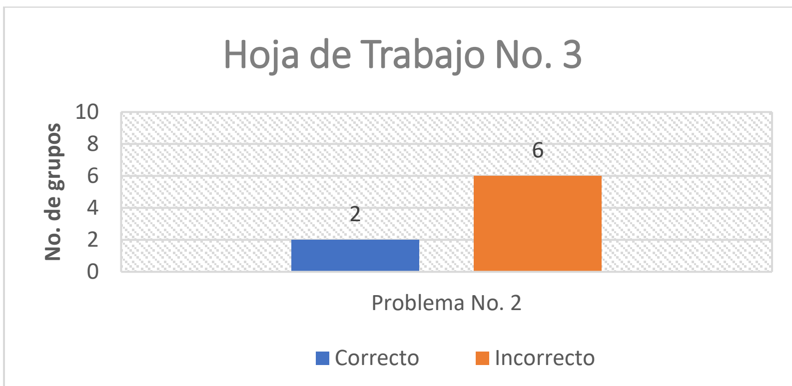


Figura 62. Respuestas de los grupos al Problema No. 2

Problema 3.

A continuación, te presentamos dos figuras: a) un triángulo equilátero y b) un trapecio.

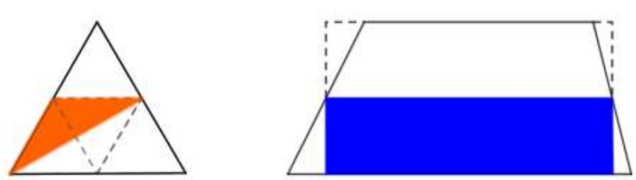


Figura (a) Figura (b)

¿Qué fracción del área total representa la región sombreada?: a) en el triángulo y b) en el trapecio. Ayúdate con las líneas punteadas que ofrece cada figura.

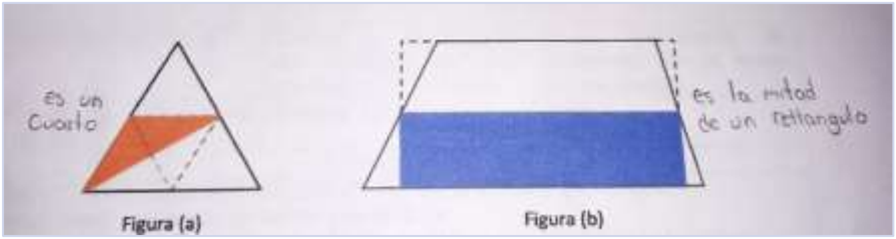


Figura 63. Respuesta de los estudiantes No. 2, 15 y 18 a la Problema No. 3

El equipo de los alumnos No. 2, 15 y 18, respondieron acertadamente. Para la resolución a este problema tuvieron en cuenta las líneas punteadas, las cuales sirvieron de ayuda para poder hacer la descomposición de la figura y efectuar las estimaciones correspondientes para señalar que en el triángulo el área de sombreada (color naranja) corresponde a uno de los cuatro triángulos en los que está dividido y para el caso del trapecio, el área sombreada (color azul) la de uno de los dos rectángulos.

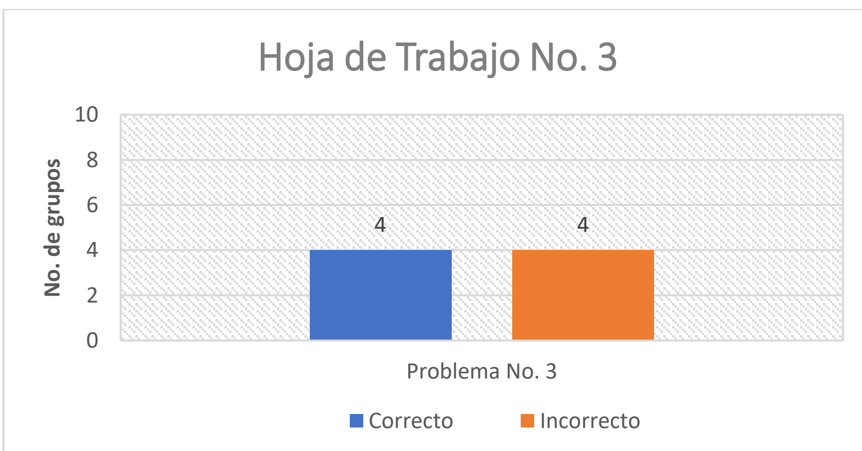


Figura 64. Respuestas de los grupos al Problema No. 3

Problema 4.

Un padre reparte un terreno (cuadrado) que se encuentra parcelado (dividido) como en la figura 3. Al hijo mayor le correspondió el área sombreada y al menor el resto.

Figura 3

¿Les correspondió a ambos hermanos lo mismo? ¿Fue equitativo con sus hijos? Explica tu respuesta.

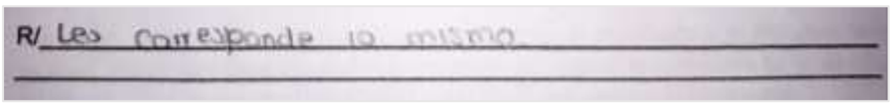

R/ Les Corresponde lo mismo

Figura 65. Respuesta de los estudiantes No. 6, 8 y 10 a la Problema No. 4

En esta pregunta el conjunto conformado por las estudiantes No. 6, 8 y 10 respondieron acertadamente pero no pudieron dar explicación de su respuesta.

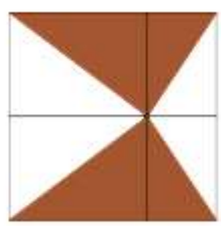


Figura 66. Triángulos inscritos en un cuadrado

Si hubieran trazado líneas divisorias como se observa en la *Figura 67* por el vértice que une a los dos triángulos encontrarían un argumento, al percatarse que el área sombreada correspondería a la mitad del cuadrado.

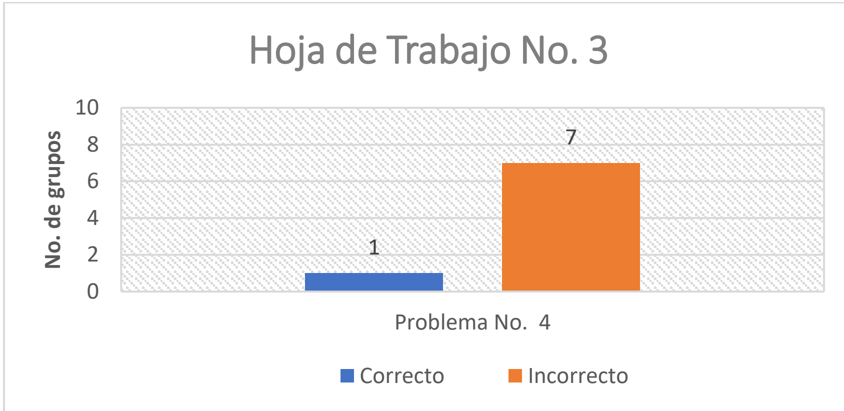


Figura 67. Respuestas de los grupos a la Problema No. 4

4.4.5. Consideraciones al finalizar la intervención

Durante el desarrollo de la actividad se observó la falta de claridad que tienen aún los estudiantes frente los conceptos de área y perímetro, como también la facultad de relacionar valores numéricos para conjeturar variaciones y la dificultad para argumentar sus resultados.

4.5. Hoja de Trabajo No. 4

4.5.1. Presentación de la actividad

La Hoja de Trabajo No. 4 consistió en una sola actividad que fue la de realizar 4 figuras que encontramos en nuestra cotidianidad: la figura 1 corresponde a un tornillo; la figura 2 a una tuerca; la figura 3 a Pac-Man; y la figura 4 a un árbol de navidad.

4.5.2. Objetivos

Con la Hoja de Trabajo No. 4 se pretende medir la competencia de los estudiantes para usar GeoGebra en el diseño de formas que encontramos en nuestra cotidianidad y calcular sus diferentes áreas con GeoGebra y las fórmulas para cada figura plana.

4.5.3. Contexto de la intervención

La actividad se realizó el día 20 de septiembre en la sala de cómputo para facilitarles a los estudiantes el desarrollo de la actividad; esto por las dificultades presentadas al manipular GeoGebra en las Tablets para el desarrollo de las tareas anteriores.

4.5.4. Análisis

Se muestra a continuación la tarea a desarrollar y los resultados presentados por los grupos conformados por dos estudiantes con sus respectivas observaciones.

ACTIVIDADES

1. Realiza las siguientes figuras, calcula su área y completa la Tabla No 1

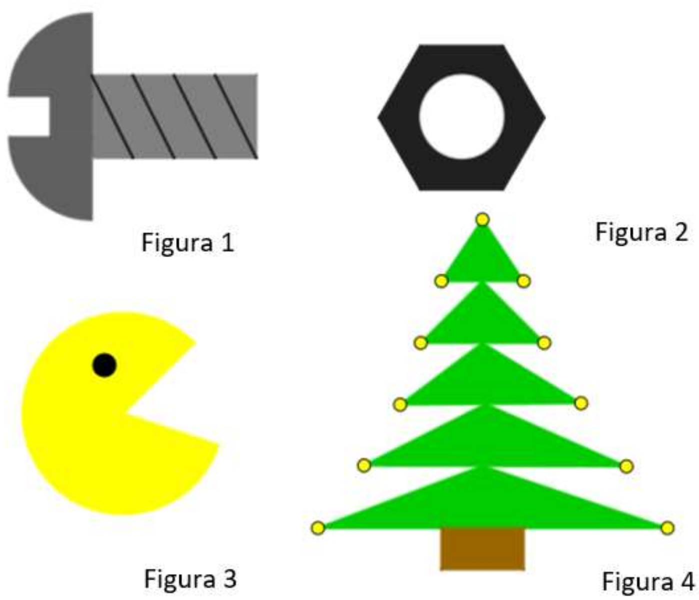


Figura	Cálculo del área con GeoGebra	Cálculo del área con las fórmulas algebraicas de figuras planas. $A_T= A_1 \pm A_2 \pm A_3 \ldots A_n$
1		
2		
3		
4		

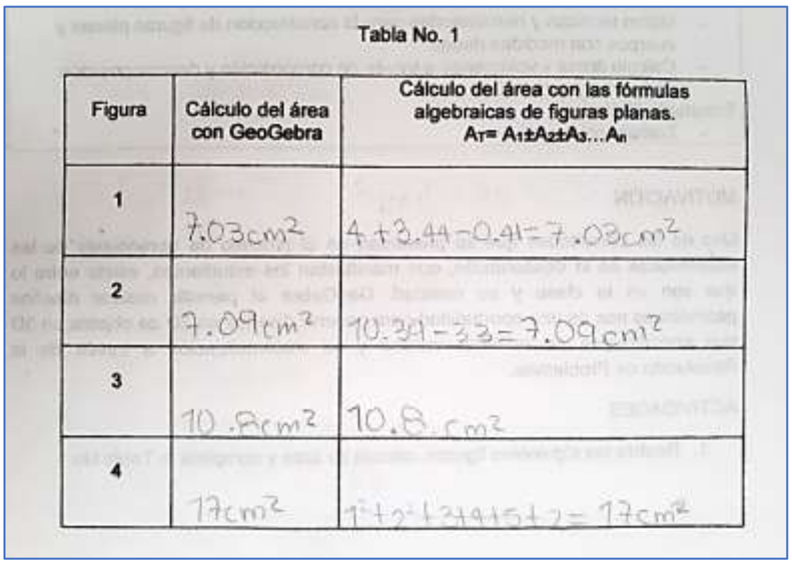


Tabla No. 1

Figura	Cálculo del área con GeoGebra	Cálculo del área con las fórmulas algebraicas de figuras planas. $A_T= A_1 \pm A_2 \pm A_3 \ldots A_n$
1	$7.03cm^2$	$4+3.44-0.41=7.03cm^2$
2	$7.09cm^2$	$10.39-3.3=7.09cm^2$
3	$10.8cm^2$	$10.8\ cm^2$
4	$17cm^2$	$1^2+2^2+3+4+15+2=17cm^2$

Figura 68. Respuesta de los estudiantes No. 2 y 15 a la Actividad No 1

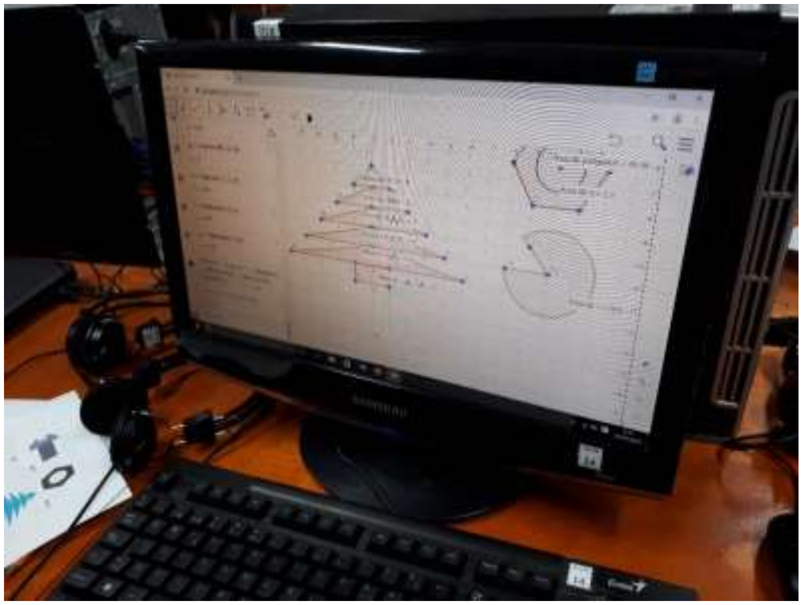


Figura 69. Diseños elaborados en GeoGebra para la Hoja de Trabajo No. 4

El equipo compuesto por las estudiantes No. 2 y 15 llenaron la tabla correctamente. En los dos primeros casos: el del tornillo y el de la tuerca, realizaron la resta necesaria para tener en cuenta el espacio vacío. Del mismo modo, emplearon las unidades cuadradas correspondientes al área y no unidades de longitud como sucedió con otros grupos.

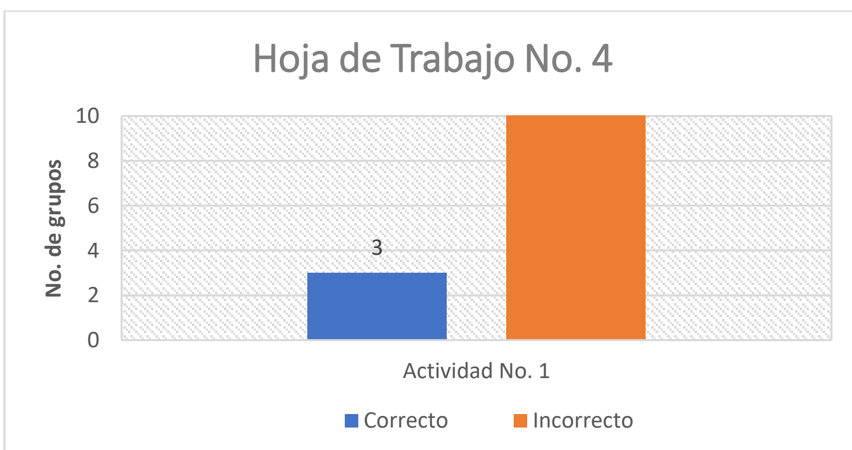


Figura 70. Respuestas de los grupos a la Actividad No. 1 de la Hoja de Trabajo No. 4

4.4.5. Consideraciones al finalizar la intervención

A los estudiantes les fue difícil asociar las unidades cuadradas al área y hacer uso del registro algebraico (las fórmulas de área de figuras planas) para su cálculo.

5. CONCLUSIONES

5.1. Respuesta a la pregunta de Investigación

La pregunta central de investigación es ¿Qué características del proceso de aprendizaje se vislumbran en la construcción del concepto de área en ambientes de aprendizaje mediado por GeoGebra con la resolución de problemas en los estudiantes de grado 7-2 de la Institución Educativa Rosa Zarate de Peña?

Con relación a la pregunta podemos observar varias características que son importantes para el proceso de aprendizaje y que se describen a continuación de acuerdo al concepto de *competencias* manejado por MEN (2006) en la cartilla de los *Estándares Básicos de Competencias*, la cual la define como: "La noción de competencia, históricamente referida al contexto laboral, ha enriquecido su significado en el mundo de la educación en donde es entendida como *saber hacer* en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de *conocimientos, habilidades* y *actitudes*." Por lo anterior se van a manejar las conclusiones y/o resultados de acuerdo a estos tres últimos aspectos:

Conocimientos

Fue muy importante para el desarrollo de las Hojas de Trabajo, los *presaberes* o *conocimientos previos* con los que contaban los estudiantes antes de la intervención. Esto nos arrojó como resultado que los estudiantes no habían sido expuestos o no tuvieron la oportunidad de afianzar su conocimiento sobre las fórmulas empleadas para el cálculo del área de las figuras planas (trapecio, paralelogramo, rectángulo, rombo, cuadrado, circunferencia, etc.) lo cual fue expresado por los mismos estudiantes en la prueba diagnóstico. Este punto es de gran importancia para la construcción del concepto de área, si tenemos en cuenta que, para Duval, su comprensión se da precisamente en la habilidad del estudiante de pasar de un *registro de representación* a otro. Igual pasó con la *resolución de problemas*, los estudiantes no tenían conocimiento de los pasos a seguir para encontrar alguna respuesta.

Siguiendo con el punto anterior, uno de las mayores dificultades que presentaron los estudiantes fue el de leer e interpretar los enunciados de los problemas correctamente, y que constituye ser un paso fundamental dentro de la *resolución de problemas* planteado por Polya, y es, *entender el problema*, lo que se evidencia tanto en la Prueba Diagnóstico como en las Hojas de Trabajo.

Otro aspecto, no menos importante, es el de la escritura y el uso de un vocabulario adecuado (términos matemáticos) en su argumentación.

Los resultados muestran igualmente la persistencia que existe en los estudiantes de la relación de dependencia entre los conceptos de perímetro y área, y por lo cual se presenta como “obstáculo epistemológico” a superar.

A pesar de las dificultades que mostraron los estudiantes, las Hojas de Trabajo les permitió explorar un abordaje diferente al concepto de área. Por ejemplo, en la Hoja de Trabajo No. 1, los estudiantes pudieron sistematizar de acuerdo a su jerarquía (definición que permite la sistematización) los cuadriláteros e identificar al cuadrado, el rombo, el rectángulo y el paralelogramo como *trapecios*, el cuadrado, el rombo y el rectángulo como *paralelogramos*, el cuadrado como *rectángulo* y así sucesivamente; frente a este punto hay un estudio del profesor, Mario Dalcín del Instituto de Profesores Artigas, Uruguay, titulado “La definición y clasificación de cuadriláteros en los libros de texto de ayer y de hoy” que sintetiza lo anterior, y que queda en la bibliografía para su estudio. Así mismo, el uso del Tangram de manera lúdica, haciendo configuraciones con sus piezas de diferentes formas que encontramos en nuestro alrededor. En la Hoja de Trabaja No. 2 pudieron diferenciar los conceptos de área y perímetro a través de la construcción de varias figuras en los que algunas veces variaba el área mas no así su perímetro y/o viceversa. Además, con la construcción de varios triángulos en un par de rectas paralelas tuvieron la posibilidad de realizar la función de *arrastre* que permite GeoGebra, encontrando que, a pesar del cambio de su contorno, y por consiguiente de su perímetro, el triángulo no variaba su área. En la Hoja de Trabajo No. 3 posibilitó que encontraran la solución de los problemas a través de Transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de las porciones en las que se podían descomponer y componer nuevamente las figuras. Por último, con la Hoja de Trabajo No. 4 construyeron y determinaron con relativa facilidad, el área de diseños que encuentran en la realidad, a través el uso de las herramientas con que cuenta GeoGebra.

Por último, quisiera expresar que el aprendizaje de un concepto requiere de tiempo ¿Cuánto? La respuesta a esta pregunta no es fácil, dada el conjunto de teorías que estudian la "conceptualización" y pues en este punto, comparto lo que expresa Moreira (2002) "El dominio de un campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años. Al contrario, nuevos problemas y nuevas propiedades deben ser estudiadas a lo largo de varios años si quisiéramos que los alumnos progresivamente los dominen. De nada sirve rodear las dificultades conceptuales; ellas son superadas en la medida en que son detectadas y enfrentadas, pero esto no ocurre de una sóla vez."

Habilidades

Se reconoce en los estudiantes durante el desarrollo de las tareas la habilidad para familiarizarse con un programa, que fue para nuestro caso el de GeoGebra. Se aclara que los alumnos no conocían del software antes de la intervención, por lo que fue particularmente relevante la facilidad con la que navegaban y hacían uso de los comandos en el momento en que recibían una instrucción. Esto ubica a los estudiantes dentro de las categorías 5 y 6 de los "*Estándares Nacionales (EEUU) de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) para Estudiantes: La Próxima Generación"* (NETS-S por sus siglas en inglés) correspondientes a la de *Ciudadanía digital* y *Operaciones y conceptos de las TIC*; los cuales contienen dentro de sus estándares, los siguientes: "exhiben una actitud positiva frente al uso de las TIC para apoyar la colaboración, el aprendizaje y la productividad; entienden y usan sistemas tecnológicos de Información y Comunicación; seleccionan y usan aplicaciones efectiva y productivamente; investigan y resuelven problemas en los sistemas y las aplicaciones; y transfieren el conocimiento existente al aprendizaje de nuevas tecnologías de Información y Comunicación (TIC)."

Actitudes

Se observó cómo los estudiantes se sintieron motivados con el uso del computador para la realización de las Hojas de Trabajo, esto puede explicarse porque ven en él no solo la entrada a la realización de una actividad de tipo académico sino también a otras de tipo lúdico, y fue en este sentido elaborada la primera Hoja de Trabajo con la realización del Tangram y la última con el diseño de diferentes formas que encontramos en la cotidianidad. Cabe aclarar que no pasó igual con las Tablets, esto debido a que los estudiantes tuvieron dificultades en la manipulación de algunos comandos de GeoGebra, los cuales se demoraban en responder a las órdenes que se les impartía. Estas fueron empleadas en la segunda y tercera Hoja de Trabajo donde se hacía uso también del *lápiz y papel* para el desarrollo de las actividades y GeoGebra servía como facilitador para las tareas a desarrollar.

La curiosidad por parte de los estudiantes por saber la respuesta correcta en la *resolución de los problemas* planteados se reconoce como un elemento positivo para seguir en su implementación en futuras intervenciones.

5.2. SUGERENCIAS

5.2.1 Sugerencias para los docentes

Uno de los problemas que tuvieron los estudiantes en las Hojas de Trabajo No. 2 y 3, fue el de leer e interpretar correctamente los enunciados de los problemas, lo que muestra la poca exposición que estos han tenido a este tipo de pruebas. Por lo anterior, se recomienda la exposición de los estudiantes a la *resolución de problemas* a partir de los grados de primaria para que así desarrollen las competencias necesarias a edades más tempranas.

La vinculación de las TIC (software didáctico, ambientes virtuales de aprendizaje, etc.) en sus prácticas, y que les permitan crear ambientes de aprendizaje distintos a los habituales y aprovechar las ventajas que estas brindan para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Emplear diferentes registros de representación y material didáctico (manipulable: concreto o virtual) que sirva de apoyo para el desarrollo de las clases, y no limitarse en lo que respecta a la enseñanza del concepto de área, el empleo sólo de fórmulas y la resolución de problemas que se limitan a la conversión de unidades.

El estudio de material bibliográfico que les permita resolver las dudas sobre conceptos tanto teóricos como prácticos de su labor para así mejorarlos e implementarlos en sus aulas.

Profundizar en el estudio de la Resolución de Problemas con la vinculación de la tecnología (software dinámico).

Aumentar el tiempo dedicado al estudio de la Geometría en el Currículo.

Igualmente, investigar sobre las nuevas tendencias que se desarrollan en otros lugares del mundo con respecto a la pedagogía y la didáctica de las matemáticas.

Y a los que deciden realizar estudios posgraduales, ahondar en el estudio comparativo de las teorías que dan respuesta a la "conceptualización" de los conceptos en matemáticas, esto porque considero que no existe una teoría única que dé respuesta a este fenómeno.

5.3.2. Sugerencias para directivos

Se debe propender y destinar los recursos necesarios para que los docentes estén actualizándose continuamente en sus conocimientos y prácticas pedagógicas a través de cursos, seminarios, congresos, etc., y brindar los espacios y tiempos necesarios para ello.

Instar a los estamentos que les corresponda (secretaría de educación) para que exista un servicio de internet de calidad desde el inicio de las clases.

La compra de material educativo como *Sólidos geométricos*, *Regletas de cuisenaire*, *Tangram*, *Torres de Hanói*, *Dominó de fracciones*, etc., son de gran ayuda para el aprendizaje y la comprensión de conceptos en matemáticas, porque le permite a los estudiantes su exploración y manipulación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Armella, Luis Moreno and Santos-Trigo, Manuel (2013) "Introduction to International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education," The Mathematics Enthusiast: Vol. 10: No. 1, Article 2. Available at: https://scholarworks.umt.edu/tme/vol10/iss1/2

Cortés, R. (2012). Historia de la geometría euclidiana y sus aplicaciones para la enseñanza (tesis de maestría). Universidad de Valladolid, Valladolid, España. Recuperado de http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1716.

Dalcín, Mario (2006). La definición y clasificación de cuadriláteros en los libros de texto de ayer y de hoy. En Martínez, Gustavo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 472-477). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5531/1/DalcinLadefinicionAlme2006.pdf

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, España. 35, 90-106. Recuperado de: http://welles.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/479%20Conceptualisacion.pdf

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. Relime (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa). Vol. 10, N. 1. 39-68. ISSN: 1665-2436. Recuperado de:

http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/607%20%20area%20y%20perimetro.pdf

Duarte, J. (2003). Ambientes de aprendizaje. Una aproximación conceptual. Revista Iberoamericana De Educación, 33(1), 1-18. Recuperado de: https://doi.org/https://doi.org/10.35362/rie3312961

Duval, R (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, ISSN 1138-8927, Vol. 9, N.º 1, 2006, p. 143-168. Recuperado de: http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

González, D., Santa, Z. y Londoño, R. (2015). Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/8740/1/Gonzalez2015Comprension.pdf

Gutiérrez M., y otros (2006) Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos. Módulo 4. Secretaria de Educación para la cultura de Antioquia. Recuperado de: http://www.galileodidacticos.com/sites/default/files/M%C3%93DULO%204%20PENSAMIENTO%20ESPACIAL.pdf

Herrera, C (2011). Pruebas visuales y su uso didáctico (Tesis de Licenciatura de Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.) Recuperado de: https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/AyerimPatriaHerreraCastillo.pdf

Illana-Rubio, J.C. (2008). Matemáticas y astronomía en Mesopotamia. Revista suma: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 58, p. 49-61. Recuperado de: http://revistasuma.es/IMG/pdf/58/049-061.pdf

Jiménez, D (2010). El problema del área en los *Elementos* de Euclides. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XVII, No. 2. p. 179-207. Recuperado de: https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol17/BAMV_XVII-2_p179-207.pdf

Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 22, 119-126. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/8740/1/Gonzalez2015Comprension.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1998) Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2006) Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencia y Ciudadanas. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2014) Documento orientador. Foro educativo nacional 2014: Ciudadanos Matemáticamente Competentes. Recuperado de: http://www.iecov.edu.co/documentos/documento_orientador_foro_educativo_2014.pdf

Moreira (2002) La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. Publicado en Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias, 7(1), 2002. Recuperado de: https://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf

Obando, Z. et al. (2006) Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. Módulo 1. Secretaria de Educación para la cultura de Antioquia. Recuperado de: http://www.galileodidacticos.com/sites/default/files/M%C3%93DULO%201%20PENSAMIENTO%20NUM%C3%89RICO.pdf

Sierpinska, A. (1985). Sobre la comprensión de la noción de función. Concordia University. En E. DUBINSKI and G. HAREL (eds.), The *Concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25, pp. 25-58. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1992

Vilanova, S. et al. (2001). La Educación Matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. En OEI. Revista Iberoamericana de Educación, Recuperado de: http://www.rieoei.org/deloslectores/968Zaldivar.pdf

Anexos

INSTITUCIÓN EDUCATIVA AMBIENTAL Y TURÍSTICA
ROSA ZÁRATE DE P E Ñ A

Vereda Rincón Dapa – Municipio de Yumbo
Resolución Oficial de Reconocimiento No 2576 de noviembre 24 de 2010
Código DANE 276892000188 – NIT 805 010 861-8 Teléfono 550 80 88
"Sembramos Fe y Ganas de Triunfar"

Prueba diagnóstica

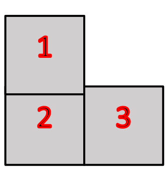
Nombre: ____

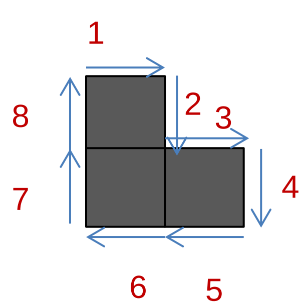
Grado: __________ Fecha: _____________

12. Considere el siguiente *cuadrado* como unidad de medida.

Encontremos ahora el *área* y el *perímetro* a la siguiente figura geométrica:

Si observamos bien la figura contiene **3** unidades de ***área*** y **8** unidades de ***perímetro***.





Ahora sí, y de acuerdo con el ejemplo determinemos la medida del contorno (perímetro) y la medida de la superficie (área) de las siguientes figuras:

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Área: ______ Perímetro: ______

Área: ______ Perímetro: ______

Área: ______ Perímetro: ______

13. Jorge, Leidy y Carolina están debatiendo sobre el perímetro y el área de las siguientes dos figuras, sin ponerse de acuerdo. Jorge afirma que la **Figura 1** tiene mayor perímetro y mayor área que la **Figura 2**; Leidy en cambio dice que la **Figura 1** y la **Figura 2** tienen ambas el mismo perímetro y la misma área, y Carolina finalmente asegura que la **Figura 1** tiene mayor perímetro, pero menor área que la **Figura 2**. ¿Cuál tiene la razón? Justifica tu respuesta.

Figura tomada de: *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado (2014)*

R/____

____

____

____

____

____

14. Calcular el perímetro y el área de los partes sombreados (regiones con el color más oscuro) de cada figura.

Unidad de medida: 

Figura 1

Figura 2

Área de la Figura 1: ___

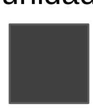
Perímetro de la Figura 1: ___

Área de la Figura 2: ___

Perímetro de la Figura 2: ___

15. En la siguiente rejilla
Dibuje:

d) Una figura con un área de 6 unidades cuadradas
e) Una figura con 12 unidades de perímetro
f) Una figura con 4 ½ unidades de área y 11 unidades de perímetro

Unidad de medida: 

16. Utiliza la siguiente rejilla para dibujar:

   d) Dos figuras con igual perímetro, pero diferente área
   e) Dos figuras con igual área, pero diferente perímetro
   f) Dos figuras con igual perímetro e igual área

17. De acuerdo a lo realizado hasta ahora consideras que existe una relación de dependencia entre el perímetro y el área. Ejemplo: si se incrementa el perímetro también se incrementa el área.
    a. Sí
    b. No

    Justifica tu respuesta:

    R/____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____

18. A continuación, tenemos tres figuras:

¿Es posible que estas tres figuras puedan tener la misma área y perímetro? Explica tu respuesta:

R/____
____
____
____
____
____
____
____

19. A continuación, te presentamos varias figuras. Calcula su área y perímetro tomando como unidad de medida el cuadrado.
(Utiliza el espacio de al lado de cada figura para hacer tus cálculos)

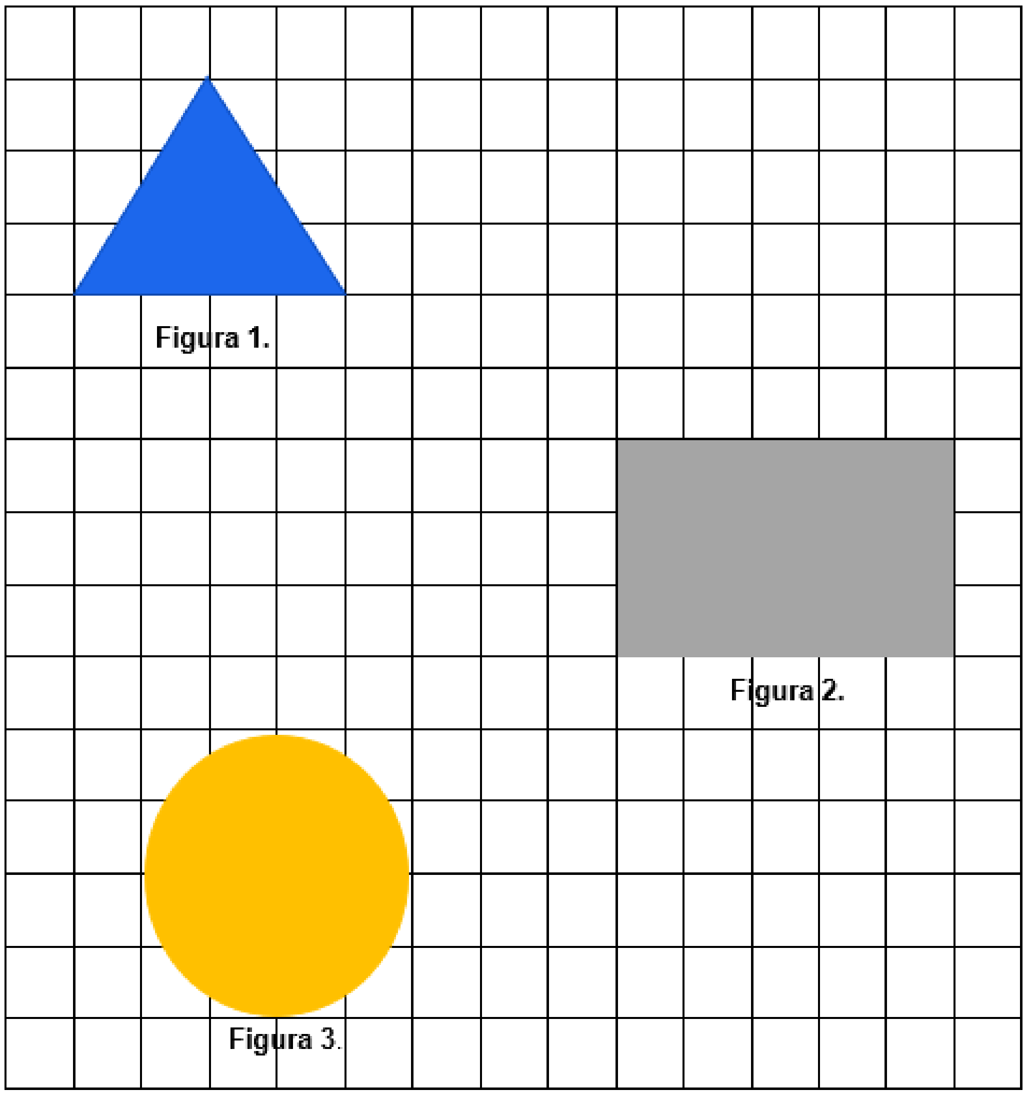


Figura 1. Perímetro=______________ Área=_________________

Figura 2. Perímetro=______________ Área=_________________

Figura 3. Perímetro=______________ Área=_________________

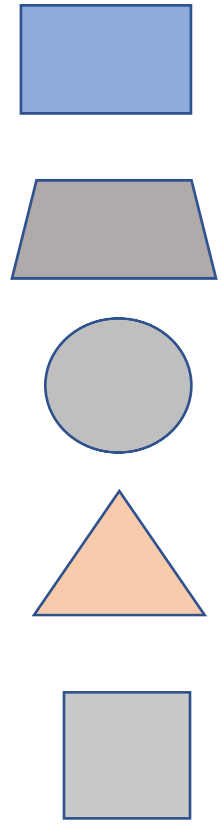
20. Relaciona con una *línea* la fórmula de área con la figura a la que corresponda:

$A = L^2$

$A = \dfrac{\mathbf{b}(\text{base}) \times \mathbf{h}(\text{altura})}{2}$

$A = \pi r^2$

A= **a** (lado $_1$) **x** **b** (lado $_2$)



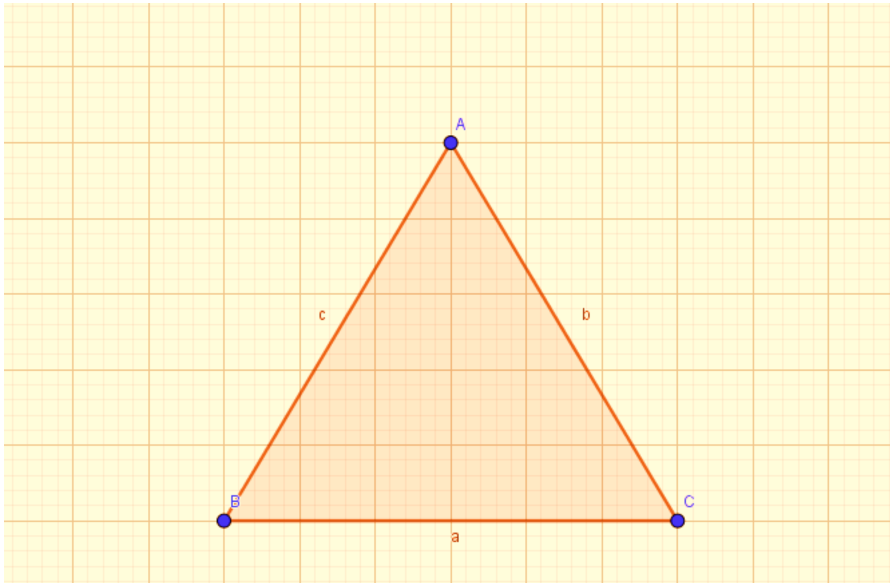
21. Se tienen dos lotes **A** y **B**. El lote **B** es el doble (duplica el área) del lote **A**. Si para cercar el lote **B** se emplearon 600 metros de alambre de púa. ¿Cuántos metros de alambre de púa se necesitarán para cercar el lote **A**?

Lote **A** Lote **B**

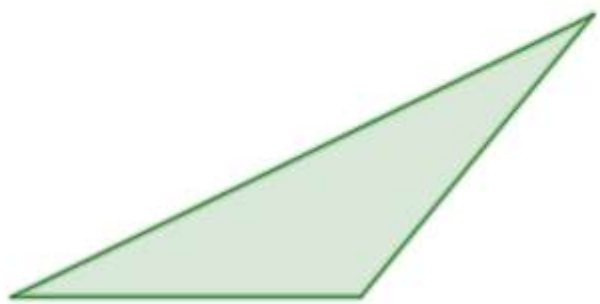
Justifica tu respuesta:

R/

22. Dado el siguiente triángulo dividirlo en tres secciones de manera que cada una tenga la misma área.



23. Ahora realizar el mismo ejercicio (dividirlo en tres secciones de manera que cada una tenga la misma área) pero con el triángulo siguiente.



Hoja de Trabajo No. 1	Unidad 1. Construcción del concepto de área mediado por GeoGebra	Temas: Registros de representación. Construcción de figuras planas: Polígonos (Cuadriláteros, Trapecios, Paralelogramos, etc.) Circunferencias. El *Tangram*. Medición de perímetro y área.
Método: Elaboración conjunta	Tiempo: 120 minutos	Fecha:
Conocimientos		

ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

- Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
- Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas

- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
- Calcula áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.

Estrategia Didáctica

- Trabajo colaborativo

MOTIVACIÓN

En esta primera Hoja de Trabajo, los estudiantes explorarán algunos comandos de GeoGebra para dibujar figuras planas y medir su área y perímetro También tendrán la oportunidad de visualizar sus registros de representación (algebraico y gráfico). A continuación, construirán un *Tangram* con el que tendrán la oportunidad de poner a prueba su creatividad reacomodando sus piezas para construir diferentes figuras.

PRESENTACIÓN

GeoGebra es un software libre, esto quiere decir que no necesitas pagar para comenzar a utilizarlo ya sea con o sin conexión a internet después de descargarlo de su página. Aunque GeoGebra me permite visualizar varios registros (Hojas de Cálculo, Cálculo Simbólico CAS), para el presente estudio sólo vamos a utilizar los registros algebraico y gráfico. Una de los aspectos importantes de este software es la *vinculación* de los dos registros. Esto quiere decir que los cambios que yo efectué en uno de los registros van a verse reflejados en el otro al tiempo, lo cual facilita hacer asociaciones de ambos registros

ACTIVIDADES

1. Grafica varias rectas, rectas paralelas y perpendiculares, y a partir de este entramado identifica algunas figuras planas (cuadriláteros, trapecios, paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados, polígonos), mida su área y su perímetro, y visualice sus registros de representación gráfico y algebraico en la interfaz.

2. Diseña el *Tangram* con la ayuda de algunos comandos como se muestra en la **Figura 1**. y construye con sus piezas varias formas, ya sea de animales, plantas u objetos

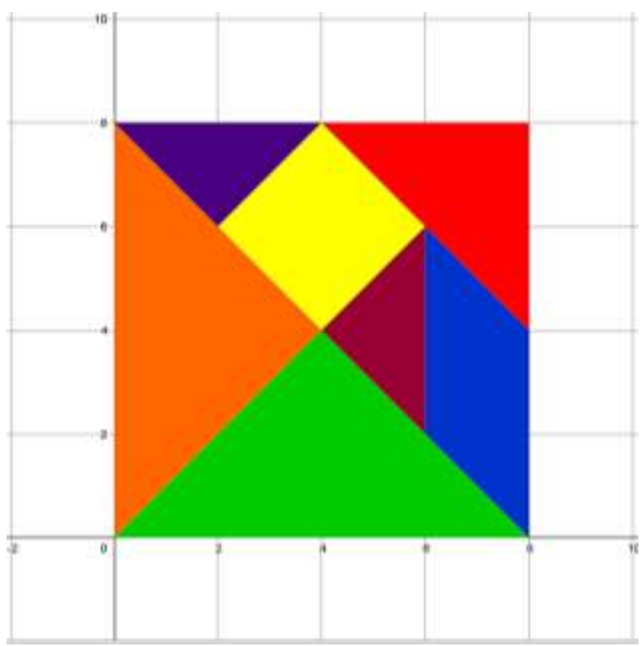


Figura 1

Hoja de Trabajo No. 2	Unidad 1. Construcción del concepto de área mediado por GeoGebra	Temas: Construcción de figuras planas según unas condiciones dadas. Diferenciación de los conceptos de área y perímetro.
Método: Elaboración conjunta	Tiempo: 120 minutos	Fecha:
Conocimientos		
ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS Pensamiento espacial y sistemas geométricos - Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica. - Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. Pensamiento métrico y sistemas de medidas - Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. - Calcula áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. Estrategia Didáctica - Trabajo colaborativo		

MOTIVACIÓN

Las dificultades que se presentan con el aprendizaje de los conceptos de área y de perímetro van más allá del sólo hecho de confundirlos, pues está también la relación de dependencia en cuanto a su medición. Se cree erróneamente que cuando el perímetro de dos figuras planas A y B, es igual entonces, las medidas de sus áreas deben serlo también, si la medida del perímetro de A es mayor a la de B entonces, la medida del área de A debe ser mayor a la de B. Tropezamos además con la dificultad para relacionar los diferentes registros de representación de ambos conceptos.

ACTIVIDADES

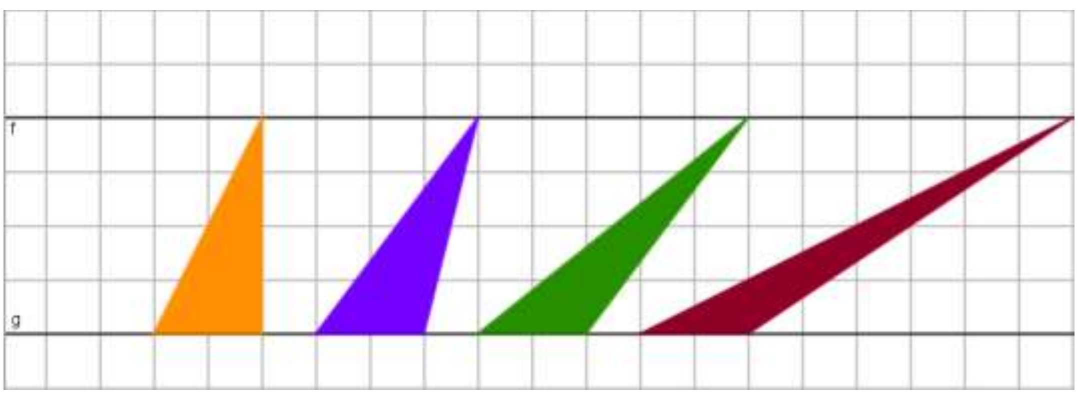
Para las siguientes actividades se tomará como longitud de cada lado del cuadrado de 1cm.

1. Dibuja varios rectángulos cuyo perímetro sea igual a 16 cm ¿El área de los rectángulos varía o es igual para todos? ¿Qué figura resultó con la mayor área? ¿Será posible encontrar una con la mayor área de todas?
   R/____
   ____
   ____
   ____

2. Calcula el área de un rombo cuyas diagonales miden $D_1=3$ cm y $D_2=6$ cm ¿Qué procedimiento seguiste? ¿Existe otra forma para calcular su área?
   ____
   ____
   ____
   ____

3. Traza un romboide cuyos lados $L_1=2$cm y $L_2=5$cm ¿Es posible determinar una única área con sólo estos datos?
   ____
   ____
   ____
   ____

4. Bosqueja varios triángulos entre dos rectas paralelas como se muestra a continuación:



Que podemos decir acerca de lo que pasa con la medida de sus áreas y sus perímetros. Explica.

R/____
____
____

<table>
<tr><td>Hoja de Trabajo No. 3</td><td>Unidad 1. Construcción del concepto de área mediado por GeoGebra</td><td>Tema: Resolución de problemas con la ayuda de GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>Método: Elaboración conjunta</td><td>Tiempo: 120 minutos</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Conocimientos</td></tr>
<tr><td colspan="3">ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
Pensamiento métrico y sistemas de medidas

- Calcula áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.

Estrategia Didáctica

- Trabajo colaborativo</td></tr>
</table>

MOTIVACIÓN

Operaciones geométricas como la composición y descomposición de figuras planas y las transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) mediados por GeoGebra resultan ser de gran utilidad para la modelación y la resolución de problemas en matemáticas.

ACTIVIDADES

Problema 1.

Teniendo presente que las partes que componen el cuadrado y el triángulo son iguales. ¿Qué podemos decir de las medidas del área y el perímetro de cada una de ellas? ¿Son iguales? ¿Diferentes? ¿Por qué? Argumenta tu respuesta.

Figura 1

Figura 2

Ilustración tomada de http://www.etudes.ru/en/models/dudeney-dissection/

R/____

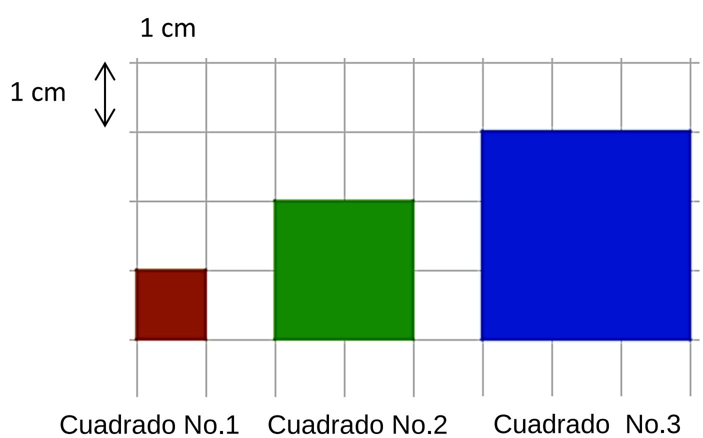
____

____

____

Problema 2.

Asumiendo que la longitud de cada cuadro es de 1cm. Calcula el área de cada una de los cuadrados que se presentan a continuación y discute con tus compañeros si se puede predecir cuál va a ser la medida del área del cuadrado No. 4 y de los siguientes. Explica.



R/____

____

____

Problema 3.

A continuación, te presentamos dos figuras: a) un triángulo equilátero y b) un trapecio.

Figura (a)

Figura (b)

¿Qué fracción del área total representa la región sombreada?: a) en el triángulo y b) en el trapecio. Ayúdate con las líneas punteadas que ofrece cada figura.

Problema 4.

Un padre reparte un terreno (cuadrado) que se encuentra parcelado (dividido) como en la figura 3. Al hijo mayor le correspondió el área sombreada y al menor el resto.

Figura 3

¿Les correspondió a ambos hermanos lo mismo? ¿Fue equitativo con sus hijos? Explica tu respuesta.

R/____

INSTITUCIÓN EDUCATIVA AMBIENTAL Y TURÍSTICA
ROSA ZÁRATE DE P E Ñ A

Vereda Rincón Dapa – Municipio de Yumbo
Resolución Oficial de Reconocimiento No 2576 de noviembre 24 de 2010
Código DANE 276892000188 – NIT 805 010 861-8 Teléfono 550 80 88
"Sembramos Fe y Ganas de Triunfar"

Hoja de Trabajo No. 4	Unidad 1. Construcción del concepto de área mediado por GeoGebra	Temas: Construcción de figuras planas a través de la unión de polígonos y secciones circulares. Diseños varios.
Método: Elaboración conjunta	Tiempo: 120 minutos	Fecha:
Conocimientos		
ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS Pensamiento espacial y sistemas geométricos - Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. Pensamiento métrico y sistemas de medidas - Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. - Calcula áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. Estrategia Didáctica - Trabajo colaborativo		

MOTIVACIÓN

Uno de las dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas es la desconexión, que manifiestan los estudiantes, existe entre lo que ven en la clase y su realidad. GeoGebra al permitir realizar diseños geométricos nos da una oportunidad para generar bocetos en 2D de objetos en 3D que encontramos en nuestra realidad y su matematización a través de la Resolución de Problemas.

ACTIVIDADES

1. Realiza las siguientes figuras, calcula su área y completa la Tabla No 1

Figura 1

Figura 2

Figura 3

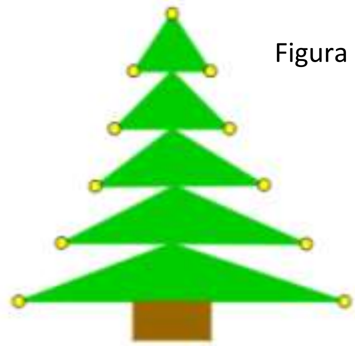


Figura 4

Tabla No. 1

Figura	Cálculo del área con GeoGebra	Cálculo del área con las fórmulas algebraicas de figuras planas. $A_T = A_1 \pm A_2 \pm A_3 \ldots A_n$
1		
2		
3		
4		