VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS A TRAVÉS DE LA ELABORACIÓN DE PULSERAS EMBERA CHAMÍ

Yesica Dayan Audor Marmolejo

UNIVERSIDAD ICESI

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

SANTIAGO DE CALI

2020

VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS A TRAVÉS DE LA ELABORACIÓN DE PULSERAS EMBERA CHAMÍ

Yesica Dayan Audor Marmolejo

Trabajo de grado para optar al título de

Magister en Educación

Directora:
DORA JANNETH DEL CARMEN GÓMEZ GUERRERO

UNIVERSIDAD ICESI

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

SANTIAGO DE CALI

2020

Formato Evaluación Trabajos de Grado

Fecha de remisión	Año	Mes	Día
	2020	06	17

Datos de profesor(a) evaluador(a)						
Nombre y apellidos	FREDDY ASPRILLA PALACIOS					
Nivel de formación	MAESTRÍA	X	Doctorado	En curso		
Campo de especialidad	DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS					
Universidad a la que pertenece						

Datos del estudiante evaluado	
Título de Trabajo de Grado	VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS A TRAVÉS DE LA ELABORACIÓN DE PULSERAS EMBERA CHAMÍ
Nombre y apellido del estudiante	Yesica Dayan Audor Marmolejo
Código estudiante	A00351729

Valoración final del trabajo de grado		
Aprobado	Aprobado con modificaciones	No aprobado
X		

A. Evaluación cuantitativa (valoración de 1 a 5)

	Nota
Organización del documento. La presentación del documento refleja y guarda coherencia entre el problema, lo teórico, metodológico y conclusiones.	5
Problema. El problema está bien estructurado en su forma, tiene una pregunta de investigación.	5
Objetivos. Los objetivos generales del trabajo reflejan coherencia con la cuestión y problema del trabajo de grado. Los objetivos específicos guaran coherencia con los objetivos generales y el problema de investigación.	5
Hipótesis-presupuestos. Hay claridad en la formulación de la hipótesis o presupuestos, guardan coherencia con los objetivos y el problema de investigación (si no aplica, no evaluar).	4,5
Marco teórico. El marco teórico muestra una clara relación con el problema, los objetivos, la hipótesis, presupuestos. Se observa claridad, dominio de fuentes, referencia teórica, fuentes teóricas, etc.	4.7
Diseño metodológico. El diseño metodológico deja ver con claridad los procedimientos y protocolos en el tratamiento del problema.	4.7
Análisis de resultados. Los resultados obtenidos guardan coherencia lógica con la metodología empleada, la teoría de referencia, los objetivos y el problema.	5
Conclusiones. Las conclusiones son coherentes con las hipótesis/presupuestos. Se observa el tratamiento lógico, crítico, analítico, objetivo de los datos y coherentes con el problema, etc.	5

Presentación escritural. El nivel de escritura del documento es claro, lógico, crítico, muestra dominio del tema, no tiene errores gramáticos, de estilo. El lenguaje utilizado muestra un dominio del campo educativo, etc.	5
Referencias bibliográficas. El documento muestra un uso de referencias bibliográficas coherentes con el tema, problema, campo educativo, etc. el autor o autora respeta el sistema APA, etc.	5
Calificación promedio total obtenida	4,89

Escala de valoración para cada ítem

Pésima	Muy Mala	Mala	Aceptable	buena	Excelente
0	1	2	3	4	5

B. Evaluación cualitativa

Valore cualitativamente los aspectos relevantes del trabajo de grado

De trabajo de grado para optar el título de Maestría en Educación titulado: Visualización y razonamiento en el aprendizaje de las transformaciones geométricas a través de la elaboración de pulseras Embera Chamí se destacan varias cosas

1. **Que se desarrolla en el marco de una escuela rural y sobre este tipo de trabajos no hay muchas investigaciones, sobre todo aquellas que se enmarcan en la Educación matemática.**
2. **Que se desarrolla a partir de una de las actividades propias de la comunidad Embera Chamí, a saber, la elaboración de pulseras.**
3. **Que el trabajo muestra un nivel de elaboración propio y se esfuerza por cuidar e ir soportando los elementos que participan de la investigación.**

El trabajo presenta una apuesta original y arriesgada en cuanto a su marco teórico y su diseño metodológico. Lo original tiene que ver con el vínculo que se hace entre el contexto Embera Chamí y el planteamiento de la investigación a través del ARTEmbera. Lo arriesgado tiene que ver con el afinamiento necesario del modelo ecléctico entre el conductismo, el cognitivismo, el constructivismo, la Etnomatemática, la Teoría de Situaciones Didácticas, la Investigación de diseño y el experimento de enseñanza que propone la investigación.

Firma del par evaluador: Freddy Asprilla Palacios

Fecha de la evaluación: 13 de julio de 2020

A Marina, Carlos, Daniela y a la pequeña Valery.

Agradecimientos

Infinitas gracias al universo y a la fuerza divina que me da vida; a mi familia y esposo por creer en mí, por brindarme seguridad, por su apoyo constante y por sus voces de aliento, las cuales me han dado luz para no perder de vista mis objetivos y me han llenado de fuerzas para continuar con mi formación académica.

Agradezco a los estudiantes de la sede José María Carbonell por compartir sus conocimientos y sus maneras de pensar, puesto que ha sido un insumo vital para el desarrollo de esta investigación. Infinitas gracias a la comunidad indígena Embera Chamí, especialmente al asentamiento Dojuravida, pues gracias a su llegada a la vereda Las Brisas surge esta iniciativa.

De igual manera, extiendo mis agradecimientos a la asesora Dora Janneth Gómez. A la Universidad Icesi, profesores y compañero(a)s.

Contenido

Lista de ilustraciones

Lista de tablas

Resumen

Este trabajo de grado para la Maestría en Ciencias de la Educación, presenta una investigación cualitativa desde una perspectiva Etnomatemática, centrada en el diseño, implementación y análisis de una situación de aprendizaje denominada ARTEmbera.

Su propósito es valorar el impacto de la aplicación de la situación didáctica ARTEmbera, la cual consiste en el aprendizaje de las transformaciones geométricas y la elaboración de pulseras de la comunidad indígena Embera Chamí, que favorece el desarrollo de la visualización y el razonamiento matemático de los estudiantes de 3°, 4° y 5° de la sede multigrado José María Carbonell de la Institución Educativa María Auxiliadora ubicada en la zona rural del municipio de Sevilla (Valle del Cauca) durante el año lectivo 2019.

Para llevar a cabo el propósito anterior, se estableció un conjunto de seis actividades secuenciadas categorizadas en cinco fases: diagnóstico, diseño metodológico, implementación, análisis y evaluación.

Palabras claves

Etnomatemática, situación didáctica, transformaciones geométricas, Embera Chamí y multigrado.

Abstract

This degree work for the Master of Science in education, presents qualitative research from an ethno-mathematical perspective, focused on the design, implementation and analysis of learning situation called ARTEmbera.

Its purpose is to assess the impact of applying the ARTEmbera didactic situation, which consists of learning the geometric transformations and making bracelets for the Embera Chamí indigenous community, which favors the development of visualization and mathematical reasoning for 3rd, 4th and 5th grade students from the José María Carbonell multigrade headquarters of the María Auxiliadora educational institution located in the rural area of the municipality of Sevilla (Valle del Cauca) during the 2019 school year.

To carry out the above purpose, a set of six sequenced activities categorized into five phases was established: diagnosis, methodological design, implementation, analysis and evaluation.

Keywords

Ethnomathematics, teaching situation, geometric transformations, Embera Chamí and multigrade.

Resumo

Este trabalho de graduação para o Mestrado em Educação apresenta uma investigação qualitativa de uma perspectiva etnomatemática, focada no design, implementação e análise de uma situação de aprendizado chamada ARTEmbera.

Seu objetivo é avaliar o impacto da aplicação da situação didática da ARTEmbera, que consiste em aprender as transformações geométricas e fazer pulseiras para a comunidade indígena Embera Chamí, o que favorece o desenvolvimento da visualização e do raciocínio matemático. Alunos da 3ª, 4ª e 5ª séries do campus multigradado José María Carbonell da Instituição Educacional María Auxiliadora, localizada na área rural do município de Sevilla (Valle del Cauca) durante o ano letivo de 2019.

Para realizar o objetivo acima, foi estabelecido um conjunto de seis atividades seqüenciadas, categorizadas em cinco fases: diagnóstico, desenho metodológico, implementação, análise e avaliação.

Palavras chaves

Etnomatemática, situação didática, transformações geométricas, Embera Chamí e multigrades.

Introducción

Este trabajo de grado pretende contribuir a la acumulación de conocimientos desde y para la práctica pedagógica, pues es un recurso académico que promueve el desarrollo del pensamiento matemático a través de un proceso de enculturación matemática; se concibe como una orientación pedagógica para la movilización de aprendizajes matemáticos, especialmente aquellos que pertenecen al pensamiento espacial y, para la movilización de las competencias de visualización y razonamiento. Adicionalmente, el diseño y sus implicaciones son innovadoras para la investigación y para el ejercicio pedagógico en los primeros grados de escolaridad, esto debido a la articulación de aprendizajes matemáticos con los saberes étnicos de la comunidad Embera Chamí, la metodología y recursos empleados y la integración de participantes de diferentes grados escolares.

Esta investigación consistió en el diseño, implementación y análisis de una situación didáctica denominada ARTEmbera, que contempló el aprendizaje de las transformaciones geométricas de traslación y rotación, en la construcción de patrones en GeoGebra y la elaboración de pulseras en mostacilla, con estudiantes de sede multigrado de 3°, 4° y 5° de primaria, a través de la metodología de investigación "experimentos de enseñanza".

Entre los aportes de este trabajo de grado, se destaca que es una reflexión particular de la clase de matemáticas que proporciona ideas para futuras investigaciones en torno a objetos y relaciones matemáticas del componente geométrico, aporta elementos a investigaciones que tienen como finalidad el desarrollo de las actividades cognitivas de visualización y razonamiento matemático; en este trabajo se destaca que sus resultados nutren en gran medida el campo de la Etnomatemática, el cual ha sido poco desarrollado en el país.

Este trabajo está compuesto por cinco capítulos, un apartado de conclusiones, uno de recomendaciones y, al finalizar una sección de anexos. En el capítulo 1 se presentan los aspectos generales del proyecto, en donde se exponen ciertos planteamientos que desencadenan en la formulación de la pregunta problematizadora que orienta la investigación; luego, se visibiliza el objetivo general y seis objetivos específicos, estos últimos se categorizan en cinco fases: diagnóstico, diseño, implementación, análisis y evaluación; más adelante, se presenta la búsqueda bibliográfica de investigaciones relacionadas a este trabajo, en donde se afirma que es una línea investigativa poco desarrollada; después, se exhiben los planteamientos que justifican esta investigación y, por último, se encuentra la contextualización de la comunidad en general y de los estudiantes de la sede en particular.

En el capítulo 2 se comparten los fundamentos teóricos de la investigación, en donde se despliegan amplias consideraciones teóricas que gravitan en torno a la fundamentación didáctica y matemática, a los procesos cognitivos relacionados con el aprendizaje de la geometría, se explicitan los elementos que componen el marco contextual y aquellos relativos a la herramienta tecnológica utilizada.

En el capítulo 3 se presenta a grandes rasgos, los aspectos relevantes al fundamento metodológico. Se muestra que este trabajo hace parte de la investigación de diseño, específicamente a los experimentos de enseñanza, se caracteriza esta metodología, se hace visible la manera en que se obtienen y analizan los datos obtenidos, además, se le da gran valor a las observaciones directas de la profesora – investigadora, a los fragmentos de las clases grabadas y a la producción de los estudiantes; en los últimos apartados se revela la conjetura y la trayectoria de aprendizaje de la Situación didáctica ARTEmbera.

En el capítulo 4 se expone la preparación e implementación del diseño. Se inicia con la descripción de la actividad de diagnóstico y los resultados obtenidos por los estudiantes; luego, se explicitan las acciones dentro del aula y se hace una descripción detallada acerca de las tareas que componen el diseño.

El capítulo 5 se considera el más importante para la investigación, en la medida que evidencia la potencialidad del diseño y de la metodología experimentos de enseñanza. De acuerdo a esta metodología, el análisis se divide en dos, local y retrospectivo. En el análisis local, se hallan aquellas observaciones y resultados encontrados en cada tarea luego de la intervención de aula, mientras que, el análisis retrospectivo, es un compendio de los aspectos más relevantes y reiterativos encontrados en los análisis locales, que permiten plantear los resultados de investigación.

Al finalizar, se presentan las conclusiones de la investigación, fundamentadas particularmente en el análisis retrospectivo; luego se encuentra la sección de anexos, en donde exhibe, por un lado, las dos pruebas diagnósticas que se aplicaron a los estudiantes; por otro lado, se expone la situación didáctica ARTEmbera.

CAPÍTULO 1. Aspectos generales de la investigación

A continuación, se presenta el esbozo de las ideas elementales que se proponen como fundamento del planteamiento del problema, las cuales se van hilando y dan como resultado el surgimiento de la pregunta problematizadora que orienta este trabajo.

Aquí se exponen una serie de preocupaciones alrededor de las reformas educativas que se han llevado a cabo al interior de la educación matemática en Colombia, a su vez se presentan los resultados de la IE María Auxiliadora en algunas pruebas externas que se han realizado durante los últimos años en el área de matemáticas y se enuncian varios aspectos que aluden a la transformación del entorno en donde se llevó a cabo la presente investigación.

Con el desarrollo de las ideas planteadas, se procede a enunciar una situación que resulta problemática, la cual requiere que desde la educación se reflexione en torno a ella y que se tomen decisiones en pro de la calidad educativa.

1.1. Planteamiento del problema

Es bien sabido que la educación matemática a nivel internacional ha sufrido notables reformas principalmente por el desarrollo económico mundial, esto es la globalización; estas reformas, son evidentes en el desarrollo de políticas públicas, y han centrado su mirada en los objetos de enseñanza y aprendizaje, metodologías, recursos, en la evaluación, currículo, concepción de la matemática, entre otros aspectos que son materia de interés para diferentes actores educativos como profesores, académicos, el estado, estudiantes, padres de familia, etc.

De acuerdo a lo anterior, se admite que conocer la historia de la educación matemática permite evidenciar un gran número de hechos, que a través del tiempo han llevado de manera particular a profesores e instituciones educativas y de manera general al ministerio de educación y demás entes de control, a legitimar y deslegitimar ciertas prácticas pedagógicas.

Este proceso evolutivo se visibiliza en el papel, en tanto que aún hoy existen actores de organizaciones educativas que continúan ejerciendo prácticas tradicionales en la clase de matemáticas, heredadas de movimientos surgidos casi medio siglo atrás, aun cuando en la actualidad desarrollos académicos de expertos intelectuales y la normatividad vigente han cambiado y siguen cambiando sus criterios.

De manera concreta, nótese que aún hoy en la clase de matemática, en los planes de área y currículos escolares, por un lado, existe una fervorosa inclinación hacia el aprendizaje de conceptos y algoritmos a través de procesos netamente formales y memorísticos, es decir que se da mayor importancia al componente numérico y variacional, y a metodologías que se valen de procesos mecánicos y repetitivos. Por otro lado, se observa que se aplica una evaluación técnica, sumativa, para el control de contenidos y no para la comprensión de los aprendizajes matemáticos; dicho esto, es preciso parafrasear a Fontán (2004), afirma que este tipo de evaluación tiene un carácter netamente conductista, en la que, para alcanzar los objetivos o metas propuestas, se controla desde el aula todo lo concerniente al ambiente de aprendizaje y al estudiante, y desde afuera se imponen los contenidos, su presentación y valoración.

Lo anterior, es producto de las reformas del movimiento de los años 70 denominado matemática moderna, entre otras reformas; en Colombia se ha heredado un abandono de la geometría como objeto de estudio en los currículos escolares, esto se evidencia en algunos aspectos que se mencionarán a continuación, se aclara que no son los únicos.

Existe un sin número de instituciones educativas en la que los indicadores de desempeño propuestos en el área de matemáticas acercan a los estudiantes hacia aprendizajes netamente aritméticos y de manera aislada al componente geométrico, estocástico y variacional, ignorando que los aprendizajes matemáticos poseen una coherencia horizontal entre sus cinco componentes, como es el caso de una institución educativa particular que más adelante se precisará; algunos libros de texto –se omiten las editoriales- presentan las actividades organizadas en unidades, de tal manera que los componentes geométrico y estocástico se presentan al final sin ningún tipo de articulación; y por último, algunos de los profesores que fueron formados en las décadas setentas, ochentas y noventas bajo modelos matemáticos tradicionales que en la actualidad se encuentran abolidos, no son sujetos reflexivos ni están abiertos al cambio, en su lugar multiplican en sus salones de clase estas metodologías tradicionales.

Es cierto que las políticas educativas de los años siguientes favorecieron el desarrollo de la educación científica, empero a finales de los años noventa, de acuerdo a los Lineamientos Curriculares[1] del MEN publicados en 1998, surgió un creciente interés por cambiar la concepción de la matemática hacia un todo, con estructuras que poseen elementos, operaciones y relaciones, es decir, se abandonó la matemática moderna y se abrió paso a una restructuración del enfoque, cobró importancia la conceptualización por parte de los estudiantes, la comprensión de sus posibilidades y el desarrollo de competencias, sumando nuevo retos a la educación matemática.

Actualmente, en el ámbito educativo se habla acerca de formar estudiantes competentes en las diferentes áreas del conocimiento; por ejemplo, ser competente en matemáticas es ir más allá del responder correctamente una prueba estandarizada, se trata también de hacer buenas preguntas, concatenar correctamente los argumentos y generar razonamientos sólidos para solucionar situaciones de contexto[2]. En este sentido, no se desarrolla competencia matemática en una organización educativa que por tradición privilegia el componente numérico y variacional y abandona el componente espacial y métrico. Hasta aquí, se ha enunciado la primera preocupación que origina la problemática de esta investigación.

Finalizado el asunto anterior, es preciso hacer referencia a los resultados alcanzados por la IE María Auxiliadora en las Pruebas Saber de 2014, 2015, 2016 y 2017, los cuales se presentan como un elemento de la justificación de esta investigación, en general los resultados revelan que los estudiantes de los grados quinto y tercero presentan debilidades en los componentes, variacional, métrico y espacial, esta circunstancia representa la segunda preocupación que incentiva a producir esta investigación.

---

[1] Este documento se publicó hace veintidós años, contiene una gran cantidad de elementos que hoy en día son válidos, pero es claro que se requiere una actualización.

[2] Las situaciones de contexto son aquellas que suceden en la matemática, en otras ciencias y en la vida diaria.

Llegados a este punto conviene resaltar que Colombia cuenta con una gran cantidad de comunidades indígenas, cada una de ellas aporta variedad en tradiciones, costumbres, lenguas, conocimientos, etc., este conjunto forma parte del mosaico socio-cultural que brinda identidad y pluralidad al país. Esta herencia histórica cargada de saberes se ha transformado principalmente por factores como: choques culturales, violencia, despojo de tierras fértiles, narcotráfico, saqueo de recursos naturales por parte de multinacionales, olvido del estado, falta de inclusión, etc. y por la fractura del puente que conecta saberes ancestrales con los saberes matemáticos formales.

Actualmente la zona rural del municipio de Sevilla, específicamente la vereda Las Brisas está siendo poblada progresivamente por la comunidad indígena Embera Chamí procedente del norte del Valle y del departamento del Quindío, gracias al programa de restitución de tierras, el gobierno del expresidente Juan Manuel Santos entregó un terreno que será habitado por la comunidad indígena Dojuravida a la que pertenecen alrededor de treinta familias. Esta eventualidad exige que la Institución Educativa María Auxiliadora, que atiende esta vereda y cuatro más aledañas, transforme su Proyecto Educativo Institucional (PEI), articulando prácticas de los estudiantes mestizos con aquellas prácticas que pertenecen al grupo étnico en mención.

En la praxis se reconoce la heterogeneidad del aula, dado que algunos estudiantes son mestizos, otros pertenecen a la comunidad indígena Embera Chamí, algunos son extra edad y hay presencia de estudiantes con necesidades educativas especiales. Dicho esto, se reconoce la necesidad de establecer un diálogo de saberes que propenda a la contribución de riqueza cultural, alineado con el horizonte institucional y el desarrollo curricular de la organización educativa; por lo que esta cuestión constituye la tercera preocupación que da origen a la investigación.

Estas carencias se materializan al conocer que el PEI de la institución recibió la última actualización en el 2014, hace seis años, y que los planes de área y de aula no contemplan la diversidad poblacional que se presenta en la actualidad.

1.1.1. Pregunta de investigación.

Retomando lo anterior, se evidencia que la IE María Auxiliadora debe asumir varios retos, por un lado, formar estudiantes que actúen competentemente al resolver situaciones matemáticas y mejorar los resultados de las pruebas externas; por otro lado, motivar a los profesores a diseñar actividades matemáticas que se ajusten a las necesidades de la totalidad de estudiantes y a generar estrategias de evaluación para la comprensión.

Así, al discurrir en torno de la problemática existente en la IE surgen los siguientes interrogantes, ¿cómo se debe plantear la clase de matemáticas para que se considere un ambiente favorable para aprender matemáticas?, ¿cómo deben ser las actividades que se propongan en la clase?, ¿de qué manera se deben sugerir dichas actividades articulando las prácticas de diversos grupos sociales?, ¿cuál debe ser el rol del profesor?, ¿cuál debe ser el rol del estudiante?, ¿cómo evaluar los aprendizajes?, ¿cómo compartir y desarrollar el significado matemático?, ¿cómo articular las TIC en el proceso educativo?, entre otros interrogantes.

De acuerdo a esta reflexión se obtiene la pregunta problematizadora que direcciona la presente investigación:

¿Cómo una situación didáctica sobre las transformaciones geométricas y la elaboración de pulseras de la comunidad indígena Embera Chamí, favorece el desarrollo de la visualización y el razonamiento matemático de los estudiantes de 3°, 4° y 5° *de la sede multigrado José María Carbonell de la IE María Auxiliadora de la zona rural del municipio de Sevilla (Valle) durante el año lectivo 2019?*

En esta dirección, la presente investigación propone una situación didáctica denominada “ARTEmbera”, en la que participan todos los estudiantes de la sede desde preescolar a grado quinto con actividades y roles diferenciados; en este sentido, en ARTEmbera los estudiantes de preescolar, primero, segundo y con necesidades educativas especiales (específicamente dos estudiantes) realizan actividades para fortalecer la motricidad fina, esto es, aprender inicialmente a manejar la aguja, la mostacilla y el hilo, luego, avanzan hacia el proceso del tejido de mostacillas y por último, aprenden a replicar pulseras; mientras que los estudiantes de tercero, cuarto y quinto realizan actividades de mayor complejidad, como la elaboración de pulseras a través de patrones físicos y/o digitales y gracias a esta investigación, desarrollando tareas que pertenecen al pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

1.2. Objetivos

Para implementar ARTEmbera, se estableció un objetivo general que apunta a determinar qué tanto los aprendizajes geométricos y los procesos de visualización y razonamiento matemático de los estudiantes se fortalecen, luego de la implementación de la situación didáctica con estudiantes de grado 3°, 4° y 5°; así mismo, se generan una serie de objetivos específicos que se equiparan con actividades secuenciadas categorizadas en cinco fases, de manera que, su cumplimiento progresivo permite conseguir el objetivo general de esta investigación.

1.2.1. Objetivo general.

- ✓ Valorar el impacto de la aplicación de una situación didáctica sobre las transformaciones geométricas y la elaboración de pulseras de la comunidad indígena Embera Chamí, que favorece el desarrollo de la visualización y el razonamiento matemático de los estudiantes de 3°, 4° y 5° de la sede multigrado José María Carbonell de la IE María Auxiliadora de la zona rural del municipio de Sevilla (Valle) durante el año lectivo 2019.

1.2.2. Objetivos específicos.

Para llevar a cabo el objetivo general se establecieron cinco fases a saber, diagnóstico, diseño metodológico, implementación, análisis y evaluación, este conjunto de seis actividades ejecutadas en un orden secuenciado permiten llevar a cabo el objetivo general.

- ✓ Diagnosticar el nivel de visualización y razonamiento de los estudiantes de 2°, 3°, 4° y 5° de la sede José María Carbonell al resolver situaciones problema en las que intervienen las transformaciones geométricas. *(Fase 1 Diagnóstico)*
- ✓ Diseñar una situación didáctica en la que se favorece las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el aprendizaje de las transformaciones geométricas al

elaborar pulseras indígenas con patrones físicos y en GeoGebra. *(Fase 2 Diseño metodológico)*

- ✓ Implementar la situación didáctica en la sede José María Carbonell con los estudiantes de 3°, 4° y 5° de primaria. *(Fase 3 Implementación)*
- ✓ Analizar las producciones de los estudiantes de 3°, 4° y 5° de primaria, para valorar el avance en las competencias visualización y razonamiento, en el aprendizaje de las transformaciones geométricas. *(Fase 4 Análisis)*
- ✓ Determinar los aprendizajes de los estudiantes de 3°, 4° y 5°, luego de haber desarrollado las tareas que componen la situación didáctica. *(Fase 5 Evaluación)*
- ✓ Determinar las ventajas y desventajas del diseño luego de su implementación. *(Fase 5 Evaluación)*

1.3. Estado del arte

Al abordar esta propuesta surge la necesidad de investigar acerca de los trabajos académicos que se han realizado tanto a nivel nacional como internacional, vinculados a tres factores considerados la piedra angular del presente trabajo, estos son: etnomatemáticas, transformaciones geométricas y/o visualización y razonamiento matemático; esto, con la finalidad de enriquecer la situación didáctica.

Llegados a este punto, conviene subrayar que durante la búsqueda de antecedentes se encontró una tesis de pregrado producida por Tabares (2016), que corresponde al estado del arte de la Etnomatemática en Colombia, en la que se afirma que las producciones en etnomatemáticas son escazas y de acuerdo a la búsqueda del autor se concluye que no existe una investigación en la que se relacione la matemática y las pulseras en mostacilla de los indígenas Embera Chamí.

Empero se logró hallar varias investigaciones relacionadas con el componente espacial y los sistemas geométricos, la más importante es la tesis del profesor Aroca (2007) titulada “Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural”, en la que se valora el ser una propuesta de enseñanza de la geometría transformacional que describe los procesos geométricos que los indígenas arahuacos emplean al tejer sus figuras tradicionales en la parte lateral de sus mochilas, propiciando que el indígena arahuaco, se desplace desde la particularidad de algunas de las formas geométricas inscritas en su contexto cultural, hasta la generalidad de un sistema geométrico transcultural.

Con relación a las actividades cognitivas de visualización y razonamiento, es de preferencia el psicólogo francés Raymond Duval, en virtud de la calidad de sus investigaciones semióticas en educación matemática. Finalmente, la tesis de pregrado de Audor (2016) aporta elementos considerables en la elaboración del marco teórico, específicamente en la metodología de investigación.

En el entorno institucional no se han encontrado proyectos similares, pero en el municipio de Sevilla hay una institución rural de estudiantes indígenas Embera Chamí procedentes de Risaralda, que desde hace seis años implementa un proyecto de emprendimiento alrededor de la elaboración de collares y pulseras en mostacilla con la comunidad, sin acercarse a la matemática.

1.4. Justificación

ARTEmbera contribuye a la acumulación de conocimientos en educación matemática generados para y desde la práctica, es decir que se genera material académico para la investigación y el desarrollo pedagógico que promueve la innovación, la inclusión y la calidad educativa. Es innegable que uno de los objetivos de un profesor investigador es difundir y adaptar estrategias innovadoras en pro del mejoramiento de la educación matemática en donde se faciliten los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Esta investigación es importante para la educación matemática, en la medida que aporta un análisis de los resultados obtenidos al aplicar una situación didáctica en una escuela rural multigrado, pues se registra la actuación de los estudiantes, sus preguntas, sus repuestas, sus explicaciones, se consideran las variables que actúan en la intervención pedagógica y finalmente se valoran las ventajas y desventajas del diseño.

Esta reflexión particular sobre el quehacer en la clase de matemáticas proporciona ideas para la realización de futuras investigaciones en torno a objetos y relaciones matemáticas del componente geométrico, en particular aporta elementos teóricos a estudios que se interesan en la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones geométricas; a su vez, ARTEmbera contribuye a las investigaciones que tienen como finalidad el desarrollo de las actividades cognitivas de visualización y razonamiento matemático; de igual modo, esta investigación nutre en gran medida el campo de la etnomatemática, el cual ha sido poco desarrollado tal como se evidenció en la revisión de los antecedentes. Así pues, esta investigación se considera pionera en virtud de la estrecha relación que guardan los objetos y las relaciones matemáticas, con actividades culturales de grupos minoritarios.

Conviene subrayar la importancia existente en el vínculo de la cultura con esta investigación, pues se acepta la afirmación de Bednar (1991) citado por Ertmer y Newby (1993), quien expresa que "para ser exitoso, significativo y duradero, el aprendizaje debe incluir los tres factores cruciales siguientes: actividad (ejercitación), concepto (conocimiento) y cultura (contexto)".

En cuanto a la metodología Experimentos de Enseñanza, utilizada en esta investigación, se reconoce que no es nueva, sin embargo es potente en el ámbito educativo, pues resultó interesante apreciar los resultados de este trabajo en virtud del contexto en el que se ha desarrollado la práctica, se hace referencia exactamente a la variedad de participantes (estudiantes de Escuela Unitaria de una zona rural cafetera, indígenas y mestizos, algunos niños extra edad y otros con necesidades educativas especiales).

ARTEmbera goza de una naturaleza única, pues el diseño que se implementó se ajusta a la realidad del país, específicamente a la realidad de las escuelas rurales con la modalidad de Escuela Unitaria, en donde sólo hay un(a) profesor(a) para atender de manera simultánea los grados de preescolar y básica primaria en un solo salón de clase. Así pues, en la situación didáctica participaron estudiantes mestizos, indígenas, algunos extra edad y otros con necesidades educativas especiales, desde grado preescolar hasta grado quinto, en donde los estudiantes de grado preescolar realizando actividades iniciales, enhebrando el hilo en la aguja y ensartando la mostacilla; los estudiantes de grado primero que son hábiles en el manejo de los elementos nombrados anteriormente realizaron actividades de reproducción de pulseras para la comprensión y ejercitación del tejido; por su parte, los estudiantes de segundo a quinto participaron en la intervención pedagógica, sin embargo, para efectos de la investigación sólo se analizaron la actuación de los estudiantes de tercero, cuarto y quinto.

La profesora investigadora considera que el tener a todos los estudiantes reunidos en un solo salón no es una dificultad sino una oportunidad. Por un lado, fue una oportunidad para que los estudiantes se situaran en niveles de aprendizaje de orden superior, pues al organizar grupos de trabajo no convencionales, es decir estudiantes de grados superiores con estudiantes de grados inferiores, se propició y fortaleció el aprendizaje, obligando a los estudiantes a mejorar su discurso (preguntas y explicaciones) para que sea comprensible a sus compañeros. Por otro lado, se considera que es una oportunidad porque de esta manera se obtuvo más información para analizar, enriqueciendo en gran medida las conclusiones y recomendaciones de esta investigación.

Otro aspecto a resaltar es que los resultados de esta investigación han fortalecido la carta de navegación de la IE María Auxiliadora, es decir su Proyecto Educativo Institucional, pues gracias a la propuesta se generó un proceso interno entre los profesores y el directivo para la restructuración del modelo pedagógico, el horizonte institucional y el plan de área de matemáticas, en virtud de la carencia de una mirada pedagógica de tinte inclusivo y que se ajuste a la realidad de la institución. En otras palabras, esta investigación ofrece un panorama de soluciones a las exigencias contextuales de la sede José María Carbonell en un futuro inmediato y de la IE María Auxiliadora a mediano plazo.

Respecto a la perspectiva disciplinar, esta investigación se enfocó específicamente en el componente espacial y los sistemas geométricos en virtud de su preponderancia en el aprendizaje de la matemática, puesto que, tal como se menciona en los lineamientos curriculares, este componente se define como “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (MEN, 1998, p.56).

Dicho lo anterior, la importancia de este componente se debe a su carácter transversal con los demás componentes de la matemática, y por el despliegue amplio que tiene en todos los grados de la educación escolar; particularmente, los aprendizajes que se relacionan con las transformaciones geométricas aparecen en los estándares de competencias en matemáticas para cada uno de los conjuntos de grados tanto de primaria como de secundaria y media.

Gestionar los aprendizajes en geometría transformacional en básica primaria, cobra sin lugar a dudas, una importancia significativa. La Tabla 1 muestra un paralelo entre los estándares y los derechos básicos de aprendizaje en matemáticas de grado sexto a once, que se relacionan con los aprendizajes del diseño de esta investigación, con lo cual se justifica la pertinencia de realizar este trabajo en los primeros años de escolaridad.

Tabla 1 Lineamientos oficiales de matemática grado 6° a 11°

Conjunto de Grados	**Estándares Básicos de Competencia**	**Grados**	**Derechos Básicos de Aprendizaje**
6° a 7°	Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.	6°	#6 Representa y construye formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo en instrumentos de medida apropiados.
			#7 Reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o geográfico.
		7°	#5 Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones.
8° a 9°	Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	8°	#6 Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.
		9°	#6 Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.

10° a 11°	Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de fi guras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.	10°	#5 Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.
		11°	#6 Modela objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realiza comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos.

Fuente 1 Producción propia con base en los documentos oficiales del MEN (2009) y MEN (2016)

Se puede notar, que estos aprendizajes se relacionan estrechamente guardando una coherencia vertical a lo largo del proceso escolar, de esta manera se justifica la necesidad de formación en esta materia.

El siguiente asunto a tratar, alude a los resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas externas. Ahora bien, a modo introductorio es preciso mencionar la importancia de las pruebas estandarizadas, pues de acuerdo a los referentes del país su objetivo es:

> …dar cuenta o capturar una parte y el sentido de la realidad educativa en cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje. De esta manera, tales evaluaciones no deben ser consideradas como incompatibles, sino por el contrario, deben ser entendidas como miradas y estrategias complementarias, que tienen como único propósito el de arrojar información sobre una realidad que es muy compleja y difícil de capturar en todas sus dimensiones. (MEN, 2009, p. 16).

Así pues, con relación a lo anterior es cabe mencionar los últimos resultados de la Prueba Saber[3] obtenidos por la IE María Auxiliadora en el área de matemáticas en los grados 3° y 5° durante los años 2016 y 2017.

En la Tabla 2, se hace mención al porcentaje de respuestas incorrectas en las tres competencias matemáticas a saber, comunicación, resolución y razonamiento; de acuerdo a los intereses de esta investigación es pertinente que se observen los resultados de la

[3] Información tomada del Informe por colegio del cuatrienio. Análisis histórico y comparativo del 2018 de la IE María Auxiliadora del municipio de Sevilla (Valle). En el año 2018 no hubo Prueba Saber, por tal motivo el análisis se realiza con base a los años anteriores, en esta prueba no se tiene datos de los años 2015 y 2014 por poca cantidad de estudiantes que se presentaron la prueba.

competencia razonamiento, en la que se aprecia que el número de respuestas incorrectas en el grado tercero ha incrementado del 35.4% al 42.6% en el 2016 y 2017 respectivamente.

Tabla 2 Resultados por competencias para el grado 3°

Competencia	**Porcentaje de respuestas incorrectas en el área de matemáticas de los dos últimos años.**	
	2016	**2017**
Comunicación	30.8	44.4
Resolución	41.4	36.9
Razonamiento	35.4	42.6

Fuente 2 Producción propia con base en los resultados de las Pruebas Saber de grado 3° de 2016 y 2017

En cuanto a los aprendizajes evaluados del componente espacial en grado tercero, se aprecia que los estudiantes presentaron dificultades en varios aspectos y, que estos resultados cada año son más débiles que en el año inmediatamente anterior. Por ejemplo, en la competencia comunicación se constata que el porcentaje de respuestas incorrectas tuvo un incremento del 13.6% en los años 2016 a 2017; mientras que la competencia resolución mejoró en 4.5% en los años mencionados (más adelante, se muestra la relación existente entre estos resultados y los de grado quinto); finalmente, en el caso del razonamiento los resultados reflejan una caída de 7.2%.

Ahora bien, la Tabla 3 presenta el porcentaje de respuestas incorrectas de acuerdo a los aprendizajes específicos de los componentes espacial-métrico, que fueron evaluados en la Prueba Saber en los años 2016 y 2017 en el grado tercero.

Tabla 3 Porcentaje de respuestas incorrectas en aprendizajes de los componentes espacial-métrico en las Pruebas Saber para grado 3°

Competencias	**Aprendizajes**	**2016**	**2017**
Comunicación	Ubicar objetos con base en instrucciones referentes a dirección, distancia y posición.	40	80
	Identificar atributos de objetos y eventos que son susceptibles de ser medidos.	40	50
	Describir características de figuras que son semejantes o congruentes entre sí.	20	40

	Establecer correspondencia ente objetos o eventos y patrones o instrumentos de medida.	40	20
Resolución	Estimar medidas con patrones arbitrario.	60	60
	Desarrollar procesos de medición usando patrones e instrumentos no estandarizados.	60	25
	Usar propiedades geométricas para solucionar problemas relativos a diseño y construcción de figuras planas.	26.7	53.9
Razonamiento	Establecer conjeturas acerca de propiedades de las figuras planas cuando sobre ellas se ha hecho una transformación.	40	42.9
	Ordenar objetos bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con atributos medibles.	20	50
	Establecer diferencias y similitudes entre objetos bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con sus propiedades.	30	33.3

Fuente 3 Producción propia con base en los resultados de las Pruebas Saber de grado 3° de 2016 y 2017

De acuerdo a la información de la Tabla 3 se puede percibir, por un lado, que los aprendizajes sufrieron una caída respecto a los resultados comparativos de los dos años y por el otro lado, se percibe cómo estos se vinculan con los resultados de las competencias matemáticas, pues es claro que si los estudiantes presentan debilidad en las competencias de comunicación y razonamiento entonces tendrán dificultades para resolver situaciones problema que involucre los mencionados aprendizajes. Análogamente, en la Tabla 4 se exponen los resultados de las Pruebas Saber para grado quinto en la que se observan los resultados de los últimos cuatro años y la relación especial que se mencionó con prelación en el análisis de grado tercero.

Tabla 4 Resultados por competencias de estudiantes de grado 5°

Competencia	**Porcentaje de respuestas incorrectas en el área de matemáticas de grado quinto, en los cuatro últimos años.**			
	2014	**2015**	**2016**	**2017**
Comunicación	46.7	49.6	48.5	49.5
Resolución	51.4	45	42.7	40.4
Razonamiento	48.2	26.9	34.7	48.5

Fuente 4 Producción propia con base en los resultados de las Pruebas Saber de grado 5° de 2014 a 2017

Respecto a los resultados obtenidos, se revela que el porcentaje de respuestas incorrectas en las competencias de comunicación y razonamiento tienden a mantenerse, evidenciando que hay dificultades en esta índole; mientras que, en la competencia resolución se revela una leve mejora en los resultados a través del paso de los años, empero es inquietante ostentar de un 40.4% de respuestas incorrectas, lo cual significa una dificultad en el desempeño de los estudiantes. La Tabla 5 muestra los aprendizajes evaluados del componente espacial para grado quinto[4].

Tabla 5 Porcentaje de respuestas incorrectas los componentes espacial-métrico en las Pruebas Saber para grado 5°

Competencias	**Aprendizajes**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
Comunicación	Identificar unidades estandarizadas como no convencionales apropiadas para diferentes mediciones y establecer relaciones entre ellas.	78.6	61.9	81,3	60,7
	Utilizar sistemas de coordenadas para ubicar figuras planas u objetos y describir su localización.			6.3	60
	Establecer relaciones entre los atributos mesurables de un objeto o evento y sus respectivas magnitudes.	42.9	0	75	38.9
Resolución	Usar representaciones geométricas y establecer relaciones entre ellas para solucionar problemas.	66.7	52.4	37.5	52.9
	Utilizar relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición.	71.4	57.1		36.4
	Describir y argumentar acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas cuando una de las magnitudes se fija.		71.4	50	66.7
	Justificar relaciones de semejanza y congruencia entre figuras.	35.7	57.1		57.1
	Construir y descomponer figuras planas y sólidos a partir de condiciones dadas.	47.6	14.3	25	80

[4] Los espacios en blanco indican ausencia de resultados, pues el Icfes (entidad que evalúa las pruebas externas), no toma los resultados cuando la cantidad de estudiantes es menor de cinco por grado.

Razonamiento	Comparar y clasificar objetos tridimensionales o figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes y propiedades.	57.1	57.1	54.2	52.2
	Relacionar objetos tridimensionales y sus propiedades con sus respectivos desarrollos planos.		35.7	37.5	50
	Conjeturar y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano.	21.4	57.1	18.8	38.5
	Reconocer nociones de paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos para construir y clasificar figuras y sólidos.		57.1	25	25

Fuente 5 Producción propia con base en los resultados de la Prueba Saber de grado 5° en 2014, 2015, 2016 y 2017

En general, se puede apreciar que los estudiantes evaluados presentan debilidades en los tres componentes de la matemática, lo que se constata en los altos porcentajes de respuestas incorrectas de la mayoría de aprendizajes; hay aprendizajes que en los cuatro años tienen una tendencia de mejora lenta, sin embargo, no difieren con relación a los resultados de grado tercero y finalmente, se afirma que estos resultados constituyen una preocupación para los profesores y una necesidad latente de mejora para la institución.

Hasta aquí este análisis histórico y comparativo de los resultados en las pruebas saber, permite entender el por qué se tomó el componente espacial como fundamento de la situación didáctica.

Dicho lo anterior, es pertinente mencionar la otra cara de la moneda, las pruebas estandarizadas son necesarias para garantizar calidad educativa por medio de un tratamiento efectivo de los resultados; sin embargo, no son suficientes para alcanzar aquella calidad referida. Es preciso resaltar las palabras de Crooks (1998), citado por Gómez (2004):

> …la evaluación formal bajo condiciones controladas cuidadosamente, como es el caso de los exámenes estandarizados, debe ser vista sólo como un pequeño componente de un grupo de actividades de evaluación que pueden ser usadas para medir el rendimiento escolar y la calidad educativa.

Conviene añadir que las pruebas estandarizadas ignoran las particularidades de las regiones del país y la naturaleza de las diferentes instituciones educativas, todo por un afán de las políticas neoliberales que han gobernado este país desde los últimos veinte años. En esta dirección, se comparten las apreciaciones de Gómez (2004), en donde afirma que “la escuela es con frecuencia la única presencia que hace el Estado en ciertas comunidades del país, especialmente en zonas rurales o marginales”, es así como los entes gubernamentales impactan a las comunidades colombianas, llevando escuela a las veredas o barrios de zonas rojas, sin planeación, estructuración, con programas formativos aislados y pruebas estandarizadas nacionales que categorizan a los estudiantes de acuerdo a sus resultados.

1.5. Contextualización

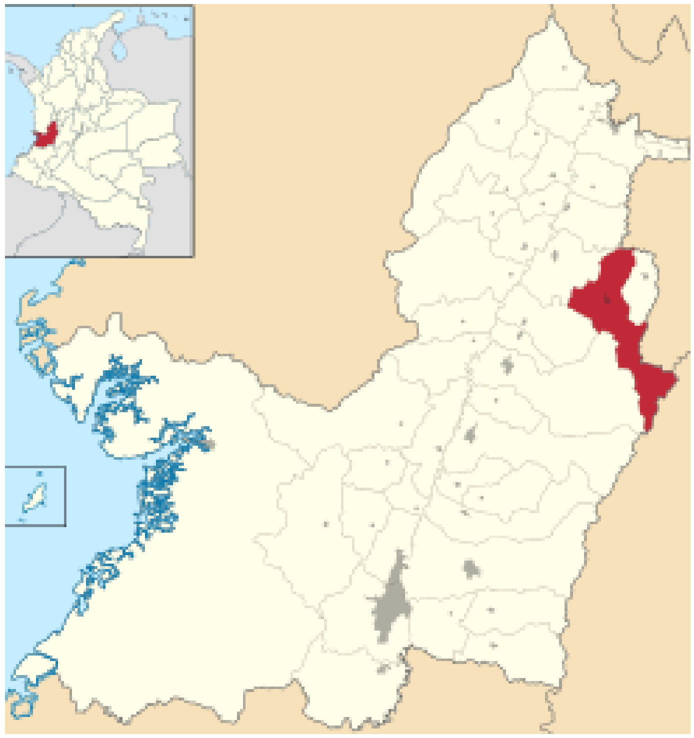
1.5.1. Descripción geográfica de la Institución Educativa María Auxiliadora.

La IE María Auxiliadora está ubicada en la zona rural del municipio de Sevilla, al nororiente del departamento del Valle del Cauca-Colombia, en la región denominada el Eje Cafetero. Este municipio es conocido como la “capital cafetera de Colombia” por Ley de la Nación; también, se le llama "Balcón del Valle del Cauca" y "Mirador del Valle y del Quindío" por gozar de la ubicación más alta del departamento.

Sevilla es ampliamente conocido a nivel nacional e internacional por sus fiestas populares en el mes de agosto, denominada Festival Bandola. A su vez, de acuerdo a una publicación del diario El país (2011), este municipio cuenta con un importante reconocimiento por parte de la UNESCO, cuando en 2011 en la ciudad de Paris, se declaró Patrimonio Cultural de la Humanidad.

La Ilustración 1 permite apreciar geográficamente el municipio en el departamento y a su vez el departamento en el país.

Ilustración 1 Municipio de Sevilla en el departamento del Valle



Fuente 6 Tomado de https://es.wikipedia.org/wiki/Sevilla_(Valle_del_Cauca)

En los siguientes párrafos se contextualiza el entorno educativo en donde se implementó la situación didáctica.

La IE María Auxiliadora es de carácter oficial, su planta física fue construida en 1965 por parte del comité cafetero; inicialmente se construyen dos aulas para que se inicien las labores educativas en la vereda La Melva. Actualmente la institución está compuesta por cuatro sedes situadas en veredas aledañas, con una matrícula que oscila entre los 130 y 140 estudiantes en total de acuerdo a la base de datos del Sistema de Matrícula de los últimos cinco meses; en la sede principal La Melva se ofrece primaria y bachillerato, las sedes restantes Miramar, José María Carbonell[5] y Simón Bolívar son escuelas de primaria unitarias, es decir desde preescolar hasta grado quinto con una sola profesora. Desde el año 2016 hasta la fecha, lamentablemente se cerró la sede primaria Francisco José de Caldas

[5] Adicional a la educación preescolar y básica primaria, en esta sede se ofrece Ciclos (educación para adultos y jóvenes en extra edad) los días sábados.

(ubicada en la vereda la Cimitarra), esto debido a la falta de estudiantes, pues en aquella época solo había 4 niños de edad escolar en toda la vereda.

En la actualidad la sede principal La Melva es la única sede en jornada única (con horario escolar desde las 7:30 am hasta las 2:30 pm). La Ilustración 2 muestra los símbolos institucionales, bandera y escudo.

Ilustración 2 Escudo y bandera de la IE María Auxiliadora

Fuente 7 Tomado del documento Proyecto Educativo Institucional

La Ilustración 3 muestra la ubicación geográfica de las cuatro sedes activas de la IE María Auxiliadora, con la siguiente denotación:

1 Sede principal La Melva, ubicada en la vereda La Melva.

2 Sede Miramar, ubicada en la vereda Miramar.

3 Sede José María Carbonell, ubicada en la vereda Las Brisas.

4 Sede Simón Bolívar, ubicada en la vereda Alto San Marcos.

Ilustración 3 Ubicación de las cuatro sedes de la IE María Auxiliadora

Fuente 8 Producción propia con base en la ubicación de Google Maps
https://www.google.com/maps/@4.2516524,-75.914252,8307m/data=!3m1!1e3

Esta investigación se llevó a cabo en la sede unitaria José María Carbonell localizada en la vereda Las Brisas; esta sede fue construida en el año 1984 por la Federación Nacional de Cafeteros; de acuerdo a la información consignada en el PEI, esta sede se ubica sobre la cordillera central a una altura de 1700 m s. n. m. y a una distancia de 5.5 km de la cabecera urbana de Sevilla (la vía de acceso es trocha), la temperatura promedio es entre 14° a 16° centígrados, el terreno es montañoso y con constante neblina.

Como se observa en la Ilustración 3, las cuatro sedes de la IE María Auxiliadora se encuentran ubicadas en veredas próximas y tal como se evidencia, la institución impacta a una comunidad amplia.

La Ilustración 4 exhibe la posición geográfica de la vereda Las Brisas en el municipio de Sevilla.

Ilustración 4 Ubicación de la vereda Las Brisas en el municipio de Sevilla

Fuente 9 Producción propia con base en la ubicación de Google Maps
https://www.google.com/maps/@4.2516524,-75.914252,8307m/data=!3m1!1e3

1.5.2. Problemáticas de la comunidad.

Ilustración 5 Líder comunitario vereda Las Brisas

Fuente 10 Tomado de El negro papel en Colombia. Cámara al hombro. HispanTV. https://www.youtube.com/watch?v=NbjpaenlaoA

La comunidad de la vereda Las Brisas presenta varias dificultades a saber, sufre abandono institucional por parte de la alcaldía municipal puesto que se observa que en la vereda no hay acueducto de agua potable, la comunidad no cuenta con puesto de salud desde el año 2013 hasta la actualidad, ni inspección de policía desde hace más de 15 años, y nunca ha tenido un espacio para el manejo adecuado de los desechos sólidos, esto último se afirma porque se observa que las familias queman la basura, la entierran y/o la desechan en zonas verdes alejadas.

Ilustración 6 Panorámica de la vereda

Fuente 11 Tomado de El negro papel en Colombia. Cámara al hombro. HispanTV. https://www.youtube.com/watch?v=NbjpaenlaoA

También, la comunidad sufre el impacto de la empresa multinacional Smurfit Kappa Cartón de Colombia y en este sentido se ha recopilado información desde diferentes fuentes.

Es preciso, dedicar los siguientes párrafos para explicar el fenómeno[6] Smurfit Kappa en Las Brisas. De acuerdo a la información publicada en la página web de OCA (2014), Environmental Justice Organizations,

[6] Gran parte de la información se ha obtenido a partir de la observación directa y otra se ha recopilado de artículos de las organizaciones como EJOLT, OCA WRM, IDEA, Universidad Nacional de Colombia y Censat agua viva.

Liabilities and Trade EJOLT, documentó que Smurfit Kappa inicia comprando predios en Sevilla en la década de 1970 luego de la crisis del café, actualmente poseen más de 6 mil hectáreas cuadradas en este municipio para las plantaciones de pino y eucalipto o como menciona Cardona (2009), citado por el Centro de Memoria Histórica (2014) “El monocultivo del pino o desierto verde” (p. 87); desde entonces se vienen presentando un sin número de dificultades en la comunidad, asociadas a aspectos sociales, culturales, económicos y ambientales.

Ilustración 7 Líder Ambiental del municipio de Sevilla

Fuente 12 Tomado de El negro papel en Colombia. Cámara al hombro. HispanTV. https://www.youtube.com/watch?v=NbjpaenlaoA

Ilustración 8 Daño ambiental en la vereda ambiental

Fuente 13 Tomado de El negro papel en Colombia. Cámara al hombro. HispanTV. https://www.youtube.com/watch?v=NbjpaenlaoA

El Observatorio de Conflictos Ambientales OCA (2014) y EJOLT (2014), afirman que la economía del municipio se ha visto afectada por el desplazamiento de pobladores de la zona rural a la urbana, se ha desfavorecido la soberanía alimentaria y se ha impulsado la desaparición de plantas medicinales; así mismo, las condiciones laborales de los trabajadores no son las

Ilustración 9 Camión cargado de madera bajando por la trocha que rodea la escuela

Fuente 14 Tomado de El negro papel en Colombia. Cámara al hombro. HispanTV. https://www.youtube.com/watch?v=NbjpaenlaoA

mejores puesto que hay escasez de trabajo en las fincas agrícolas por su reducida extensión y Smurfit no es generadora de empleo para las personas de la vereda, puesto que en la actualidad solo un familiar de los estudiantes trabaja en la compañía.

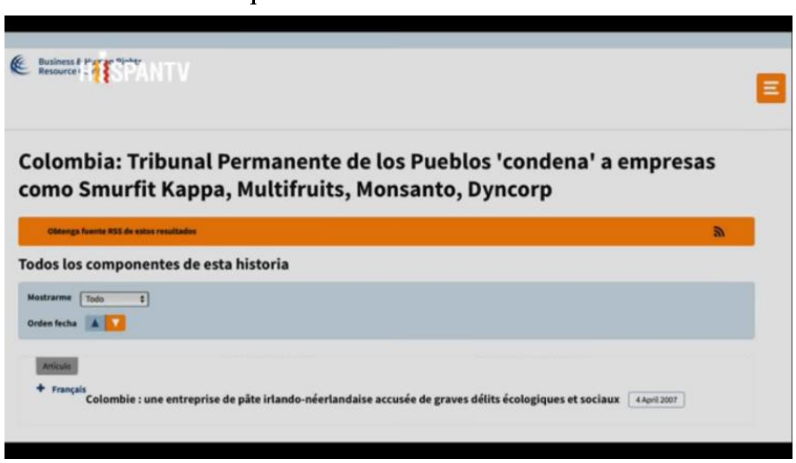
Otra situación que se presenta son los hostigamientos de grupos armados ilegales que desaprueban la lucha social en pro del cuidado del medio ambiente y el despojo de tierras, tal como lo menciona el Centro de Memoria Histórica (2014):

> La expansión del cultivo de madera y las modalidades de adquisición de predios han sido identificadas por algunos campesinos como parte de las estrategias de despojo y desalojo de las comunidades rurales, agudizando aún más el conflicto de concentración en la tenencia de la tierra en el Valle del Cauca (pp.90-91).

Por su parte, CENSAT Aguas vivas (2009) en su publicación "Cabildo abierto por la vida. No a las plantaciones forestales" afirma que:

> Sevilla de ser la capital cafetera de Colombia ha pasado a ser un municipio aislado, sus comunidades desplazadas por el paramilitarismo y ahora cercadas, cercenadas, hambreadas, destruidas ambientalmente y avasallado su tejido social por la multinacional Smurfit Kappa Cartón de Colombia, que ha logrado acaparar más de 6000 hectáreas en cultivos de plantaciones forestales colocando en riesgo todas las cuencas de los ríos que alimentan los municipios de centro y norte de Valle: Buga, Tuluá, Andalucía, Bugalagrande, Sevilla, Zarzal, Cartago, etc., y la seguridad alimentaria de miles de campesinos, habitantes de las áreas montañosas de la cordillera central.

Ilustración 10 Fallo del tribunal permanente contra multinacionales que atentan contra los derechos humanos



Fuente 15 Tomado de El negro papel en Colombia. Cámara al hombro. HispanTV. https://www.youtube.com/watch?v=NbjpaenlaoA

Además, estas organizaciones aseveran también que los daños ambientales han generado debilitamiento de la salud de las personas debido a los cambios de los ecosistemas, se presenta contaminación de los recursos hídricos a causa de la gran cantidad de agroquímicos y afectación de los cursos de agua de los acueductos veredales; la tala masiva del bosque nativo para la plantación de monocultivo de pino y eucalipto han causado erosión de la tierra, suelo infértil y sobre todo pérdida de la biodiversidad de fauna y flora.

A su vez CENSAT Aguas Vivas (2009) agrega que existe inconformidad por parte de la comunidad porque al parecer Smurfit no paga regalías por explotación forestal e industrial de la madera y existe inequidad en el pago del impuesto predial de la compañía comparada con el valor que pagan los campesinos.

Esto se evidencia en lo expresado por Broderick (1998) en su libro El imperio de Cartón, en el que afirma:

> Pero el verdadero secreto de su éxito consiste en otro factor: su poder político. E decir, su capacidad de lograr legislación favorable para su negocio, Y en eso, la pieza cave parece ser ACOFORE (la Asociación Colombiana de Reforestadores), cuyo liderazgo está en manos de Cartón como el reforestador comercial más importante (y de lejos el más grande) del país. Tal ha sido la influencia de ACOFORE en las altas esferas del poder que la Ley 99 de 1993 (mediante la cual se estableció el Ministerio del Medio Ambiente) asigna un lugar en el Concejo Nacional Ambiental a “un representante de los gremios de la actividad forestal”. Hecho que no llamaría la atención (después de todo la actividad forestal incide mucho en cuestiones del medio ambiente) si del dicho concejo no estuvieran excluidos todos los demás gremios; en el no participan, por derecho propio, ni los azucareros, ni los algodoneros, ni siquiera los cafeteros. Sólo los forestales. Es decir, son Cartón. (p. 63).

Añade también, “No es difícil detectar su huella, por ejemplo, en la Ley 139 de 1994 que establece el Certificado de Incentivo Forestal (CIF)” (p. 65). Y más adelante agrega “A lo largo de los últimos veinte años empezaron a aparecer en los reglamentos colombianos toda clase de créditos de fomento y de beneficios fiscales diseñados para estimular la llamada reforestación” (p. 65).

Por los motivos anteriormente expuestos, WRM (2006) publicó una carta en la que se solicita la desertificación de Smurfit Kappa Cartón de Colombia, sin embargo, Smurfit-Kappa (2014) citado por el Centro de Memoria Histórica (2014):

> El Proyecto Forestal de Smurfit Kappa Cartón de Colombia (SKCC), tiene por objetivo establecer, manejar y cosechar plantaciones en terrenos de aptitud forestal propios y de asociados, con especies que le aseguren una fuente sostenible de madera para producir competitivamente pulpa, papeles y cartones, obteniendo la mayor productividad, en armonía con el ambiente y desarrollando las mejores condiciones de trabajo y de vida para los trabajadores junto con las comunidades en las zonas de influencia. (pp. 94-95).

De acuerdo a un informe publicado por CENSAT Aguas Vivas (2009), el 31 de mayo de 2008 el Concejo Municipal de Sevilla aprobó el acuerdo 011 de su Plan de Desarrollo en el que se hace explícita la prohibición de siembra de especies coníferas, tales como pino y eucalipto para fines comerciales en la jurisdicción de Sevilla, esta determinación fue ignorada por la Smurfit, pues continua las actividades forestales de siembra y re siembra de las especies prohibidas en las veredas de este municipio.

Es importante que el lector conozca que finalizando el año 2019, en Las Brisas iniciaron obras para construir un acueducto que al parecer beneficiaría a todas las familias de la vereda.

1.5.3. Acerca de la sede José María Carbonell.

Luego de exponer algunas generalidades ambientales, sociales y económicas de la comunidad, es conveniente precisar los estudiantes matriculados en la sede en mención. En la Tabla 6, se cuantifican los estudiantes por grado, sexo, raza, edad y necesidades educativas especiales diagnosticadas.

El primer año de escolaridad infantil y cada uno de los grados de básica primaria se han denotado de la siguiente manera, grado 0° significa preescolar, 1° es primero, 2° es segundo, 3° es tercero, 4° es cuarto y finalmente 5° es quinto.

Tabla 6 Caracterización de los estudiantes de la sede José María Carbonell

Grado	**Número de estudiantes**	**Sexo**		**De Etnia**	**Sin etnia**	**Rango de edades**	**Necesidades educativas especiales**	
		H	M				**Con Dx**	**Sin Dx**
0°	3	2	1	1 Embera Chamí	2	4 a 5 años	NA	NA
1°	5	2	3	3 Embera Chamí	2	6 a 12 años	1 niña con síndrome de Down	
2°	3	1	2	2 Embera Chamí	1	7 a 8 años	NA	NA
3°	2	1	1	1 Embera Chamí	1	8 a 9 años	NA	NA
4°	2	0	2	2 Embera Chamí	0	9 a 12 años	1 niña con Hidrocefalia + derivación ventriculoperitoneal	
5°	4	1	3	2 Embera Chamí	2	11 a 16 años	NA	NA
Total	19	7	12	11 Embera Chamí	8	4 a 16 años	2	NA

Fuente 16 Producción propia con base en la información del SIMAT de julio de 2019

H: Hombre M: Mujer Dx: Diagnóstico Médico NA: No Aplica

De los 19 estudiantes matriculados en la sede José María Carbonell, de acuerdo al sistema de matrícula SIMAT, se puede afirmar que la gran mayoría, 12 estudiantes son mujeres, 11 estudiantes pertenecen a la comunidad indígena Embera Chamí, hay dos niñas con necesidades educativas especiales quienes presentan un retardo global en su desarrollo, hay 2 estudiantes repitentes y finalmente, es necesario precisar que hay 6 estudiantes extra edad.

El 63% de los estudiantes viven en familias disfuncionales conformadas por madre, abuela y tíos, el 25% vive con madre y padrastro y el 12% restante vive con su padre y madre. El nivel educativo de la mayoría de los adultos de las familias de los estudiantes es hasta grado quinto de primaria, se presenta algunos casos en que algún familiar ha llegado hasta noveno y en muy pocos casos hay familiares que terminaron sus estudios secundarios (algunos padres y madres de familia, actualmente se encuentran estudiando en los Ciclos). Los adultos trabajan en fincas durante las cosechas de café, plátano, banano, yuca, aguacate hass y cítricos en Las Brisas, en veredas aledañas y frecuentemente en otros departamentos, por lo cual los estudiantes presentan altos índices de ausentismo escolar.

Llegados a este punto conviene mencionar que, desde el documento del PEI de la Institución Educativa la metodología de la sede se direcciona hacia la aplicación de Escuela Nueva. En este sentido, se mencionarán algunos aspectos positivos y otros negativos a la luz de la experiencia en el ejercicio pedagógico.

Dentro de los aspectos positivos se tiene que, al planear actividades bajo conceptos estructurantes que se puedan aplicar a todos lo grados, claro está que con un nivel de dificultad mayor a medida que se avanza en los grados escolares, se propicia el trabajo en grupo y el aprendizaje colaborativo; escuela nueva tiene un gobierno escolar fortalecido y un conjunto de instrumentos[7] útiles para el desarrollo de las clases, como el correo de la amistad, el buzón de sugerencias y compromisos, cuaderno viajero, plan padrino, paleta para ir al baño, semáforo, asamblea de aula, etc., y demás instrumentos o recursos que nacen de la creatividad del profesor en pro de la autonomía estudiantil y de los valores humanos.

Con una adecuada funcionalidad de los recursos nombrados con antelación, se propicia el trabajo en grupos colaborativos, permite apreciar que los estudiantes toman roles para desarrollar de una manera eficaz las actividades, desarrolla la autorregulación de los estudiantes, propicia el compartir conocimientos y explicaciones entre pares, el desarrollo de las actividades se nutre de las intervenciones de los estudiantes independientemente del

---

[7] Se hace referencia a algunos instrumentos de escuela nueva, pues sólo se seleccionaron aquellos que la profesora considera útiles. El correo de la amistad es un espacio en el que todos los estudiantes tienen una cajita decorada por ellos mismos, en la que comparten mensajes con intenciones académicas y personales; el buzón de sugerencias y compromisos es una oportunidad para que los estudiantes se expresen de manera individual y/o grupal, exponiendo su nombre o manteniendo el anonimato; el cuaderno viajero es un cuaderno que todos se llevan para la casa siguiendo un orden establecido, en el que realizan actividades orientadas por la profesora o bajo el liderazgo de algún compañero; el plan padrino se refiere a un tipo de organización de estudiantes, en la que forman parejas de trabajo un estudiante de grado escolar avanzado con uno de menor grado; la paleta para ir al baño es un instrumento para que los estudiantes se den cuenta si el baño de las niñas o de los niños está ocupado, a su vez, permite que los estudiantes autónomamente se regulen para salir del salón e ir al baño; el semáforo es un cartel en el que los colores indican el ambiente de la clase, en este caso el verde se utiliza para indicar que el ambiente de la clase es propicio para aprender, el color amarillo significa que algunas veces los estudiantes asumen comportamientos que no permiten que se desarrolle la clase normalmente y el color rojo, se utiliza cuando definitivamente el ambiente de la clase es negativo; finalmente, la asamblea de aula es un espacio para conversar y exponer ideas de manera respetuosa, se seleccionan estudiantes para cumplir con alguna función, en este oportunidad se escoge un estudiante moderador y uno para tomar el tiempo de cada intervención.

grado escolar y se construyen vínculos estrechos entre pares y profesora. En este sentido, aporta al profesor más elementos para alimentar la reflexión de la práctica pedagógica, en el antes, en el durante, en después de la práctica y en las consideraciones personales que se generen.

Los aspectos negativos giran alrededor del uso de las “cartillas”, guías de aprendizaje de la Fundación Volver a la Gente, como camisa de fuerza para el desarrollo de las clases, puesto que se considera que de esta manera se le da protagonismo a un libro, que la gran mayoría de veces presenta actividades descontextualizadas, y el profesor pierde su autonomía pedagógica, su creatividad, su voz. En ocasiones la metodología es compleja y desgastante para el profesor, sobre todo si se espera mejorar resultados en torno a aspectos disciplinares a corto plazo.

Hay quienes leerán la fundamentación teórica de la metodología Escuela Nueva y se dejarán seducir por sus hallazgos, puesto que maneja un discurso de flexibilidad, respeto a los ritmos de aprendizaje y empatía con el estudiante, empero en esta investigación se discrepa con la siguiente cita, en la que se define Escuela Nueva como:

> … un sistema que integra estrategias curriculares, de formación docente, de relación comunidad y de gestión, que permiten el mejoramiento de la eficiencia y calidad en escuelas de educación básicas rurales y urbanas de escasos recursos, este sistema primordialmente logra un aprendizaje activo, un fortalecimiento de relaciones entre la escuela y la comunidad y desarrolla estrategias de promoción flexible. Esta se entiende como el proceso metodológico que permite al alumno avanzar en grados de acuerdo con su propio ritmo de aprendizaje, con esa estrategia, el niño puede retirarse de la escuela, ya sea para colaborar en las labores familiares del campo o por cualquier otra razón y regresar sin que se afecte su normal aprendizaje (Colbert y Mogollón, 1980, p.85).

De manera personal y de acuerdo a la experiencia, se afirma que no es cierto que si un estudiante se ausenta de la escuela no se afecte su desempeño académico, al contrario, esas ausencias repetidas y por largas temporadas han hecho que algunos estudiantes deserten de la escuela y/o reprueben años lectivos y, como consecuencia la extra edad que se observa y los bajos resultados en las pruebas estandarizadas.

De lo anteriormente expuesto, se afirma que en la actualidad este asunto se encuentra en discusión institucional interna, pues se admite que las acciones de los profesores y de los estudiantes no están sujetas a Escuela Nueva, sino que se acercan a Escuela Unitaria debido al trabajo multigrado, por lo que de ahora en adelante la investigación concibe la sede José María Carbonell como Escuela Unitaria por su modalidad multigrado.

1.6. Viabilidad

Esta propuesta tiene alto grado de viabilidad pues se cuenta con los recursos que se requieren para su desarrollo, estos recursos son: humanos (profesora investigadora y estudiantes), físicos (salón de clases, tv, internet, impresora, mostacilla checa de diferentes colores, hilo aptan, aguja de pelo, base de madera, recipientes, tijeras, encendedor, hojas de papel cuadriculadas, lápices de colores y fichas de actividades), logísticos (la profesora investigadora es quien enseña el proceso de elaboración de las pulseras y quien dirige las tareas del diseño ARTEmbera).

Ahora bien, la gestión de este proyecto está concebida en términos curriculares, pedagógicos, y didácticos, puesto que impera en el diseño el tomar decisiones acertadas respecto a las actividades cognitivas a desarrollar, los objetos y relaciones matemáticas inmersas, la manera en la que se presenta la consigna de la actividad, la metodología que se usará al desarrollar cada tarea y la estrategia de evaluación para la comprensión de los aprendizajes de los estudiantes y no para su control.

CAPÍTULO 2. Fundamentos teóricos de la investigación

Este trabajo se inscribe en una perspectiva didáctica de la Etnomatemática, que propone el diseño, implementación y análisis de una situación didáctica que favorece el aprendizaje de las transformaciones geométricas y el desarrollo de las actividades cognitivas de visualización y razonamiento matemático, en el marco de la elaboración de patrones (físicos y digitales) y pulseras de la comunidad indígena Embera Chamí; para entender lo anterior es necesario conocer los pilares de este trabajo de investigación, los cuales se dividen en los apartados que se encuentran a continuación.

En los siguientes apartados se aprecian aquellos elementos que solidifican la presente propuesta de investigación; en un primer momento se efectúa una breve explicación acerca del cómo se concibe la didáctica general, la didáctica en matemáticas y de manera particular la situación didáctica; en el siguiente apartado se mencionan aspectos inherentes a la fundamentación matemática, estos son, la historicidad del objeto, el pensamiento espacial, la competencia matemática, las transformaciones, las relaciones geométricas y la bidimensionalidad y tridimensionalidad; seguido a esto, impera la necesidad de exponer la perspectiva curricular, en donde se define el concepto estructurante; luego, se hacen explícitos detalles significativos acerca de la visualización y razonamiento matemático; más adelante, el lector encontrará el marco contextual, en el que es preciso mencionar algunos temas que configuran la Etnomatemática presente en esta empresa; finalmente, se sintetizan los rasgos más convenientes del uso de recursos tecnológicos en la educación matemática, en este caso particular GeoGebra.

2.1. Fundamentación didáctica

2.1.1. Concepción didáctica.

En este apartado, se pone de manifiesto la concepción de la autora acerca de la didáctica, puesto que se abre un abanico de referentes teóricos a partir de los cuales se fundamenta la investigación; cabe señalar que no es de interés exponer la complejidad del tema ni en amplitud ni profundidad, basta con mencionar brevemente las definiciones de algunos académicos expertos desde los que se edifica el presente trabajo.

La didáctica ha sido definida de manera general por una variedad de autores, entre ellos el más representativo es Brousseau (2007) quien asevera que este concepto desencadena de la enseñanza, en la medida que la didáctica es “el proyecto científico de construir modelos de las situaciones utilizadas en la enseñanza- para analizarlas y, eventualmente, criticarlas – y proponer otras más apropiadas” (p.16). Brousseau define la enseñanza como aquel proyecto y acción social en el que los estudiantes se apropian de un saber constituido o en vía de constitución; en esta actividad convergen dos procesos preponderantes: la enculturación y la adaptación independiente. Así el didacta tiene por objeto de estudio los procesos de enculturación y adaptación independiente del individuo.

Análogamente, para Vergnaud (2013) la didáctica se concibe como aquel estudio de los procesos de transmisión y de apropiación de los conocimientos de un individuo, teniendo en cuenta los contenidos específicos que dichos conocimientos poseen” (p.146). En este sentido, el autor deja entrever que, en cada campo de conocimiento, los procesos de conceptualización se presentan a partir de cierto tipo de situaciones y de fenómenos y que estos difieren.

En suma, la didáctica general alude al “cómo y con qué” -metodológicamente hablando- se realiza la práctica pedagógica con la finalidad de lograr la adquisición de competencias en los estudiantes, con las cuales tienen la posibilidad de entender y resolver situaciones problema que se presentan en la vida cotidiana.

2.1.2. Didáctica de la matemática.

De acuerdo a la afirmación de Vergnaud (2013) dicha con prelación, es necesario precisar que la investigación propuesta resulta de un campo de conocimiento específico, particularmente la matemática. En este sentido, se exhibe una serie de aseveraciones que se hilan a lo largo de este apartado y que brindan mayor comprensión acerca de lo que se denomina didáctica de la matemática. Se inicia entonces con un breve recorrido histórico acerca de la didáctica de la matemática, pues es de interés exhibir su surgimiento y caracterización.

De acuerdo a Ruíz, Chavarría y Alpízar (2006), la escuela francesa de Didáctica de la Matemática fue conocida por el mundo en la década de los setenta, surgió a partir de las preocupaciones de un grupo de investigadores, en su mayoría matemáticos de habla francesa, por descubrir e interpretar los fenómenos y todos los procesos relacionados a la adquisición y a la transmisión del conocimiento matemático por parte de estudiantes y profesores respectivamente.

A su vez Ruíz et al. (2006), agregan que en esta escuela preponderan dos principios epistemológicos dentro de su concepción de didáctica; por un lado, la identificación e interpretación de aquellos fenómenos y procesos objeto de interés exigen el desarrollo de un cuerpo teórico y no puede reducirse a solo observaciones realizadas a partir de experiencias de aula aisladas ni a cuestiones de opinión o juicios; por otro lado, ese cuerpo teórico en mención debe ser limitado, especifico del saber matemático y no puede surgir de la aplicación de una teoría ya desarrollada en otros dominios, como en la psicología o la pedagogía.

Se destaca la reflexión alrededor de la didáctica de la matemática de Brousseau (2007), él manifiesta que la didáctica de la matemática se enmarca en un área de investigación, en una ciencia cuyo objeto de estudio es la comunicación de los saberes matemáticos y sus transformaciones, es decir la difusión y apropiación de dichos saberes.

Para Chevallard (1982), en la investigación de los fenómenos concernientes a la enseñanza de las matemáticas, es decir en didáctica de las matemática quien investiga debe ser más que un espectador y no se puede quedar solo en la observación y el análisis de los procesos pedagógicos que se llevan a cabo en un aula; el investigador requiere un cierto grado de control sobre las variables que actúan en el proceso de aprendizaje, lo cual permite la determinación de las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por parte de los estudiantes.

En este sentido, el investigador debe desarrollar una ingeniería didáctica, es decir participar en la producción, elaboración o diseño de las situaciones didácticas que analice y así obtener una teoría del fenómeno que produce la apropiación de saberes matemáticos y una técnica para producir los recursos.

2.1.3. Situación didáctica.

En esta propuesta se diseñó un recurso denominado situación didáctica, que al ser implementado y refinado progresivamente permitió la consecución de los objetivos propuestos; empero es importante esclarecer al lector lo que se entiende por situación didáctica.

La teoría de las situaciones didácticas, fue enunciada por primera vez por Brousseau, quien es reconocido por ser un investigador y matemático francés; en esta investigación, la propuesta de este autor es de suma importancia, en virtud de la trascendencia de sus posturas y desarrollo académicos.

Según Brousseau (2007), las situaciones didácticas tienen el propósito de transformar el estado de los conocimientos antiguos del estudiante, de ubicarlo en el plano de la acción, de la formulación de supuestos teóricos, utilización y validación de hipótesis; además de generar espacios de institucionalización por parte del profesor para el cumplimiento del objetivo propuesto en la clase.

Este autor de pleno siglo XXI, concibe la situación didáctica como un modelo de interacción de intención transformadora mediante el intercambio de información entre el estudiante, el profesor, el sistema educativo y todo aquello que pertenezca a un medio determinado, es decir que alguno de los actores debe manifestar la intención de modificar el sistema de conocimientos del otro.

Así pues, las afirmaciones de Brousseau permiten expresar que la labor del profesor consiste en proponer al estudiante situaciones de aprendizaje para que este actúe y genere conocimientos propios como respuesta personal a una tarea auténtica, los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias y necesidades del medio y no a un capricho propio del profesor.

Dentro de la teoría de situaciones didácticas, se contemplan aquellos conocimientos que impiden la construcción o adquisición de uno nuevo, los cuales se denominan con el término *obstáculo epistemológico*. Estos no se denotan como conocimientos erróneos, sino que se conciben como conocimientos exitosos en algunas situaciones, mientras que en otras son inapropiados; en términos semióticos y matemáticos, se equipara con el aprendizaje de objetos matemáticos desde una o algunas representaciones semióticas del objeto, es decir que se ignoraron los tratamientos y conversiones de las representaciones, y su posterior coordinación para abstraer aquel objeto matemático.

Es preciso entonces agregar algunos aspectos mencionados por Artigue, Douady y Moreno (1995), quienes afirman que la gestión del profesor, considera varias fases o etapas a saber: la gestión del contrato didáctico se entiende como la fase en la que el profesor explica la consigna de la actividad, es decir aquellas reglas de juego, tiempos y organización del trabajo; la fase de devolución hace referencia aquellas acciones de los profesores en las que invitan a los estudiantes a reflexionar sobre sus acciones, formulaciones y validaciones, es decir que se interesa en lograr que los estudiantes se *apropien* de la actividad, es importante en el desarrollo de la clase porque corrige posibles errores y ofrece al estudiante la oportunidad de encontrar estrategias de solución; la fase de validación alude al acto de *anticipaciones* y *negociaciones*, la *anticipación* equiparara a la participación de los estudiantes, es decir, a los numerosos descubrimientos que a través de sucesivos perfeccionamientos conduce al alcance de la competencia, mientras que, la *negociación* indica lo que el estudiante intentó y por qué, cómo corrigió, el decidir una nueva respuesta, etc.

En general, tanto en *anticipaciones* y *negociaciones*, los estudiantes y profesores defienden estrategias de solución en un espacio colectivo, esto es el salón de clases; la institucionalización del saber apunta a las acciones del profesor en las que, en su discurso dota de cierto formalismo matemático los acuerdos o estrategias de solución generadas en la validación.

2.2. Fundamentación matemática

2.2.1. Aspectos históricos de la geometría.

Desde la antigua Mesopotamia, Babilonia, Egipto y Grecia, grandes pensadores de la matemática desarrollaron investigaciones alrededor de la geometría; sin embargo, son los egipcios quienes atribuyen a la geometría una naturaleza científica. Tal como menciona Salazar (2017):

> La Geometría según escritos de los historiadores griegos Heródoto, Estrabón y Diodoro, atribuían a los egipcios el nacimiento de la geometría como ciencia. Inicialmente la geometría constituía un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, ángulos, áreas y volúmenes. Las razones prácticas, según Heródoto, se hallan en Egipto, donde era necesario trazar los linderos de las tierras cada vez que el río Nilo las inundaba y con base en esos linderos había que pagar los impuestos.

Continuando con la exposición, sobra decir que los griegos fueron grandes geómetras, tenían gran interés por cuestiones de rigor y validez lógica, véase los trabajos de Tales de Mileto, Pitágoras, Teodoro de Cirene, Demócrito, Arquímedes, Diofanto y otros tantos. Por ejemplo, en el siglo III a. C. el matemático griego Euclides, realizó la compilación de todos los desarrollos geométricos que se encontraban en ese tiempo en su obra Los Elementos, la cual consta de 13 libros en la que se aprecian definiciones, nociones comunes, axiomas, postulados y preposiciones con sus respectivas demostraciones.

2.2.2. La geometría en la escuela primaria y el desarrollo del pensamiento espacial.

La escuela debe ser un escenario que le brinde posibilidades al estudiante de experimentar con su cuerpo, su espacio próximo y el entorno, es decir que el desarrollo del pensamiento espacial es indispensable para el aprendizaje de los niños y niñas, en la medida que las actividades cognitivas se edifican gracias a la manipulación y observación, lastimosamente el pensamiento espacial es un componente de la matemática que se ha abandonado gracias a la concepción tradicional que privilegia el algoritmo y la memorización.

El pensamiento espacial se define “como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (MEN, 1998, p. 56). Por esta razón, actualmente se reconoce la importancia de la geometría en la escuela, incluso ha aumentado la cantidad de redes, foros, congresos y tesis inmersos en temas geométricos.

El desarrollo del pensamiento espacial resulta fundamental para la actividad matemática del estudiante, puesto que desde la infancia se experimenta directamente con las formas de objetos, ya sean juguetes o cualquier tipo de utensilio; así, paulatinamente se va tomando posesión del espacio y sentido de orientación, analizando formas y buscando relaciones espaciales de dirección y orientación, o simplemente de observación, de esta manera el niño en su primera infancia desarrolla su pensamiento espacial.

2.2.3. Ser competente en matemáticas.

2.2.3.1. ¿Por qué competencia?

Muchos conceptos, procesos, decisiones y productos se extrapolan de la economía para estructurar y orientar diferentes acciones, en este caso la educación no es la excepción y en este sentido es gracias a la globalización que se instauran las competencias en el proceso educativo. Tal como lo plantea Jurado (2003) citado por Tobón (2006) "esta tendencia la apoya e impulsa el Banco Mundial y plantea la necesidad de que las instituciones educativas formen el capital humano que requiere el mercado local y global" (p. 61).

Para entender este interrogante, es necesario comprender el recorrido histórico de la *evaluación* a nivel mundial, puesto que ha sufrido varias transformaciones gracias a los desarrollos académicos; de acuerdo con Vasco (2003), en un primer momento en la evaluación la mirada se volcó hacia los contenidos y sobre cómo modificarlos para convertirlos en objetivos y luego confirmar si se logró la conducta observable esperada; más adelante, la reflexión pedagógica gira en torno de lo que se pretende que aprendan los estudiantes, por eso se reformularon los objetivos y aparecen los logros; de esta manera, la conducta observable indica que el estudiante se encuentra en cierto nivel de logro en uno de los subprocesos que se está impulsando y acompañando; luego vinieron los procesos, pero los opositores mencionaron que era necesario que la educación se concentrara en los indicadores, es decir en aquellas señales o síntomas de un avance en un subproceso del desarrollo integral de la persona.

Años después, el ICFES, la Universidad Nacional y la Secretaría de Educación de Bogotá decidieron diseñar una evaluación por competencias, posteriormente el Departamento Nacional de Planeación decidió que la evaluación debía ser por estándares.

De acuerdo a Delors (1996), las competencias recogen la posibilidad de los seres humanos de: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a vivir con los demás y, aprender a ser. Así pues, las competencias son entendidas como el conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes que desarrollan las personas y que les permiten comprender, interactuar y transformar el mundo en el que viven. Una competencia es un saber-hacer flexible que puede actualizarse en distintos contextos; en otras palabras, es una capacidad para el desempeño de tareas relativamente nuevas, en el sentido de que son distintas a las tareas de rutina que se hicieron en clase o que se plantean en contextos distintos de aquellos en los que se enseñaron.

De acuerdo a lo expresado el MEN (2016), en Colombia se focalizó el currículo en el desarrollo del pensamiento matemático a través de la articulación de diversidad de contextos, procesos y conocimientos básicos. Aquí es claro que los contenidos tienen un rol fundamental, empero estos deben girar en torno a los contextos y problemas. Estas orientaciones abrieron el camino para que a comienzos del presente siglo se introdujera la noción de competencia por la vía de la evaluación nacional estandarizada de los aprendizajes. A partir de allí, el debate por la evaluación y la enseñanza orientada a las competencias ha estado latente.

En relación con la naturaleza del término competencia, es preciso parafrasear a García, Acevedo y Jurado (2003), citados por el MEN (2016), estos autores exponen la presencia de al menos dos miradas políticamente distintas sobre la educación. Por una parte, la competencia alude a la eficacia y las demandas del mercado, en donde resulta importante el saber-hacer articulado con la economía mundial, la globalización y especialmente con los modelos neoliberales.

Por otra parte, la competencia se relaciona también a la formación integral del estudiante, en la que el saber-hacer se ubica en contextos socioculturales y en el sentido ético de las decisiones sobre los usos e impactos del conocimiento en la mejora de las condiciones de vida de las personas. Esta última visión está asociada al papel funcional de las matemáticas.

Las competencias son el parámetro de lo que los estudiantes deben saber y saber hacer a lo largo de su paso por el sistema educativo, se dividen en: competencias científicas, competencias ciudadanas, competencias comunicativas y competencias matemáticas.

2.2.3.2. Competencia Matemática.

Según Niss, Bruder, Planas, Turner y Villa-Ochoa (2016), citados por el MEN (2016), señalan que en la investigación internacional conviven acepciones de competencia no todas equivalentes. Muchos investigadores convergen en decir que un sujeto competente en matemáticas es aquel que es contenedor de productos matemáticos, exactamente reglas, definiciones, conceptos, hechos, etc., que deben ser acumulados en la mente del conocedor. En palabras de García (2015) “una competencia matemática se constituye de tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad” (p. 68).

El término de competencias, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, según el MEN (2006) sugiere la necesidad de pensar la acción en el aula como un proceso en el cual los estudiantes puedan tener un aprendizaje significativo y comprensivo del conocimiento científico. Esto requiere un desarrollo del pensamiento que vincule a las matemáticas como una actividad humana visible en la cultura y en la historia de las personas.

De lo anterior se deriva, conforme con el MEN (2006), que ser competente en matemáticas significa “formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.” (p.51).

A su vez, de acuerdo a los expuesto por el MEN (2006), se puede afirmar que las competencias matemáticas favorecen la capacidad de formular, resolver y modelar fenómenos de la realidad; comunicar, razonar, comparar y ejercitar procedimientos para fortalecer la adquisición de conocimientos, habilidades, actitudes y comprensiones del pensamiento matemático, relacionándolos entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido.

En los documentos oficiales, especialmente en los estándares de competencia en matemáticas, se señala que las competencias se desarrollan/adquieren a largo plazo; y para ello, los aprendizajes matemáticos deben ser desarrollados por medio de tareas articuladas al contexto, deben trascender visiones tradicionales en relación con metodologías expositivas centradas únicamente en el desarrollo de habilidades procedimentales y conceptuales.

2.2.4. Generalidad de las transformaciones geométricas.

2.2.4.1. Aspectos históricos de las transformaciones geométricas.

Para iniciar este apartado, es preciso mencionar los aspectos históricos de las transformaciones geométricas, pues el conocimiento de la historia de la transformación geométrica aporta significativamente a la concepción matemática del profesor, enriqueciendo la metodología de enseñanza.

Es preciso entonces, nombrar a Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), citados por Salazar (2017), cuyas posturas se inclinan en afirmar que los seres vivos de la naturaleza presentan estrechas relaciones geométricas especialmente simetrías y proporciones, como por ejemplo en las hojas de los árboles, las telarañas, flores, panales de abejas, entre otros; por otra parte, en los diseños artísticos de la humanidad se ha observado interés por las relaciones espaciales y cómo estas se han relacionado con la estética, la belleza de la forma, por ejemplo las estructuras, fachadas, pinturas y demás ornamentaciones, los artistas han usado las repeticiones de las formas y los movimientos de figuras en el plano en sus creaciones.

De acuerdo a la investigación de Salazar (2017), en el periodo Paleolítico se hallaron muestras de figuras geométricas dibujadas sobre rocas, más adelante el Neolítico se caracterizó por la arquitectura megalítica y por los diseños geométricos en vasijas de cerámica (ver Ilustración 11), se evidencia que las traslaciones fueron muy utilizadas para los diseños artísticos.

Ilustración 11 Vaso inciso de la cueva de los murciélagos de Zuheros – Córdoba

Fuente 17 Tomado de Salazar (2017, p.7)

Años más tarde, con los desarrollos de mesopotámicos, babilonios, mosaicos sumerios, egipcios, griegos, el arte islámico (ver Ilustración 12), entre otros, se aprecia una gran cantidad de producciones artísticas en las que de una u otra manera intervienen objetos, propiedades y relaciones geométricas.

Ilustración 12 Decoración geométrica del arte Nazarí. Palacio de Alhambra. Granada

Fuente 18 Tomado de Salazar (2017, p. 9)

Salazar (2017) llama la atención sobre la noción 4 del libro 1 de los Elementos de Euclides, que menciona que "Cosas que coincidan ente sí son iguales entre sí", así pues, Euclides no era consciente de la transformación en la que intervienen movimientos en el plano, no obstante, él sí logró determinar una correspondencia mediante la superposición de figuras para afirmar la igualdad en forma.

Se ha visto cómo la noción de transformación se solidificó en el arte, ahora se evidencia cómo esta noción evolucionó especialmente con el arte renacentista, exactamente con aquellos pintores que intentaron acercar sus obras a la realidad y se valieron de las leyes de la visión, de la luz y las proporciones; de esta manera, el arte, la técnica y la matemática conjuntamente dieron origen a la perspectiva, Kubovy (1996) la define como "un sistema que permitía a los artistas representar el espacio de acuerdo con reglas geométricas" y también como "un procedimiento puramente geométrico para la representación de un mundo tridimensional sobre una superficie bidimensional."

Ya en siglo XIX, los desarrollos académicos estuvieron enfocados en la geometría proyectiva. Se destaca un sin número de autores que hicieron importantes aportes al respecto, como: Jean-Victor Poncelet (1788-1867) quien inspiró las obras de las de Möbius, Steiner, Plücker, Gergonne y Chasles; Évariste Galois (1811-1832) usó la palabra grupo en el sentido técnico de la palabra; Maurits Cornelis Escher (1898–1972) fue un artista holandés consumado en la técnica de composición a modo de teselaciones.

2.2.4.2. Las transformaciones geométricas.

Las transformaciones geométricas son las operaciones que permiten crear una nueva figura a partir de una previamente dada de acuerdo a una condición específica, o de manera más formal en palabras de Droguett (2008):

> Llamaremos transformación geométrica a una operación u operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura de la primitivamente dada. El transformado se llama homólogo del original.
> Las figuras homólogas respecto a la original se clasifican en:
> - Isométricas, cuando conservan las dimensiones y ángulos; se denominan también movimientos.
> - Isomórficas cuando conservan la forma de la figura original (los ángulos).
> - Anamórficas, cuando cambia la forma de la figura original. (p. 32)

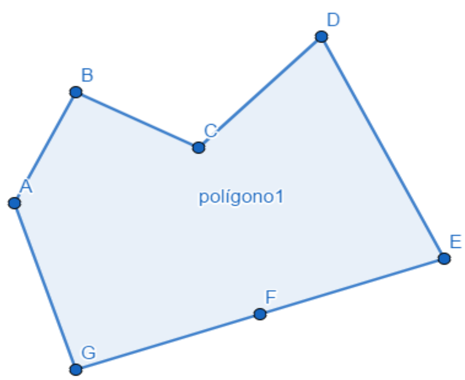
De acuerdo a los intereses de la investigación se destacan las figuras isométricas y las operaciones geométricas de traslación, rotación y la relación de simetría.

En esta sección se relacionan los conceptos matemáticos necesarios para abordar la secuencia didáctica, estos divididos en dos niveles.

Nivel 1. Reconocimiento de elementos constitutivos y propiedades geométricas.

Para iniciar es preciso dar la acepción de la figura elemental de esta investigación, el polígono. Entiéndase por polígono una figura en la que: *P1, P2, …, Pn,* es una sucesión de *n* puntos distintos de un plano con $n \geq 3$. Tales puntos se denominan vértices del polígono. Suponiendo que los *n* segmentos que se forman al unir dos puntos, cumplen con las propiedades de que ningún par de segmentos se intersecan salvo en sus puntos extremos y que ningún par de segmentos con un extremo común son colineales. Los polígonos se clasifican en cóncavos y convexos; regulares e irregulares. Profundizar en esta materia no es de interés para esta investigación. Ver Ilustración 13 en la que se muestra el *polígono 1*.

Ilustración 13 Ejemplo de polígono

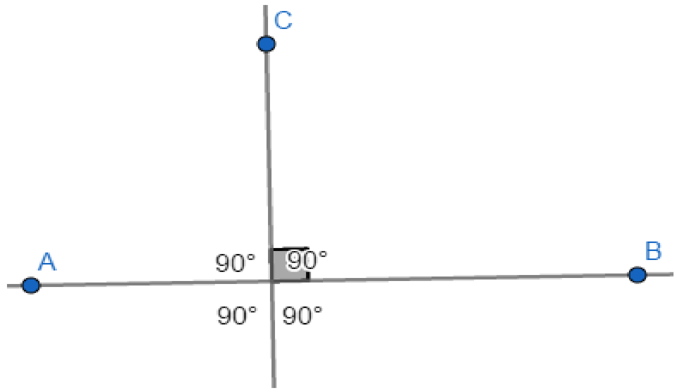


Fuente 19 Producción propia

Es preciso mencionar las siguientes diferencias: dos polígonos son congruentes si sus ángulos y segmentos correspondientes son iguales; dos polígonos son semejantes si y solo si ambos tienes los ángulos correspondientes iguales.

Ahora, es preciso decir que dos rectas son perpendiculares entre sí, si forman cuatro ángulos rectos; en la Ilustración 14 se observa que la recta C es perpendicular a la recta AB.

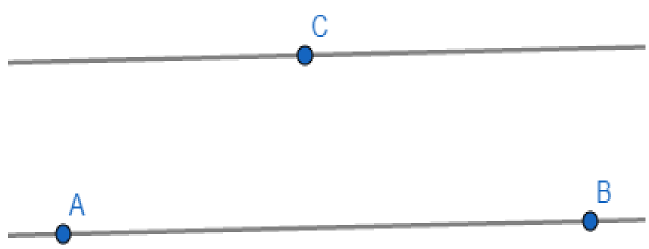
Ilustración 14 Ejemplo de rectas particulares



Fuente 20 Producción propia

Dos rectas son paralelas, si están en un mismo plano y no se intersecan, por ejemplo, en la Ilustración 15 se aprecia que la recta que pasa por el punto C es paralela a la recta AB; además si al trazar una recta perpendicular a una de ellas, también es perpendicular a la restante.

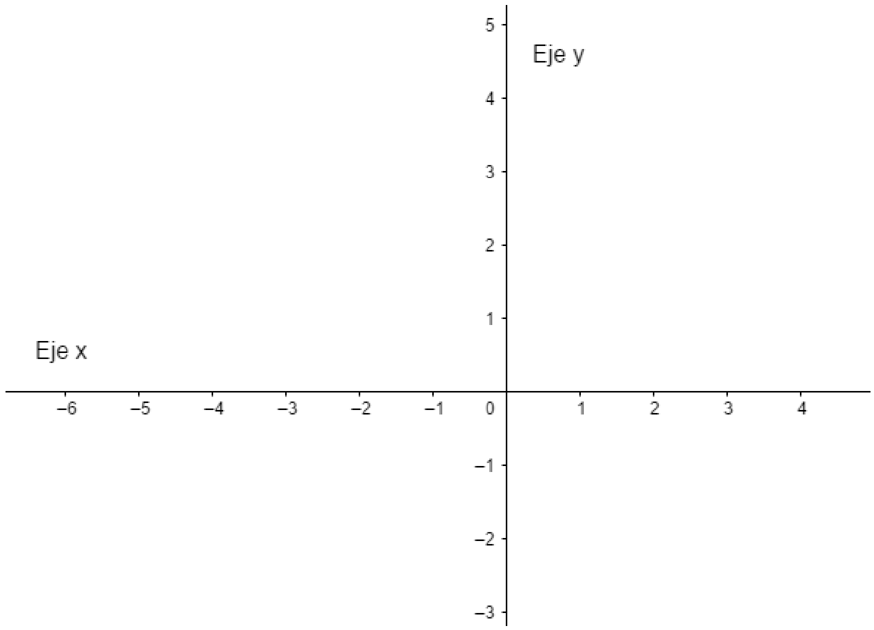
Ilustración 15 Ejemplo de rectas paralelas.



Fuente 21 Producción propia

En algunas de las actividades de la situación didáctica diseñada para esta investigación de aula, se hace uso de coordenadas en el plano cartesiano (ver Ilustración 16); por esta razón, es pertinente mencionar los siguientes aspectos teóricos y remontar al lector en el siglo XVII con René Descartes, quien aportó de manera significativa al avance de la geometría y al cálculo al desarrollar un nuevo método llamado geometría cartesiana.

Ilustración 16 Ejemplo de plano cartesiano



Fuente 22 Producción propia

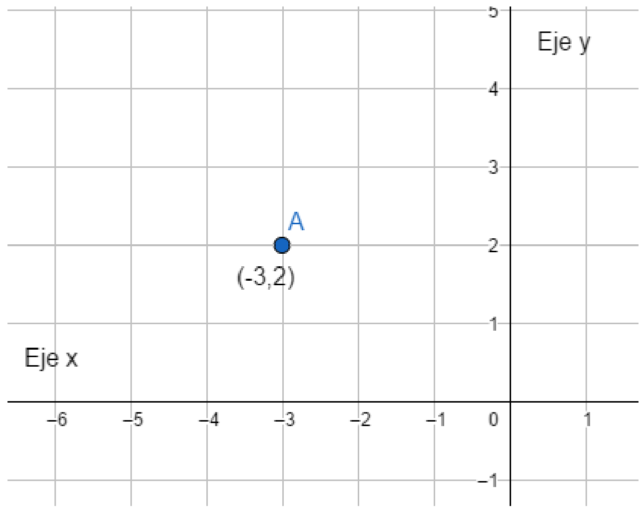
Con este hecho se establecieron relaciones entre la geometría y el álgebra, además se determinó la correspondencia entre una ecuación y su gráfica.

Se tiene entonces, una recta infinita horizontal que recibe el nombre de eje x en donde se halla el punto P, a su derecha se distingue el infinito positivo y hacia la izquierda el infinito negativo. A su vez, se tiene una recta perpendicular a x que se denota eje y, en la que los números negativos se encuentran hacia abajo y los positivos hacia arriba; este eje se intercepta con el eje x en un punto con coordenadas (0,0) llamado origen.

De manera similar a la recta numérica en la que cada punto hace referencia a un número real, en el plano cartesiano existe una correspondencia biunívoca entre un punto y una coordenada, es decir que a un punto le corresponde una pareja de número reales, esto recibe el nombre de sistema de coordenadas.

Por ejemplo, en la Ilustración 17 se muestra el punto A de coordenadas (-3, 2), en donde el número -3 pertenece al eje x y el 2 al eje y.

Ilustración 17 Ejemplo de coordenada en el plan de cartesiano



Fuente 23 Producción propia

Nivel 2. Aplicación de movimientos en el plano.

Parafraseando a Castillo (1993); Alsina, Pérez y Ruiz (1989) y Julio Barrera (2014) citados por Salazar (2017), una transformación en un plano π es una función biyectiva del plano en sí mismo. En otras palabras, las transformaciones geométricas se generan de figuras en el plano a figuras en el mismo plano. En términos formales de la matemática, lo anteriormente dicho se simboliza así: $f\colon \pi \to \pi$. Es decir que en toda transformación geométrica se tiene una figura original, una regla u operación que describa el cambio y la figura que resulta después del cambio. Entonces en $f\colon \pi \to \pi$ se tiene que, la figura original es un elemento de π, f es la regla que describe el cambio, y la figura que resulta después del cambio pertenece al codominio π.

Si se tiene la expresión $(X)=X'$, entonces existe una figura en la que a cada uno de sus puntos X le corresponde uno y solo un punto $X´$. Es decir que al objeto X, denominado objeto inicial o pre imagen, se le aplica una transformación en el plano y se obtiene a $X´$ quien se denomina transformado, homólogo o imagen de X.

En las transformaciones geométricas se cumplen una serie de propiedades, tal es el caso de movimiento en el plano en el que se obtiene el objeto inicial; por ejemplo, si se tiene un ΔABC, al que se le aplica una transformación y como resultado se obtiene el homólogo $\Delta A´B´C´$ y luego a este último se le aplica una transformación inversa a la anterior, este movimiento producirá el $\Delta ABC,$ es decir la misma figura inicial. Con el formalismo matemático se diría que la composición de una transformación *f* con su inversa, es decir f^{-1} da como resultado *f*, esto se denomina *identidad*.

En esta dirección, es preciso entonces mencionar las isometrías en el plano, también llamadas transformaciones euclidiana son movimientos rígidos; se puede afirmar que la palabra *isometría* significa *igual medida*, pues el prefijo *iso* de origen griego se define como *igual o mismo*, por último, es bien sabido que *metría* significa *medir*. Así, estas transformaciones o movimientos geométricos no alteran ni la forma ni el tamaño de las figuras, solo involucran la variación de la posición, es decir que se aprecia un cambio en la orientación y el sentido de la nueva figura.

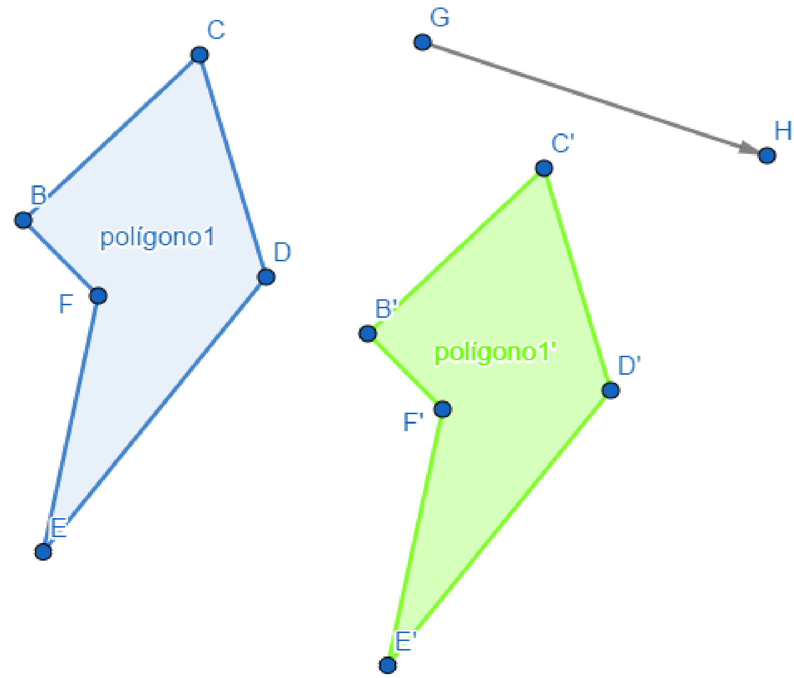
De esta manera, si se tiene una figura inicial ΔABC y se le aplica una isometría, se obtiene una nueva figura $\Delta A'B'C'$ en la que se cumple que $\overline{AB} = \overline{A'B'},\ \ \overline{BC} = \overline{B'C'}\ \ y\ \ \overline{CA} = \overline{C'A'}$

La historia ha mostrado que para Euclides los movimientos constituyen un concepto básico y que la congruencia es un concepto derivado de los movimientos. Es decir, dos figuras geométricas son congruentes si por un movimiento coinciden en todas sus partes y análogamente, si dos figuras geométricas son congruentes es porque se relacionan por medio de un movimiento en plano; por lo tanto, las propiedades geométricas de las figuras congruentes, son aquellas que no varían por un movimiento. El movimiento es, entonces, una correspondencia que lleva una figura a otra congruente.

Es preciso iniciar explicando al lector el movimiento de traslación y más adelante las rotaciones; las traslaciones son aquellas transformaciones rígidas de figuras en el plano, en el que la figura geométrica se desplaza por medio de movimientos rectilíneos, sin deformar ni darle vuelta a la figura. Es decir, si se tiene un punto P, un vector *v*, con cierta dirección y magnitud y un P' producto de un movimiento de traslación *t*, entonces se puede decir que *t* se ha realizado de acuerdo a la dirección de *v*, el sentido de $\overline{PP'}$ es el mismo sentido de *v*.

Por ejemplo, en la Ilustración 18 se observa que el polígono 1 ha sido trasladado por medio del vector GH, obteniendo el polígono 1´, de esta manera se puede afirmar que hay igualdad entre las distancias de los segmentos cuyo extremos son los puntos homólogos y el vector, es decir que: $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \overline{EE'} = \overline{FF'} = \overrightarrow{GH}$. Lo cual, garantiza que los dos polígonos son congruentes, en otras palabras, son iguales en forma y tamaño.

Ilustración 18 Ejemplo de traslación geométrico

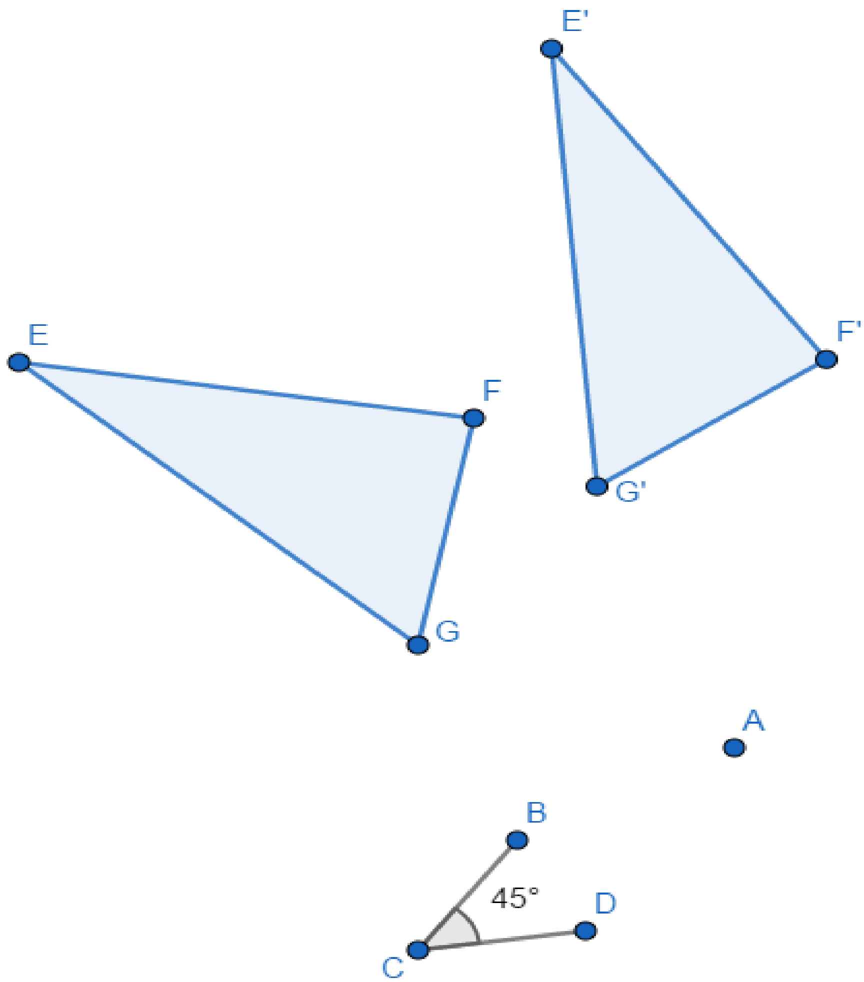


Fuente 24 Producción propia

De acuerdo a Salazar (2017), las rotaciones o giros, son movimientos rígidos que resultan de fijar un punto del plano y hacer girar el plano sobre sí mismo, dejando fijo dicho punto. Para realizar una rotación se precisa tener el mencionado punto fijo, denominado también como centro de giro, un ángulo y finalmente un objeto inicial.

En la Ilustración 19, se encuentra un ejemplo de rotación; se tiene pues la figura inicial ΔEFG, el centro de giro A y un ángulo BCD de 45°.

Ilustración 19 Ejemplo de rotación



Fuente 25 Producción propia

La figura $\Delta E'F'G'$, se obtuvo como resultado de aplicar una rotación o giro al triángulo inicial a través del punto A con un ángulo de giro de 45°, estas dos figuras son congruentes porque las distancias de los pares de puntos homólogos son iguales. Cabe destacar que un ángulo de giro de 180° es un caso especial de la rotación y se denomina semigiro o simetría; también cuando el ángulo de giro es de 360° el objeto final calza exactamente con el objeto inicial, entonces se puede decir que no hubo giro.

2.2.5. Simetrías, congruencias y semejanzas.

Entre las simetrías aparecen las definidas por un punto llamadas simetrías centrales y las definidas por una recta llamadas simetrías axiales. Para dar una definición de simetría central es necesario determinar un punto C que se denomina el centro de la simetría. La simetría axial, dada una recta r en un plano π, una simetría axial o reflexión con respecto a la recta r, que se denota Sr es una función que asigna a cada punto P del plano que no está en r un punto P' de tal manera que r es la mediatriz del segmento PP'. En tal caso la recta r se llama eje de simetría o eje de reflexión.

De acuerdo a lo expresado por Audor (2016), "la congruencia se define como la igualdad en forma y tamaño entre dos o más figuras, independientemente de su posición u orientación", así pues, en dos o más objetos geométricos[8] se cumple la relación de congruencia cuando se hacen coincidir cada uno de sus elementos constitutivos mediante un movimiento rígido.

En el caso en que la igualdad entre figuras geométricas se presente solo en la forma más no en el tamaño, se dice que existe una relación de semejanza; sin embargo, en el caso en que la igualdad se presente solo en tamaño más no en forma, solo se puede afirmar que en ambas figuras hay igualdad de área.

2.2.6. Bidimensionalidad y tridimensionalidad.

Frente a la bidimensionalidad y la tridimensionalidad, la matemática escolar específicamente en la geometría ocurre un suceso que no se debe tomar con ligereza, se trata de lograr en los estudiantes la comprensión de objetos matemáticos tridimensionales a partir del desarrollo de actividades que contengan representaciones bidimensionales de aquel

[8] La relación de congruencia se puede establecer en varios niveles, desde el nivel más simple hasta el más complejo; el primero hace referencia a la congruencia entre segmentos, otro alude a la congruencia entre ángulos y el restante se asocia a la congruencia entre figuras, especialmente entre triángulos.

objeto. Dicho de otra manera, es preciso mencionar las apreciaciones de Lappan y Winter citados por el MEN (1998), en donde se afirma que:

> A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales. A no dudar, tal uso de “dibujos” de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. (p. 39)

Los patrones y las pulseras se equiparan con representaciones bidimensionales y tridimensionales respectivamente, por tanto, en el diseño de la situación didáctica de esta investigación se privilegia el paso de lo bidimensional a lo tridimensional y viceversa.

2.2.7. Perspectiva curricular.

Las tareas que se propusieron en la situación didáctica se aplicaron en básica primaria, desde tercero a quinto; estas actividades están respaldadas por las disposiciones que exponen los documentos oficiales, es decir que cada una de las tareas se propuso de acuerdo a lo que exige el Ministerio de Educación Nacional. En cuanto a la organización horizontal, en la Tabla 7 se relacionan los estándares básicos de competencias en matemáticas, los derechos de aprendizaje v2 y el concepto estructurante de acuerdo a la malla de aprendizaje de matemáticas, que se tomaron como base para el diseño de la situación didáctica.

Tabla 7 Lineamientos oficiales relacionados a los aprendizajes de la situación didáctica

Documentos oficiales del MEN			
Grados	**Conceptos estructurantes**	**Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas**	**Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas**
1° a 3°	Las formas y sus relaciones	Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a	#6 Compara objetos del entorno y establece semejanzas y diferencias empleando características geométricas de las formas bidimensionales y tridimensionales (Curvo o recto, abierto o cerrado, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros).

	diferentes sistemas de referencia. Reconozco y aplico traslaciones y giros sobre una figura. Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño. Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir). Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.	#6 Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones entre las formas bidimensionales y tridimensionales. #7 Describe desplazamientos y referencia la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas.
		#6 Describe y representa formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con las propiedades geométricas. #7 Formula y resuelve problemas que se relacionan con la posición, la dirección y el movimiento de objetos en el entorno.
4° a 5°	Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales. Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños. Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo	#6 Identifica, describe y representa figuras bidimensionales y tridimensionales, y establece relaciones entre ellas. #7 Identifica los movimientos realizados a una figura en el plano respecto a una posición o eje (rotación, traslación y simetría) y las modificaciones que pueden sufrir las formas (ampliación- reducción).
		#6 Identifica y describe propiedades que caracterizan un cuerpo en términos de la bidimensionalidad y la tridimensionalidad y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas. #7 Resuelve y propone situaciones en las que es necesario describir y localizar la posición y la trayectoria de un

		realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.	objeto con referencia al plano cartesiano.

Fuente 26 Producción propia con base en las Mallas de Aprendizaje, los Estándares de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje V2

Tal como se aprecia en la Tabla 7, la planeación de la situación didáctica estuvo direccionada en primera medida, por el concepto estructurante las formas y sus relaciones desde tercero hasta grado quinto y por algunos estándares y derechos básicos asociados, los cuales no se toman como las competencias a desarrollar, sino que su puesta en escena se limita solo a ser referentes e hipótesis de los aprendizajes que se pretenden alcanzar.

En la Tabla 8 se presenta la coherencia horizontal entre el concepto estructurante y los estándares básicos de los demás componentes de la matemática.

Tabla 8 Coherencia horizontal del concepto estructurante las formas y sus relaciones

Concepto Estructurante Pensamiento Espacial	**Grados**	**Componentes de la matemática**			
		Pensamiento numérico	**Pensamiento métrico**	**Pensamiento aleatorio**	**Pensamiento variacional**
Las formas y sus relaciones	1° a 3°	Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.	Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles.	Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas.	Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
					Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.

4° a 5°	Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.	Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos.	Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.	Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica y gráfica.
	Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los Resultados obtenidos.	Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).	Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.	
	Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.			

Fuente 27 Producción propia con base en los Estándares de Competencias en Matemáticas

Este hecho ha impactado positivamente el plan de área de matemáticas de la IE María Auxiliadora, pues ha permitido que se realicen modificaciones de fondo se acuerdo a las exigencias de los referentes oficiales; actualmente se escogen los aprendizajes alrededor de conceptos estructurantes y se asocian con los Estándares y Derechos Básicos de Aprendizaje, para plantear actividades en las que se observe coherencia horizontal entre los cinco componentes de la matemática. Lo anterior, permite que el profesor de matemáticas se convierta en un gestor del ambiente de aprendizaje.

2.3. Procesos cognitivos para el aprendizaje de la geometría

En la recopilación de información para este marco teórico, se valora en gran medida el fundamento teórico que desarrolló Audor (2016).

2.3.1. Los objetos matemáticos y sus múltiples representaciones.

Según la teoría semiótica de Raymond Duval, los objetos matemáticos son entidades abstractas, seres intangibles que solo pueden ser perceptibles a través de sus múltiples representaciones semióticas; en este sentido, es preciso mencionar a Fernández (2011) quien afirma que:

> Cualquier objeto matemático (ideal o abstracto) lleva asociado, como la cara de una moneda lleva asociada su correspondiente cruz, uno o diversos objetos ostensivos. Estos pueden ser símbolos o inscripciones, o representaciones visuales más o menos ricas indicadoras de su composición y estructura. (p. 146)

Así pues, se resalta que cada representación guarda cierto contenido que permite la comprensión del objeto matemático.

De acuerdo a lo expuesto por Duval (1993) y Godino y Batanero (1994), para lograr la adquisición conceptual de un objeto matemático, se deben desarrollar tareas en las que se involucren las distintas representaciones de dicho objeto matemático. Adicionalmente, es pertinente decir que, “Las representaciones son el medio de que dispone el ser humano para hacer visibles sus representaciones mentales” (Duval, 1999, p.58).

Ahora bien, entiéndase como registro semiótico aquella muestra/imagen de una idea, concepto, relación u objeto, que tiene como fin el ser percibido, manipulado y operado por un sujeto; este registro pertenece a un sistema de representación semiótico dependiendo de su naturaleza, es decir de las características que lo determinan, todo concepto es representado por una imagen que permita su comprensión a un sujeto que es el encargado de manipular la información que le suministre la imagen.

En primera instancia, tal como lo expresa Duval (1999) en los primeros capítulos de su libro Semiósis y pensamiento humano, un objeto matemático puede ser representado a través de registros en diferentes sistemas semióticos, sirva de ejemplo el sistema decimal, porcentual, fraccionario, ubicación en la recta numérica, gráficas, etc., en matemáticas existe una amplia multiplicidad de sistemas y cada uno de ellos se caracteriza por tener propiedades determinadas.

Cada uno de los sistemas nombrados anteriormente es distinto en su expresión escrita, gráfica o figural, sin embargo, se refieren al mismo objeto matemático; debido a este hecho, aprender y enseñar matemáticas constituye un reto para estudiantes y maestros, pero ¿por qué reto? Para ilustrar la anterior aserción, es preciso mencionar la paradoja cognitiva en torno a las representaciones semióticas:

> (…) por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo los sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. (Duval, 1993, p.38).

En lo expresado por Duval (1993), se evidencia cómo la naturaleza de los objetos matemáticos transforma la educación matemática en un reto para quien enseña como para quien aprende, en tanto que los maestros deben proponer actividades que permitan que los estudiantes sean competentes matemáticamente, planteando tareas en las que se desarrollen las capacidades de reconocimiento, abstracción, aprehensión de conceptos, propiedades y relaciones matemáticas, a través de diferentes representaciones semióticas, sin confundir el objeto con su representación; los estudiantes por su lado, presentan dificultades porque no realizan tareas con el objeto matemático propiamente, sino que las desarrollan a través de sus representaciones semióticas y no logran coordinar los registros, sino que los conciben como entes aislados.

Siguiendo el discurso de Raymond Duval (1993), cuando quien aprende no consigue coordinar los diferentes registros de representación de un objeto, no logra abstraer el concepto, propiedad y/o relación matemática, e indiscutiblemente no es competente en matemática. Por esta razón, es necesario que los estudiantes coordinen las representaciones de los objetos matemáticos, sus tratamientos y conversiones en los diferentes sistemas de representación semióticos.

2.3.2. Visualización y razonamiento en el aprendizaje de la geometría.

En este apartado resulta fundamental la recopilación efectuada por Audor (2016), puesto que se retoman los aspectos específicos de la teoría semiótica de Duval, los cuales intervienen en esta investigación.

De acuerdo a la teoría semiótica que orienta esta investigación, la actividad geométrica trae consigo una complejidad cognitiva y para su desarrollo, deben propiciarse tres tipos de procesos cognitivos: la construcción de configuraciones, la visualización, y el razonamiento.

Es preciso hacer mención de una serie de autores que expresaron sus acepciones acerca del concepto de visualización. De acuerdo con la postura de Hershkowitz (1996), se define la visualización como: “El proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental o viceversa”. Más adelante Bishop (1999) en una de sus publicaciones hace referencia a la visualización diciendo que:

> La noción de visualización o pensamiento visual se refiere a ideas sobre la intuición y a la capacidad de formación de imágenes mentales. Se habla de visualización cuando

> en una representación predominan las imágenes y componentes gráficos. Las imágenes mentales se pueden evocar mediante expresiones lingüísticas y ejemplos apropiados.

Por su parte, Arcavi (2003) precisa la definición de visualización de manera general:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar o comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas.

Camargo, Perry y Samper (2005), al realizar una descripción esquemática de la actividad demostrativa, determinan la visualización como "… (la) mirada sobre una representación gráfica (dada o construida) que se enfoca en elementos de esta para detectar, percibir o evocar propiedades geométricas", es decir como un proceso de carácter empírico.

Más adelante Torregrosa y Quesada (2007) afirman: "se denomina visualización en el estudio de la geometría al proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental o viceversa" es decir, el paso de información entre dos objetos a través de la percepción visual o de la experiencia sensorial se denomina visualización.

De acuerdo con el juicio de la autora, lo anterior corresponde a las definiciones de visualización que se acercan más a las intenciones de esta investigación.

Ahora bien, se debe realizar una distinción entre los conceptos: visión y visualización; para esto, parafraseando a Duval (2002) se tiene que: la visión es la percepción directa de un objeto espacial; la percepción visual necesita exploración mediante movimientos físicos, ya sea del sujeto que ve, o del objeto que se mira, porque nunca se da una aprehensión completa del objeto, es decir que cada representación deja ver, pero también oculta ciertos elementos.

Así, la visualización es una representación semiótica de un objeto, una organización bidimensional de relaciones entre algunos tipos de unidades; de hecho, la visualización de cualquier organización puede ser sinópticamente comprendida como una configuración. La complejidad de la visualización matemática no radica en sus unidades visuales, sino en la selección libre de variables visuales relevantes en una configuración por parte del sujeto.

Según Duval (2004b) el primer proceso cognitivo asociado a la enseñanza y aprendizaje de la geometría es la visualización. Ésta se presenta en dos formas, por medio de una entrada icónica y una no icónica.

La primera entrada, la visualización icónica hace referencia a una manera de visualización básica, en donde el contorno es central y es el que da mayor información, es decir que lo demás pasa desapercibido, las propiedades y relaciones geométricas. Aquí no se aprecian los elementos constitutivos de la figura ni se identifican las propiedades existentes, hay una observación estática de la figura como si esta no se pudiese transformar, como si fuese inamovible. Las figuras tienden a confundirse, como si se tratara de otras representaciones por fuera de la matemática.

La restante, la entrada no icónica a la visualización, se caracteriza por el reconocimiento de las figuras de manera global, es decir como un todo, hay un reconocimiento de los elementos constitutivos y de sus propiedades, se caracteriza por la discriminación de configuraciones.

En concreto, se puede afirmar que esa naturaleza icónica imposibilita el proceso de visualizar que se requiere en geometría para que se alcance un aprendizaje significativo.

Desde los planteamientos de Duval mencionados por Audor (2016), se establecen tres niveles de visualización, a saber: la visualización global, el nivel de percepción de los elementos constitutivos y el nivel operatorio de percepción visual.

La visualización global hace referencia al nivel elemental en el que se realiza un reconocimiento de formas, de contornos, de figuras prototípicas y aspectos básicos como posición, cercanía y vecindad; también se consideran las figuras como componentes de otros objetos.

El nivel de percepción de los elementos constitutivos, alude a un nivel que requiere una mirada geométrica, en donde se distinguen relaciones y propiedades matemáticas y, la observación se centra en los elementos constitutivos.

Por último, el nivel operatorio de percepción visual, es el nivel más importante en las tareas que involucran transformaciones de los objetos matemáticos, pues es donde el sujeto reconoce la complementariedad y el solapamiento como procedimientos útiles para la resolución de problemas geométricos.

Ahora bien, según Duval existen tres maneras de ver una figura: a través de la aprehensión perceptiva, la aprehensión discursiva y la aprehensión operatoria. Se dice que la aprehensión perceptiva sobre una figura se considera un proceso intuitivo porque es una manera de mirar sólo aquello que se dejar ver a primera vista. Es posible este tipo de aprehensión a través de dos vías; por medio de una identificación simple, es decir el reconocimiento de una señal o marca del contorno y/o por medio de la identificación de elementos que correspondan a formas conocidas. Este tipo de aprehensión se relaciona con la visualización icónica.

La aprehensión discursiva alude a una acción cognitiva en la que se asocia la figura con un discurso, es decir que intenta ser una manera de visualizar un tanto más compleja. La asociación figura y discurso sugiere la existencia de una o varias afirmaciones matemáticas con un dibujo que la acompañe o se construye, sirva de ejemplo enunciados que brindan información correspondiente a definiciones, teoremas, axiomas, etc., en algunos casos el enunciado o consigna puede cambiar la apreciación que se tenga de la figura, modificarla o enriquecerla.

Esta aprehensión puede realizarse de dos maneras dependiendo de las direcciones de transferencia, esto es dos tipos de anclajes: del visual al discursivo y del discursivo al visual; el primero ocurre cuando se asocia un discurso a una figura, precisa que el sujeto relacione las características de la figura y del enunciado; el anclaje discursivo al visual exige que el sujeto desarrolle la actividad propuesta en un enunciado; sin embargo, tal como lo menciona Galeano (2015) "Se ha mostrado que hay cierto predominio de lo visual sobre lo discursivo, es decir, hay ciertas formas que se reconocen independientemente de lo que el enunciado presente".

Por último se tiene la aprehensión operatoria, la cual requiere que el sujeto realice una modificación de la figura para resolver un problema geométrico, es decir modificaciones de la configuración inicial, este cambio puede ser de dos tipos: aprehensión operativa de cambio figural y la aprehensión operativa de reconfiguración; la primera posibilita al sujeto que agregue o elimine elementos para resolver la situación; la segunda permite que el sujeto realice una manipulación de los elementos constitutivos, como si se tratara de un rompecabezas.

En este sentido, a partir de la acción coordinada entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operatoria en el desarrollo de tareas estrictamente geométricas, es decir en las que se asocia un tipo de discurso matemático y/o la transformación de configuraciones, nace la concepción de razonamiento configural como un proceso de razonamiento en el que la acción de generar discurso alrededor de un registro figural está vinculado cognitivamente a las modificaciones realizadas a la figura para encontrar la solución. Las investigaciones muestran que, en la resolución de los problemas de geometría, el razonamiento configural juega un papel importante.

De manera sencilla, el razonamiento se puede definir como el conjunto de proposiciones que se producen con la finalidad de apoyar determinado punto de vista, justificar la solución a un problema o las razones por las cuales se dio un tipo respuesta; de manera más formal se tiene otra acepción de razonamiento desde las apreciaciones de Clement y Battista (1992) citados por Fernández, Godino y Cajaraville (2012) "…el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales" (p. 41).

El razonamiento matemático es pues, el otro proceso asociado al aprendizaje de la geometría, este proceso cognitivo se relaciona con los procesos discursivos de explicar, argumentar y demostrar proposiciones, es decir que contribuye a la extensión del conocimiento.

Autores como Balacheff (2000), Hanna (2001), Moreno (1996), Duval (1992), (1995) y (2007), Camargo, Perry & Samper (2005) y Sfard (2008), citados por Audor (2016), evidencian que el razonamiento como competencia se ha convertido en una preocupación teórica y por eso toma un gran valor en esta investigación.

En palabras de Duval (2004a) citado por Galeano (2015):

> …el razonamiento tiene que ver con el conjunto de *demarches* discursivas que aparecen en la actividad con geometría, desde las primeras tareas de reconocimiento y determinación de las propiedades de las figuras a través de los enunciados que las acompañan hasta aquellas que organizan y dan sentido a los argumentos y demostraciones que validan la producción de nuevos resultados. La actividad geométrica que es interesante desde un punto de vista cognitivo es aquella que es discursiva, es decir, aquella que se sustenta en una organización compleja de estatus teóricos para las proposiciones que involucra dicha actividad, y tal organización depende del reconocimiento y puesta en marcha de procesos de razonamiento. (p. 45)

Por otra parte, Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández (2012) aseveran que “la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente” (p. 126). Es decir que, a manera de ejemplo, el razonamiento no se debe pensar independientemente de la visualización y construcción, o por lo menos no alejada de la visualización, en tanto que, por naturaleza razonamiento y visualización han de estar íntimamente relacionados, tal como lo explica Fernández (2011):

> Una de las principales fuentes de dificultad a la que se enfrenta la elaboración de estos razonamientos tiene que ver con que ellos se han de producir en una interrelación con la visualización. Lo que se ve determinará las posibilidades de formular un razonamiento. (p. 43)

Añade Fernández (2011), “nuestras experiencias corporales/visuales se incrustan en nuestra mente en forma de esquemas-imagen apoyan y condicionan los procesos de conceptualización y de razonamiento proposicional y analítico” (p. 145). En este sentido, se cree que, para lograr el desarrollo del razonamiento y la visualización, estos han de estar estrechamente vinculados en las tareas escolares que se propongan.

Es importante mencionar que algunas de las tareas propuestas requieren el uso de GeoGebra, lo cual implica que la visualización y el razonamiento sean considerados desde la lógica de los ambientes de geometría dinámica; por lo anteriormente dicho, conviene mencionar el planteamiento de Arcavi & Hadas (2000) citados por Santos (2003):

> …los ambientes dinámicos no solo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones.

2.4. Marco contextual

2.4.1. Aspectos Etnomatemáticos.

Tal como menciona Tabares (2016), la Etnomatemática se refiere a las estrategias matemáticas que desarrolla un grupo poblacional que posea unas características que permita diferenciarlo del resto del conjunto social para resolver situaciones de la vida cotidiana, procesos matemáticos, propios, símbolos, jergas, mitologías y modelos de razonamientos, trabajadores de oficios, grupos culturales.

D'Ambrosio (2001) quien es considerado el padre de la Etnomatemática, afirma que:

> …la etnomatemática es la matemática practicada por grupos culturales, tales como comunidades urbanas o rurales, grupos de trabajadores, clases profesionales, niños de cierta edad, sociedades indígenas y otros tantos grupos que se identifican por objetivos y tradiciones comunes a los grupos. (p. 9).

Este autor, en una entrevista años después añade que:

> …hacer etnomatemática es una manera de hacer Educación Matemática, con ojos que miran distintos ambientes culturales. El trabajo de etnomatemática no es pasar al alumno las teorías matemáticas existentes, que están congeladas en los libros para que él las repita, ¡no! Debe ser una práctica, una cosa viva, hacer matemática dentro de las necesidades ambientales, sociales, culturales, etcétera. (Blanco, H., 2008, p. 22)

Bishop (2005), afirma que la "etnomatemática es el conjunto de conocimientos matemáticos, prácticos y teóricos, producidos o asimilados y vigentes en su respectivo contexto sociocultural, que supone los procesos de: contar, clasificar, ordenar, calcular, medir, organizar el espacio y el tiempo, estimar e inferir" (p. 43).

Otra definición es la de Gerdes, citado por Tabares (2013), quien dice que:

> …la Etnomatemática se deriva de una conjunción entre la antropología cultural, la Matemática y la Educación Matemática, lo que plantearía la necesidad de tener conciencia de la existencia de varias matemáticas, según las diferentes culturas, siendo las matemáticas occidentales "sólo una de ellas" (p. 430).

Finalmente, Audor y Echeverry (2013), afirman que en la Etnomatemática

> …interesa entender cómo las matemáticas se desarrollan en las personas en su hacer, en su pensar y en su comunicar, a las imprescindibles e inevitables relaciones que se presentan entre la formación matemática de los individuos y el reconocimiento de la diversidad. (p. 322)

Audor y Echeverry (2013) mencionan que "hoy en día se reconoce que por medio de la matemática se puede revelar todo lo que se encuentra a nuestro alrededor, los fenómenos físicos y las actividades cotidianas de la vida del hombre se pueden expresar matemáticamente; sin embargo, el rastreo bibliográfico ha demostrado que existe poco material correspondiente a la etnomatemática, sin negar, claro está, el reciente interés en este campo en países como Brasil, Panamá, Costa Rica, Nicaragua, Guatemala, entre otros; tal como se logra apreciar en el artículo "El programa etnomatemática en Centroamérica y Norteamérica" de Yojcom, Castillo, Gavarrete, Tun, Pou, Morales y Aroca (2016).

2.4.2. Aprendizaje cultural.

En esta investigación se resalta la importancia de aquellos conocimientos empíricos que pertenecen a grupos sociales no académicos, en este sentido se acepta que todas las personas tienen capacidades de acción y reflexión, es decir que se admite la existencia de una inteligencia relacionada con la cultura.

Cabe señalar que esta inteligencia cultural no reemplaza el saber académico, sino que se sirve de este bajo condiciones de igualdad junto con los saberes prácticos y comunicativos al conformar las comunidades de aprendizaje. Según las indicaciones de Adell, Herrero y Siles (2004) y Valls y Munté (2010), citados por Fernández (2014), el sustento teórico de las Comunidades de Aprendizajes y de los grupos interactivos es la enseñanza dialógica, es decir que se afirma que las personas tienen habilidades comunicativas innatas, como producir lenguajes y generar acciones en su entorno. Siguiendo este discurso, para Aubert, Duque, Fisas y Valls (2004) citados por Fernández (2014), este tipo de aprendizaje tiene como objetivo principal fomentar el aprendizaje de las personas a través de un diálogo que valore las aportaciones de las personas por sus argumentos y no por las titulaciones académicas que posean.

Finalmente, el aprendizaje cultural propicia el desarrollo de competencias, pues como dice Bishop (1999) citado por García (2015) “el desarrollo de competencias matemáticas es un proceso cultural complejo” (p. 30), es decir que el reto educativo es situar al estudiante en el contexto de la cultura matemática.

2.4.3. Comunidades indígenas en Colombia. Los Embera Chamí.

Según la Comisión Económica para América Latina CEPAL, a través del Centro Latinoamericano y Caribeño de Demografía CELADE (2014), Bolivia es el país que tiene el porcentaje de población indígena más alto 62,2% es decir 6.216.026 personas, seguido por Guatemala con un 41% y Perú 24%, sin embargo, en el resto de países se aprecia que los pueblos indígenas en Latinoamérica cada vez más constituyen minorías en sus países de origen. Particularmente en Colombia el porcentaje de población indígena sobre el total de habitantes es del 3,4%, es decir 1.559.852 personas.

De acuerdo a un artículo que divulgó al MEN (2010), por motivo de los doscientos años de independencia, en el que se realiza una caracterización de algunas comunidades indígenas Embera, existe diferenciación entre los Embera Chamí, Katío y Siapidara aunque suelan parecer similares.

En tiempos prehispánicos los Embera se conocieron como indígenas “chocó” o “chocoes” y compartieron la lengua nativa, la cosmovisión jaibaná, la movilidad territorial, el gobierno no centralizado, la cultura selvática y la estructura social, que radica en unidades familiares, la base de su sociedad y en unidades sociales más amplias, el desempeño de diversas actividades (Ulloa, 1992 citado por el MEN, 2010, p.1).

El colectivo Embera, como resultado de los procesos propios de la conquista y la Colonia, la introducción de misiones evangelizadoras, la avanzada de colonos para el despojo y fraccionamiento de tierras, entre otros factores, obligan a las diversas comunidades

Embera movilizarse y condicionar desarrollos disímiles, a partir de los contextos naturales en los que se albergaron, el tipo de poblaciones y de interacciones que afrontaron y que ejercieron diferentes influencias en cada grupo asentado en diferentes territorios.

De acuerdo a lo expuesto por Ulloa (1992) citado por el MEN (2010), en la actualidad los Chamí, Katíos, Dodibas, y Eperara Siapidaras, comparten algunos de los rasgos que en tiempos prehispánicos compartieron, que aún les permiten una base de identidad étnica común, como los son su idioma, la tradición oral, el jaibanismo, la organización social, y la reciente participación a través de organizaciones regionales.

El Censo DANE 2005 citado por el MEN (2010), reportó 29.094 personas auto reconocidas como pertenecientes al pueblo Embera Chami, de las cuales el 50,2% son hombres (14.609 personas) y el 49,8% mujeres (14.485 personas). El pueblo Embera Chamí se concentra en el departamento de Risaralda, en donde habita el 55,1% de la población (16.023 personas). Le sigue Caldas con el 24,8% (7.209 personas) y Antioquia con el 7,3% (2.111 personas), estos tres departamentos concentran el 87,1% poblacional de este pueblo; algunas comunidades tienen asentamientos en los departamentos de Quindío, Valle del Cauca y Caquetá. Los Embera Chamí representan el 2,1% de la población indígena de Colombia.

De acuerdo al MEN (2010), en el Censo mencionado el porcentaje de población Embera Chamí que no sabe leer ni escribir es del 26,6% (7,447 personas), del cual la mayoría son mujeres 52,2% (3.888 personas). Esta tendencia no se mantiene al observar otros datos del Censo, pues del 64,8% (18.852 personas) que reportan tener algún tipo de estudio, la mayoría, el 50,9% (9.601 personas), son hombres.

Los Embera Chamí conservan su lengua nativa, la cual pertenece a la familia lingüística Chocó, que tiene relación con las familias Arawak, Karib y Chibcha, y está emparentada con la Waunan, sin embargo, no pertenece a ninguna de éstas, de acuerdo a Ulloa (1992) citado por el MEN (2010).

2.4.3.1. Comunidad indígena Embera Chamí en la vereda Las Brisas (Sevilla – Valle del Cauca).

A mediados del año 2017 llegó a la vereda Las Brisas la comunidad indígena Embera Chamí, puesto que el gobierno benefició aproximadamente a treinta familias del cabildo indígena Dojuravida con una extensión de tierra para habitarla y trabajarla, no obstante, aún la mayoría de familias se encuentran en Paila Arriba (municipio de Bugalagrande) donde tienen su asentamiento, dado que en la actualidad se encuentran realizando la construcción de sus viviendas.

Como consecuencia la sede José María Carbonell ha recibido hasta el momento once estudiantes indígenas, de los cuales hay ocho mujeres y tres hombres, sus edades oscilan entre los 5 hasta los 16 años.

Se observa que la principal problemática social en la escuela es la inasistencia injustificada de los niños, lo cual propicia la extra edad escolar, la deserción estudiantil y el bajo desempeño académico. De acuerdo a las explicaciones de los padres de familia frente a este hecho, mencionan que la falta de oferta de trabajo en la vereda Las Brisas, los ha obligado a abandonar la vereda por periodos de tiempo para buscar trabajo en otras regiones.

2.5. Acerca de la herramienta tecnológica

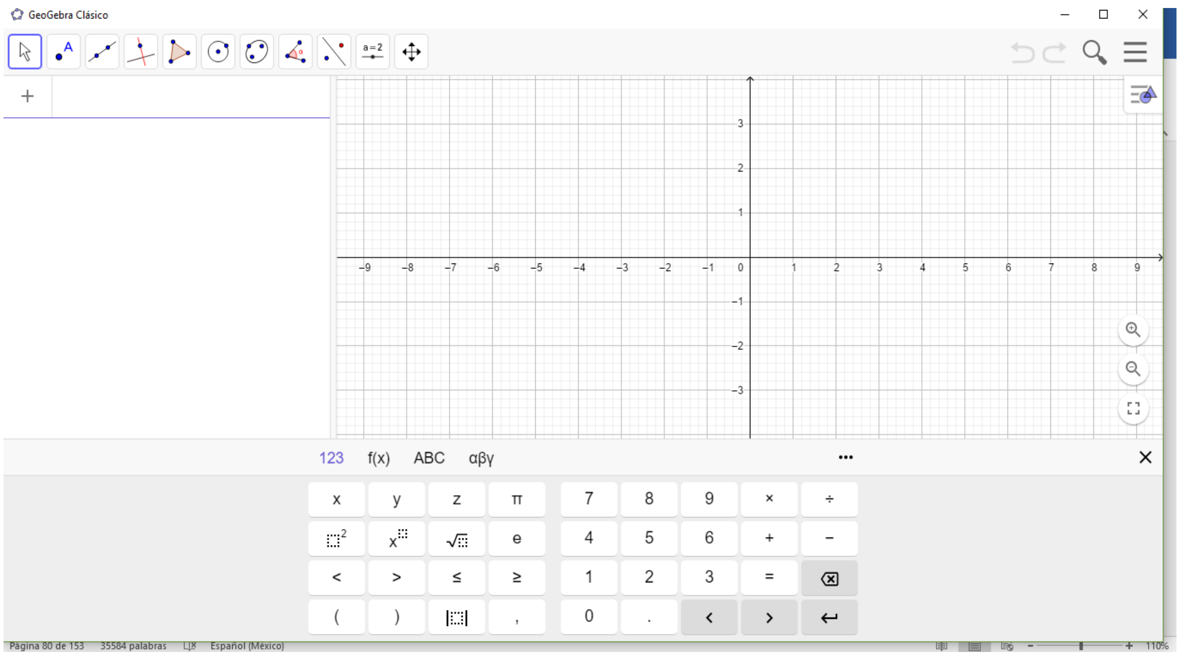
Algunas de las tareas propuestas en la situación didáctica requieren el uso de un ambiente de geometría dinámico, sin embargo, el uso de esta herramienta tecnológica no es la actividad central para el análisis de esta investigación, sino que es un medio que permite nutrir el proceso de visualización y razonamiento.

2.5.1. Ambiente de Geometría Dinámico: GeoGebra.

Según geogebra.org, GeoGebra es un software de matemáticas interactivo para todo nivel educativo y de uso libre creado por Markus Hohenwarter. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo; puede ser usado en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas.

De acuerdo a las publicaciones de geogebra.org, este software es de uso libre, congrega a una comunidad vital y en crecimiento, en todo el mundo millones de entusiastas lo adoptan y comparten diseños y aplicaciones; en la actualidad, países latinoamericanos como Argentina, Brasil, Colombia, El Salvador, México, Paraguay, Perú, Uruguay y Venezuela han creado dieciocho institutos GeoGebra, los cuales están constantemente realizando eventos académicos, compartiendo materiales y difundiendo los productos de la Comunidad GeoGebra, como el software y sus herramientas. En la Ilustración 20 se observa la interfaz de GeoGebra con su entrada gráfica y algebraica.

Ilustración 20 Interfaz de GeoGebra



Fuente 28 Captura de pantalla

2.5.2. GeoGebra en el desarrollo de tareas matemáticas.

Este ambiente dinámico permite que los estudiantes desarrollen competencias para explicar, visualizar, probar, razonar y argumentar; en palabras de Mariotti (2000, 2001) citado por Torregrosa, Haro, Penalva, Martínez y Llinares, S. (2010) “las herramientas dinámicas proporcionan un contexto, en el que es posible que se produzca una evolución del significado de la demostración, pasando de la intuición geométrica al proceso deductivo” (p. 382).

Se agrega que, un aspecto elogiado de los ambientes dinámicos de geometría es que permiten que el usuario pueda arrastrar los elementos constitutivos de la figura y es a través de la función de arrastre que se distingue entre un dibujo y una figura geométrica, pues el dibujo no pasa la prueba y se deforma, en cambio la construcción geométrica se conserva, no se alteran las partes estructurales de la figura. Así, el arrastre se concibe como una herramienta de validación.

CAPÍTULO 3. Fundamentos metodológicos de la investigación

Llegados a este punto, se exhiben todos los aspectos relacionados con la metodología distribuidos en varios apartados; primero, se destacan elementos de las teorías de aprendizaje que se asocian al diseño de esta investigación; en un segundo momento se menciona de manera general una breve descripción de la investigación de diseño, con la finalidad de favorecer la comprensión de la concepción de experimentos de enseñanza, pues estos son una forma particular de la investigación de diseño; después, se profundiza sobre la metodología de experimentos de enseñanza; finalmente, se presenta el cronograma que se siguió para la elaboración de esta investigación.

3.1. Teorías del aprendizaje asociadas a la situación didáctica

La situación didáctica diseñada en esta investigación no pertenece a una teoría de aprendizaje particular, sino que toma de cada teoría de aprendizaje los elementos que se consideran más favorables para el proceso educativo, sin caer en la incoherencia; en este sentido, se afirma que algunas tareas de ARTEmbera tienen un carácter conductista, en virtud de la necesidad de enfatizar en el dominio de los primeros pasos antes de progresar a niveles más complejos de desempeño.

También se concibe el diseño como cognitivista, en la medida que algunas de las tareas propuestas permiten el almacenamiento de la información conceptual y procedimental por parte de los estudiantes de manera organizada y significativa; muchas de las tareas sugeridas requieren instrumentos del aprendizaje como: las explicaciones instruccionales, las demostraciones, los ejemplos demostrativos y la retroalimentación.

Además de lo anterior, las tareas planteadas en la situación didáctica están dirigidas a la comprensión por medio de la experiencia, apuntan a conseguir que los estudiantes creen significados matemáticos a partir de su experiencia en la elaboración de patrones y pulseras, de tal suerte que se conciban estas tareas en el marco de la teoría del aprendizaje constructivista, por ser tareas auténticas.

Los constructivistas Ertmer y Newby (1993) afirman que "el conocimiento es una función de cómo el individuo crea significados a partir de sus propias experiencias”, es decir que quien aprende construye interpretaciones y/o representaciones personales del mundo, a través de experiencias vividas.

Ertmer y Newby (1993) agregan que los objetos de conocimiento cambian, evolucionan continuamente con cada nueva utilización que se hace de ellos, de manera que las interpretaciones del mundo están sujetas al cambio constante. Por lo anteriormente dicho, se requiere que el aprendizaje se mueva al interior del contexto de los estudiantes, es decir que se movilice en ambientes reales.

En este sentido Bednar (1991) citado por Ertmer y Newby (1993), afirma que “un concepto esencial en el enfoque constructivista es que el aprendizaje siempre toma lugar en un contexto y que el contexto forma un vínculo inexorable con el conocimiento inmerso en él” y luego añade que “no acepta el supuesto que los tipos de aprendizaje pueden identificarse independientemente del contenido y del contexto de aprendizaje”.

Del enfoque constructivista llama la atención algunas estrategias utilizadas por este modelo, las cuales se consideran adecuadas para el aprendizaje, en esta dirección Ertmer y Newby (1993) mencionan que:

> Algunas de las estrategias específicas utilizadas por los constructivistas incluyen: situar las tareas en contextos del "mundo real"; usar pasantías cognitivas (modelaje y monitoreo del estudiante para conducirlo al desempeño experto); presentación de perspectivas múltiples (aprendizaje cooperativo para desarrollar y compartir puntos de vista alternativos); negociación social (debate, discusión, presentación de evidencias); el uso de ejemplos como "partes de la vida real"; conciencia reflexiva; y proveer suficiente orientación en el uso de los procesos constructivistas.

En esta línea constructivista, se espera que los estudiantes participen en las tareas iniciales del diseño y desarrollen representaciones mentales que les permitan realizar tareas de elevada complejidad con mayor eficiencia.

Ahora bien, tal como se mencionó al inicio de este apartado, la secuencia didáctica no se enmarca en un enfoque de aprendizaje específico, pues se admite que el conductismo, el cognitivismo y constructivismo, tienen elementos que favorecen el aprendizaje en los diferentes momentos del proceso educativo y/o de la clase como tal, para dar soporte a esta afirmación es pertinente citar a Ertmer y Newby (1993) quienes dicen que:

> Jonassen está de acuerdo en que la adquisición de conocimiento introductorio se logra mejor a través de enfoques más objetivistas (conductistas y/o cognitivos) pero sugiere una transición al enfoque constructivista en la medida que los estudiantes adquieran mayor conocimiento, lo que les proporciona el poder conceptual requerido para enfrentar los problemas complejos y poco estructurados.

De esta manera, aquellas objeciones con relación a la postura tomada respecto a la elección del modelo de aprendizaje, pierden peso en la medida que se acepta que es necesario que las actividades iniciales tengan un carácter conductista y/o cognitivista en virtud de la comprensión conceptual y procedimental que aportan.

3.2. Metodología: investigación de diseño

De acuerdo a la publicación de Molina, Castro, Molina y Castro (2011), existe una variedad de definiciones respecto a lo que se considera investigación de diseño, estos autores citan a Shavelson y Towne (2002), quienes afirman que esta metodología se define como una serie de planteamientos analíticos que tienen como objetivo indagar sobre el cómo y el porqué de los procesos que dan lugar a ciertas situaciones dentro de una práctica educativa. Más adelante, se encuentra también que los autores diSessa y Cobb (2004) consideran este tipo de estudios como intentos de entender y mejorar procesos educativos simultáneamente iterativos, situados y basados en teoría.

Años más tarde, Confrey (2006) citado por Molina et al. (2011), afirma que la investigación de diseño es una indagación extensa acerca de una práctica educativa, en la cual de manera secuenciada se propone un conjunto de actividades a los estudiantes, movilizando un concepto o competencia en determinada área y que se logra aprender gracias a la interacción entre estudiantes orientados por el profesor

Esta metodología es de carácter cualitativo, ha evolucionado y durante los últimos años está siendo adoptada y adaptada desde diferentes disciplinas; incluye fundamentos teóricos sobre la enseñanza y/o aprendizaje y un diseño que se desarrolla e implementa para la intervención pedagógica; cabe señalar, tal como lo mencionan Shavelson y Towne citados por Molina et al. (2011), el diseño puede hacer referencia a artefactos, currículos o actividades.

Otro rasgo de esta metodología es que resulta significativo analizar el aprendizaje en contexto, esto es mediante el análisis continuo y retrospectivo de las maneras de aprendizaje particulares de los sujetos objeto de observación en ambientes reales, asimismo las estrategias y las herramientas empleadas para la enseñanza; es decir que en el análisis se recapitula sobre cada intervención pedagógica, en pro del perfeccionamiento del diseño para lograr un avance significativo en el aprendizaje de los estudiantes.

En este sentido, Kelly y Lesh (2000), citados por Molina et al. (2011):

> El objetivo es estudiar la naturaleza del desarrollo de las ideas, herramientas o modelos en los que están contenidos los alumnos, profesores o grupos, no generalizar sobre ellos. El foco de atención puede ser el desarrollo de los alumnos, de los docentes, de ambientes de enseñanza en el aula, o de actividades de enseñanza, entre otros aspectos.

Del mismo modo, el diseño se considera un aspecto central que fomenta el aprendizaje, pero no lo más importante; en efecto, el diseño busca crear y fortalecer conocimiento, pero su análisis impulsa el mejoramiento constante del mismo, gracias a que este análisis se hace de manera retrospectiva. De ahí que, Cobb (2003) citado por Molina et al. (2011), indique que más allá de crear diseños eficaces para un determinado aprendizaje, los estudios de diseño explican por qué el diseño funciona y sugieren modos en que puede ser adaptado a nuevas circunstancias.

En este sentido, se reitera que esta metodología va más allá del desarrollo e implementación de un diseño, tal como lo menciona Confrey (2006) citado por Audor (2016), el objetivo de los experimentos de enseñanza es reconocer:

> …qué recursos y conocimientos previos ponen en juego los alumnos en la tarea, cómo interaccionan los alumnos y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción, mediante el estudio de trabajo de los alumnos, grabaciones de videos y evaluaciones de la clase.

Igualmente, añade Audor (2016), esta metodología permite generar conocimiento de aplicación directa a la práctica y la anticipación de cómo el diseño funciona para prever situaciones y así promover el aprendizaje. Tal como dicen los autores Collins, Joseph y Bielaczyc (2004) citados por Molina et al. (2011) y por Audor (2016), se intenta optimizar el diseño tanto como sea posible y observar cuidadosamente cómo funcionan los diferentes elementos.

La investigación basada en diseño, se caracteriza por centrarse en la descripción y posterior identificación de los elementos que intervienen en la práctica pedagógica, estos elementos se consideran complejos y condicionales en virtud de que dentro de la intervención en el aula de clase, se presentan elementos y situaciones que van a ser objetos de análisis, y otros que se juzgan como accidentales, como restricciones y limitantes del contexto; de modo que, el equipo investigador requiere contar con todas las herramientas necesarias, tales como grabadora de voz, cámara fotográfica, filmadora, entre otras, con el fin de lograr capturar el estado inicial de los estudiantes, su proceso de aprendizaje con todos los elementos que lo subyacen y el estado final del aprendizaje de estos, para valorar y comparar los cambios en el aprendizaje.

3.2.1. Experimentos de enseñanza.

Esta propuesta se desarrolló bajo la metodología de experimentos de enseñanza, de acuerdo con diSessa y Cobb (2004) citados por Audor (2016), este tipo de estudios resultan de gran utilidad, puesto que estas teorías logran identificar el orden, las regularidades y los patrones de los momentos álgidos en los diferentes ambientes en que se desarrolla la investigación.

En los experimentos de enseñanza el investigador es el encargado de efectuar la intervención en el aula, es decir que el investigador es el gestor de la investigación; en esta oportunidad la autora participó como investigadora observadora, desde este rol se contribuye con apreciaciones y análisis fundamentados y soportados con evidencia.

El desarrollo metodológico guarda estrecha relación con los objetivos específicos de la propuesta, pues el equipo investigador diseñó, desarrolló y refinó sobre la marcha conjeturas acerca de la trayectoria de aprendizaje, partiendo de evidencias importantes como lo son los juicios de valor obtenidos por la observación, el registro fílmico y grabaciones de audio del desarrollo de las tareas y, la producción de los estudiantes, todo lo anterior se consiguió en la puesta en escena de la investigación.

Fundamentalmente, esta metodología tiene como objetivo investigar acerca de la esencia del desarrollo de las ideas, mecanismos o prototipos de los estudiantes y/o profesores; para ser más precisos, parafraseando las palabras de Molina et al. (2011), los experimentos de enseñanza se llevan a cabo para testar y generar hipótesis.

En primer lugar, se requiere entonces la formulación de una hipótesis, lo cual se puede hacer al inicio o durante los episodios de clase. Tales hipótesis podrán ser reformuladas en el transcurso de la investigación, a partir del análisis realizado luego de cada intervención pedagógica o por el contrario estas son abandonadas y se hace necesario formular unas nuevas. Este proceso de reformulación de hipótesis y de su reconstrucción a partir de la experimentación en el aula y el análisis de la información obtenida, suele ser recurrente y recibe el nombre de refinamiento progresivo.

Surge desde la proyección de un modelo inicial por parte del equipo investigador, el cual es susceptible a modificación súbita; los investigadores se fundamentan para la elaboración de este modelo, en teorías de su afinidad y sobre todo en su experiencia previa y en su intuición; la práctica con los estudiantes y el análisis de la información obtenida posibilita la ratificación o refutación de las hipótesis iniciales, invitando a los investigadores a emplear nuevas formas de experimentación, que resulten apropiadas para la consecución de un modelo sólido y confiable sobre el aprendizaje de los estudiantes.

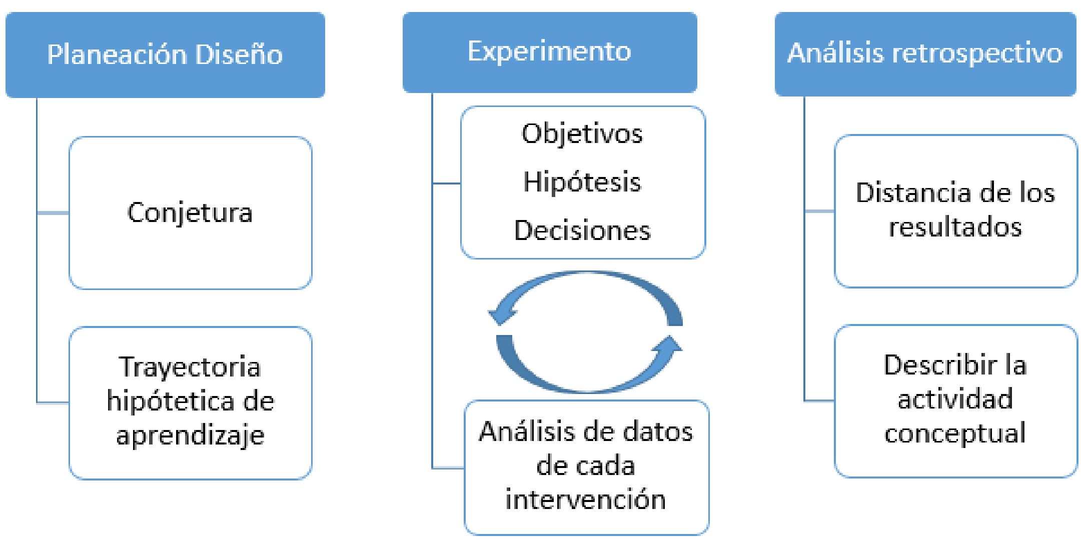
En segunda instancia, es importante para la investigación focalizar la actuación de los estudiantes y las maneras en que estos dotan de significado a los conceptos matemáticos que son objeto de aprendizaje en el diseño; es decir, los investigadores deben estar atentos a la participación de los estudiantes, en sus aportes, en las preguntas que realizan, en sus afirmaciones, en los errores que presentan, en sus formas pensamiento, etc.

Acto seguido, se presentan las interacciones analíticas, las cuales se explican desde Steffe y Thompson (2000), citados Molina et al. (2011) y por Audor (2016), como hipótesis precisas sobre los esquemas o acciones de los alumnos en las que se realiza una interacción para comparar sus acciones con acciones correspondientes a dicha hipótesis.

De acuerdo a Cobb (2003), Shavelson, Phillips, Towne y Feuer (2003), citados por Audor (2016), los experimentos de diseño son generadores, complejos, iterativos, multivariables, multiniveles, intervencionistas y orientados por la teoría y hacia la práctica. En definitiva, se tiene la expectativa que mientras los estudiantes construyen conocimiento matemático a partir del diseño que se lleva al aula, el equipo investigador genera conocimiento sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes, en virtud de la actuación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades; estos, son los factores que conducen al desarrollo y mejoramiento de las intervenciones como de las teorías.

Llegados a este punto, es preciso exhibir la Ilustración 21 en la que se hace una distinción de cada uno de las fases del experimento de enseñanza y sus elementos constitutivos

Ilustración 21 Fases de un Experimento de Enseñanza



Fuente 29 Producción propia con base en Confrey (1994), Cobb (1994) citados por Molina et al. (2011)

Generalmente un experimento de enseñanza está compuesto por tres fases a saber, la planeación, la experimentación y el análisis. Para la planeación se inicia con la conjetura, la cual se concibe como una hipótesis en la que se especifica el qué se enseña y el cómo se enseña, fundamentado en una teoría; más adelante se establece la trayectoria hipotética se aprendizaje en la que se delimitan las metas, la evolución y se diseñan las actividades. Estos tres últimos elementos se relacionan estrechamente con el antes del experimento.

La segunda fase se refiere al experimento, en el cual se contemplan tres momentos, un antes, un durante y un después; en el antes se evidencian los objetivos, las hipótesis, las decisiones y todos los elementos preliminares a la intervención, en el después se realizan los análisis locales, se resalta que en el "durante" los aspectos mencionados se retoman.

En la tercera fase, se acumula toda la información obtenida para realizar un análisis retrospectivo de la intervención, en la Tabla 9 se hace explícita cada una de las fases con sus respectivas acciones.

Tabla 9 Caracterización de las acciones correspondientes a cada una de las fases del experimento de enseñanza

Fases	Acciones
Preparación	✓ Plantear el problema y los objetivos de la investigación. ✓ Identificar los objetivos instruccionales. ✓ Identificar saberes previos. ✓ Identificar la metodología pertinente para la consecución de los objetivos de la investigación. ✓ Diseñar la situación de aprendizaje teniendo en cuenta la temporalidad de cada intervención pedagógica. ✓ Diseñar una guía para la obtención de datos. ✓ Delinear una trayectoria de aprendizaje (hipótesis y metas).
Experimentación	**Antes de cada intervención:** ✓ Elaborar las conjeturas correspondientes a cada sesión. ✓ Identificar los objetivos instruccionales de cada sesión. ✓ Seleccionar los métodos para el registro de las sesiones. ✓ Analizar la información de cada intervención y tenerla en cuenta para el re diseño de las tareas posteriores. ✓ Registrar todas las decisiones tomadas y su justificación, en la ejecución de las acciones mencionadas anteriormente.

	Durante la intervención: ✓ Registrar todo lo que ocurre en la intervención, incluyendo las modificaciones que se hagan en el momento.
	Después de la intervención: ✓ Analizar los datos recogidos luego de la intervención. ✓ Revisar y si es necesario reformular las conjeturas de la investigación y el diseño.
Análisis retrospectivo	✓ Recopilar y organizar toda la información obtenida. ✓ Analizar los datos en conjunto, esta acción implica que se tome una posición distante de los resultados obtenidos luego de cada intervención y de las conjeturas establecidas, con el fin de conseguir un análisis global acerca de la situación de aprendizaje. ✓ Identificar la ruta conceptual por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.

Fuente 30 Tomado de Audor (2016)

La información será recogida por medio de entrevistas, de observaciones de secciones de clase o de clases completas, tal como lo señalan Kelly y Lesh (2000) citados por Molina et al. (2011); es de interés para la investigadora observar el desarrollo que manifiestan los estudiantes, los profesores y/o de las actividades que se implementen.

En esta investigación, la información obtenida se obtiene a partir de registro fílmico, hojas de trabajo con los procedimientos de los estudiantes y por medio de la observación; sin embargo, de acuerdo a las finalidades de este proyecto, se prioriza el registrar la actuación de los estudiantes, el estado inicial, el proceso y el estado final de estos durante la implementación del diseño, así el discurso empleado por los estudiantes y sus producciones resultan fundamentales en el análisis de esta investigación.

Participaron en esta investigación 10 estudiantes de grado segundo a grado quinto, es importante señalar que, de los estudiantes mencionados, 6 son indígenas y 4 son mestizos, 6 son mujeres y 4 son hombres; para los análisis locales y retrospectivos de la investigación sobre los cuales se realizarán las posteriores conclusiones, se determinó una muestra mínima de 7 estudiantes, es decir aquellos de grado tercero, cuarto (no participa la estudiante con hidrocefalia) y grado quinto.

Antes de cada intervención en el aula, el equipo investigador debe realizar con prelación la conjetura del diseño, con el fin de sustentar cada actividad y al final analizar la información obtenida para posteriormente evaluar el diseño. Esta metodología permite realizar modificaciones sobre la marcha, puesto que, al implementar las actividades del diseño, estas pueden cambiar, de acuerdo a las múltiples variables que acontecen en un salón de clase, los investigadores pueden tomar la decisión de realizar modificaciones ya sea a la trayectoria de aprendizaje o al diseño propiamente, a este proceso se le conoce como refinamiento progresivo.

La metodología experimentos de enseñanza sugiere que se realicen dos tipos de análisis a saber, local y retrospectivo, sin embargo, la autora decidió adoptar el análisis a priori[9] con la finalidad de adicionar elementos que alimentan la ejecución de prácticas pedagógicas futuras. Esta decisión, lejos de estar desalineada con el cuerpo de la investigación, deja ver que este elemento de la ingeniería didáctica y la teoría de situaciones se complementan.

Entonces, el análisis local tiene por particularidad que se realiza durante la ejecución del diseño y gracias a los resultados que arroje, los investigadores deciden si realizar modificaciones al diseño y/o algunos elementos de la trayectoria de aprendizaje. Más adelante, al finalizar la implementación del diseño se realiza un análisis retrospectivo, este resulta ser un análisis general del experimento, una reflexión amplia de los análisis locales y de los resultados obtenidos con el diseño. Por su parte, el análisis a priori considera aquellas hipótesis descriptivas y predictivas acerca del proceder de los estudiantes, teniendo en cuenta diferentes variables con el fin de controlar los significados construidos.

Los resultados obtenidos provienen de una interacción particular y no se pueden generalizar, respecto a esto, Molina et al. (2011) se pronuncia y se refiere a la calidad de la información obtenida a través de los experimentos de enseñanza, diciendo que:

> …no se puede pedir que los resultados de un experimento de enseñanza sean generalizables en el sentido estricto del término. La cualidad que poseen estos resultados es la de ser explicativos y poder ser adaptados en caso de interacción con otros alumnos.

[9] El análisis a priori al que se hace referencia es tomado de la Ingeniería Didáctica.

3.3. La conjetura

Al retomar la Ilustración 21 y la Tabla 9, se recuerda que en la primera fase del experimento de enseñanza que corresponde a la planeación y diseño, de acuerdo con Confrey (1994), Cobb (1994) citados por Molina et al. (2011), afirman que hay una serie de aspectos a elaborar, la conjetura y la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Para la aplicación de esta metodología, antes de realizar el diseño de tareas se requiere que el investigador suponga las posibles maneras en las que sea factible el desarrollo de aprendizajes por parte de los estudiantes, esto se denomina como conjetura; en palabras de Confrey (2000) citado por Galeano (2015):

> …es una afirmación sobre los hechos del salón de clase que se basa en evidencias, tanto teóricas como experimentales, que recoge las creencias del equipo de investigación en relación con las formas en que se han de desarrollar los aprendizajes de los estudiantes. En particular, permite relacionarse con cómo las matemáticas deberían, para propósitos educativos, organizarse y conceptualizarse.

Así, este enunciado retoma aquellos elementos que apoyan la puesta en escena de la investigación, es decir que hace referencia a los nuevos caminos a través de los cuales se intenta acercar al estudiante a los aprendizajes matemáticos; es claro que es formulación tiene un carácter experimental, tal como lo indica el nombre de esta metodología, por lo que la conjetura no es una afirmación, sino que a través de la intervención en el aula se somete a prueba. Este sometimiento a prueba de la conjetura, implica que haya una revisión y por qué no, una reelaboración en el transcurso de la investigación, entonces dicha conjetura es quien guía el proceso de experimentación.

Dicho esto, es preciso mencionar las dos dimensiones -de contenido y pedagógica- que componen una conjetura, las cuales tienen amplias diferencias, pero están íntimamente ligadas; parafraseando a Confrey (2000) citado por Galeano (2015,)la dimensión de contenido se relaciona con el qué se debe enseñar, es decir el contenido matemático o lo aprendizaje, pero no un enunciado de temas, sino más bien como una descripción de los elementos que constituyen el espectro matemático que se va a estudiar. La dimensión pedagógica se asocia al cómo se debe enseñar dichos aprendizajes matemáticos, qué tipo de tareas se sugerirán, con qué recursos; en otras palabras, se relaciona con la planeación y la metodología del experimento de enseñanza.

Así pues, se evidencia que la conjetura visibiliza la relación existente entre la teoría y la práctica pedagógica, por tanto, se requiere una mirada cuidadosa a la literatura de la investigación puesto que la conjetura determina y ajusta la pregunta problema, direcciona la implementación, los métodos y la recolección de datos y finalmente el análisis posterior.

3.4. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Luego de establecer la conjetura, el experimento de enseñanza exige que se establezca una trayectoria hipotética de aprendizaje, estos dos elementos de la metodología están interrelacionados, puesto que la trayectoria identifica las metas de aprendizaje y aquellas maneras en las que el proceso de enseñanza puede ser realizado y, la conjetura sugiere una descripción de las maneras en las que se espera discurra el aprendizaje.

En la trayectoria hipotética de aprendizaje es una intervención planeada en un periodo de tiempo dentro de un salón de clases, determina cómo se desarrollará el aprendizaje de los estudiantes, cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes puede transformarse con las actividades propuestas, es decir la evolución. Para hacer la formulación, se precisa de la conjetura en sus dos dimensiones. En esta dirección, nótese que la trayectoria está compuesta como una red ordenada de constructos en la que intervienen variables como: actividades, tareas, herramientas, maneras de interacción en clase y métodos de evaluación.

3.5. Cronograma

En la Tabla 10 se exhibe el cronograma de las fases de diseño, implementación y análisis de la investigación.

Tabla 10 Cronograma de actividades

<table>
<tr><th colspan="7">Cronograma Situación Didáctica</th></tr>
<tr><th colspan="2">Actividades</th><th>Diseño</th><th>Implementación</th><th>Análisis local</th><th>Análisis retrospectivo</th><th>Evaluación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Diagnóstico</td><td>Mes 1</td><td>Mes 1</td><td>Mes 1 y 4</td><td rowspan="12">Mes 6 y 7</td><td>Mes 1 al 7</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Situación 1</td><td>Tarea 1</td><td rowspan="5">Mes 1 y 2</td><td rowspan="5">Mes 1 y 2</td><td rowspan="5">Mes 2 y 3</td><td rowspan="11">Constante, permanente, formativa y sistemática</td></tr>
<tr><td>Tarea 2</td></tr>
<tr><td>Tarea 3</td></tr>
<tr><td>Tarea 4</td></tr>
<tr><td>Tarea 5</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Situación 2</td><td>Tarea 1</td><td rowspan="6">Mes 3 y 4</td><td rowspan="6">Mes 3 y 4</td><td rowspan="6">Mes 4 y 5</td></tr>
<tr><td>Tarea 2</td></tr>
<tr><td>Tarea 3</td></tr>
<tr><td>Tarea 4</td></tr>
<tr><td>Tarea 5</td></tr>
<tr><td>Tarea 6</td></tr>
</table>

Fuente 31 Producción propia

CAPÍTULO 4. Diagnóstico, diseño e implementación de la situación didáctica

Este capítulo se divide en tres partes, en la primera parte se presenta la caracterización, metodología y el análisis de los resultados de la aplicación del instrumento diagnóstico, junto a una tabla que valora el nivel de visualización y razonamiento que demuestra el estudiante al desarrollar cada ítem de la prueba, cabe señalar que dicha tabla también es utilizada en los análisis (local y retrospectivo) expuestos en el capítulo 5; luego, en la segunda parte se revelan los aspectos inherentes a la fase de preparación de la situación de didáctica, esto es, la conjetura y la trayectoria de aprendizaje; finalmente, se presentan las acciones dentro del aula y la descripción de las tareas que componen la situación didáctica.

Los siguientes apartados obedece a la organización por fases, presentada en los objetivos específicos. En la sección de anexos se exhibe el formato de la prueba diagnóstica y el conjunto de tareas que conforman la situación didáctica ARTEmbera.

4.1. Fase 1: diagnóstico de los estudiantes

En primer lugar, se realizó el diseño de una prueba diagnóstica con la finalidad de caracterizar a los estudiantes acerca de qué tanto visualizan y razonan matemáticamente al resolver situaciones problema del componente geométrico, en las que interviene específicamente las figuras y las transformaciones geométricas. Es importante que antes de diseñar la situación didáctica, se identifiquen los conocimientos previos de los estudiantes, sus errores comunes y sus obstáculos epistemológicos.

Para diseñar la prueba, se realizó una búsqueda ardua de situaciones problema que hacen referencia a aspectos geométricos básicos, a las transformaciones geométricas y a las relaciones de simetría y congruencia en las cartillas digitales de las diferentes pruebas externas nacionales, como Prueba Saber, Supérate y Aprendamos; algunas de las preguntas se modificaron con la finalidad de hacer la consigna más amigable.

4.1.1. Instrumento de diagnóstico.

Se diseñó un recurso que consta de un compendio de preguntas de pruebas estandarizadas, tales ítems se organizaron en dos niveles por conjunto de grados, es decir que hay un bloque de preguntas para los grados segundo - tercero (tres de segundo y dos de tercero para un total de cinco estudiantes) y un bloque restante para los grados cuarto – quinto (un estudiante de cuarto y cuatro de quinto para un total de cinco estudiantes).

Algunas consignas han sido modificadas con la finalidad de ser más explícitas y/o con el propósito de presentarlas a los estudiantes de manera más amigable. Cada una de las preguntas que ha sido seleccionada se ha escogido de acuerdo a los intereses de esta investigación, en la Tabla 11 se observa la distinción de cada una de las preguntas del bloque tercero, es decir que se presentan las preguntas asociadas a los determinados estándares del componente espacial.

Tabla 11 Distinción de preguntas Prueba Diagnóstica bloque Segundo – Tercero

Estándares		**Derechos básicos de aprendizaje V2**		**Preguntas asociadas**
Grados		**Grados**		
1° a 3°	Reconozco nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.	1°	DBA#6 Compara objetos del entorno y establece semejanzas y diferencias empleando características geométricas de las formas bidimensionales y tridimensionales (Curvo o recto, abierto o cerrado, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros).	1, 4, 5
			DBA#7 Describe y representa trayectorias y posiciones de objetos y personas para orientar a otros o a sí mismo en el espacio circundante.	6, 7, 11
			DBA#6 Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones entre las formas	2, 3, 4, 5, 8

Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.	2°	bidimensionales y tridimensionales.	
		DBA#7 Describe desplazamientos y referencia la posición de un objeto mediante nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en la solución de problemas.	6, 7, 9, 10, 11
	3°	DBA#6 Describe y representa formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con las propiedades geométricas.	1, 2, 3, 4, 5, 9, 10
		DBA#7 Formula y resuelve problemas que se relacionan con la posición, la dirección y el movimiento de objetos en el entorno.	7, 6, 8, 11

Fuente 32 Producción propia con base en los Estándares, Derechos básicos de aprendizaje V2 y las preguntas de la Prueba diagnóstica

En el mismo sentido, en la Tabla 12 se ha hecho la distinción de las preguntas del bloque Cuarto – Quinto de la Prueba diagnóstica.

Tabla 12 Distinción de preguntas Prueba Diagnóstica bloque Cuarto – Quinto

Estándares		**Derechos básicos de aprendizaje**		**Preguntas asociadas**
Grados	Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños. Comparo y clasifico figuras bidimensionales	**Grados**	DBA#6 Identifica, describe y representa figuras bidimensionales y tridimensionales, y establece relaciones entre ellas.	9, 10
		4°	DBA#7 Identifica los movimientos realizados a una figura en el plano respecto a una posición o eje (rotación, traslación y simetría) y las modificaciones que	5, 6, 8, 11

4° a 5°	de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. Utilizo sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.	5°	pueden sufrir las formas (ampliación- reducción).	
			DBA#6 Identifica y describe propiedades que caracterizan un cuerpo en términos de la bidimensionalidad y la tridimensionalidad y resuelve problemas en relación con la composición y descomposición de las formas.	1, 2, 4, 7, 9, 10
			DBA#7 Resuelve y propone situaciones en las que es necesario describir y localizar la posición y la trayectoria de un objeto con referencia al plano cartesiano.	3

Fuente 33 Producción propia con base en los Estándares, Derechos básicos de aprendizaje V2 y las preguntas de la Prueba diagnóstica

4.1.2. Estrategia metodológica para la prueba diagnóstica.

Los estudiantes se organizaron en mesas de trabajo, de la misma manera en la que reciben sus clases. Se explicó que se iba a desarrollar una actividad para ver qué tanto sabían los estudiantes sobre geometría; no se mencionó que iban a ser evaluados, esto con el fin de no generar variables que afecten los resultados y propiciar que los estudiantes participaran libremente sin temor al error; la profesora repitió al auditorio que lo interesante es que se realice la actividad de manera individual, para que cada uno sea responsable de su resultado y sepa qué es lo que sabe y qué es lo que necesita aprender.

Se entregó la prueba a cada estudiante de acuerdo a su grado escolar, la profesora leyó cada consigna sin explicar a profundidad, solo se limitó a hacer aclaraciones en la acepción de palabras usadas en la redacción de la consigna y no en términos de los conocimientos disciplinares para resolver el problema, ni explicó el registro figural que acompañaba la consigna.

No se realizaron preguntas orales personalizadas ni dirigidas al grupo, ni se limitó el tiempo, esto con la finalidad de que los niños independientemente del grado tuvieran la oportunidad de responder a partir de su individualidad, sin que se contaminara su pensamiento con las opiniones de los demás compañeros y para que la autora de la investigación pudiese obtener datos limpios para caracterizar a los estudiantes.

Las dos estudiantes con necesidades educativas especiales no participan en esta actividad por su condición cognitiva, pues ninguna sabe leer.

4.1.3. Instrumento de análisis.

En la Tabla 13 que presenta ciertos criterios alrededor de la visualización y el razonamiento, con la que se categorizó los ocho estudiantes de acuerdo a sus respuestas en el diagnóstico; en un segundo momento, por medio de gráficos estadísticos se analizaron las respuestas de los estudiantes y se dan las conclusiones correspondientes a la caracterización. De esta manera, gracias al diagnóstico se obtuvo un conjunto de datos que permiten dar una serie de conclusiones respecto a los resultados.

Tabla 13 Criterios de avance alrededor de la visualización y el razonamiento

Valoración de los procesos cognitivos asociados a la geometría: visualización y razonamiento.			
Objetivo de aprendizaje: el estudiante será capaz de resolver situaciones relacionadas con las transformaciones geométricas, haciendo uso de las competencias de visualización y razonamiento matemático			
Aspectos a evaluar	**Criterios de avance**		
Entrada icónica y no icónica a la visualización	**No icónica.** Reconoce las figuras de manera global, sus elementos constitutivos y propiedades geométricas.	Algunas veces su atención se centra en el contorno de la figura, sin embargo trata de apreciar los elementos constitutivos y las propiedades geométricas.	**Icónica**. Su observación siempre es estática y se dirige solo al contorno de las figuras. No aprecia los elementos constitutivos ni las propiedades de las figuras.

Niveles de visualización	**Nivel operatorio de precepción visual.** Reconoce en el movimiento y las transformaciones un procedimiento de resolución de problemas.	**Nivel de percepción de los elementos constitutivos.** Mirada geométrica hacia los elementos constitutivos, distinguiendo relaciones y propiedades geométricas.	**Nivel global.** Reconoce formas, contornos, figuras prototípicas, posición, cercanía y vecindad.
Tipos de aprehensión	**Aprehensión operatoria.** Realiza modificaciones a la figura para resolver un problema, agregando y/o eliminando elementos y manipulando los elementos constitutivos.	**Aprehensión discursiva** Genera afirmaciones matemáticas con un dibujo que le acompañe. Relaciona las características de la figura y el enunciado. Asocia una figura a un discurso al desarrollar la actividad propuesta en un enunciado.	**Aprehensión perceptiva.** Solo observa aquello que la figura deja ver a primera vista. Reconoce señales y/o marcas del contorno e identifica elementos que corresponden a formas conocidas.
Razonamiento configural	Genera un discurso alrededor de un registro figural, vinculado cognitivamente a las modificaciones realizadas a la figura para encontrar la solución.		A pesar que reconoce el registro figural, no asocia un discurso coherente de acuerdo a las modificaciones realizadas a la figura geométrica.

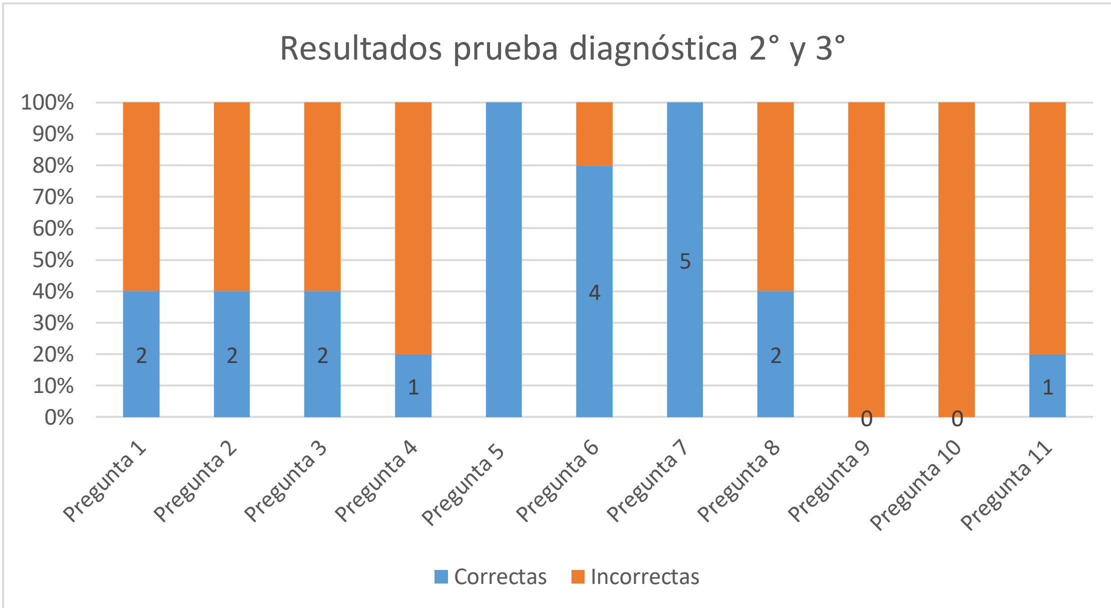
Fuente 34 Producción propia con base en la teoría semiótica que desarrolló el psicólogo Raymond Duval

4.1.4. Resultados y análisis del diagnóstico.

Durante el diagnóstico se observó que los niños de grado segundo presentaron inconvenientes de diferente naturaleza para desarrollar la prueba; en primer lugar, sus procesos de lectura y escritura son regulares, así que la lectura fue muy pausada y esto hizo que se tomaran más del tiempo previsto (85 minutos); en segundo lugar, fue difícil para ellos responder a preguntas con opción múltiple y algunas veces no tenían el conocimiento disciplinar para resolver el problema.

En la Ilustración 22 se presenta un gráfico en el que se especifica el porcentaje de estudiantes que respondieron correcta e incorrectamente cada pregunta.

Ilustración 22 Resultados de la prueba diagnóstica en estudiantes de grados 2° y 3°



Fuente 35 Producción propia con base en los resultados de la Prueba diagnóstica de segundo y tercero

Al revisar la prueba diagnóstica se aprecia que los cinco niños y niñas tienen una suerte de experticia para diferenciar posiciones como arriba, abajo, derecha e izquierda de una figura dada, siempre y cuando tengan las imágenes de muestra, por eso todos respondieron acertadamente la pregunta 7 y la gran mayoría respondió correctamente la pregunta 6; empero, si tienen que ubicar una figura en cualquiera de las posiciones anteriormente nombradas haciendo un movimiento mental, el proceso es complejo, tal como se evidenció en la pregunta 11 en la que sólo un estudiante de cinco, contestó correctamente. Con lo anterior se indica que la mayoría de los estudiantes se encuentran en un nivel de visualización global.

Algunos distinguen los elementos básicos de una figura, como el número de lados, pero no pueden establecer comparaciones entre figuras, como se ve en la pregunta 1. La mayoría de estudiantes tienen dificultad para determinar algún elemento en un patrón o serie geométrica, pues solo dos estudiantes de cinco contestaron correctamente la pregunta 8; finalmente ningún estudiante respondió correctamente a las preguntas 9 y 10, en las que se debe reconocer elementos constitutivos de la figura por medio de su denominación formal.

En suma, se advierte que la mayoría de los estudiantes se encuentran en la entrada icónica de la visualización.

A pesar que, este conjunto de grados no es objeto de análisis en esta investigación, se realiza la actividad diagnóstica a los cinco estudiantes de grado segundo y tercero, y posteriormente se analiza la información obtenida con el instrumento de criterios de avance de la Tabla 13, puesto que, al ser ARTEmbera un proyecto de matemática y emprendimiento consolidado en la sede, se espera que los datos y el análisis mencionado nutran la propuesta del próximo año.

En la Tabla 14 se expone la categorización de cada ítem de la prueba diagnóstica de 2° y 3° en la competencia que corresponde. Nótese que la columna izquierda hace referencia a las once preguntas planteadas a los estudiantes, la siguiente columna se denomina competencias y se compone de visualización y razonamiento, finalmente las dos últimas columnas categorizan las respuestas como correctas e incorrectas.

Tabla 14 Competencia a la que pertenece cada ítem de la prueba de 2° y 3°

No. de ítem	**Competencias**		**Respuestas correctas**	**Respuestas incorrectas**
	Visualización	Razonamiento		
1		X	2	3
2	X		2	3
3		X	2	3
4		X	1	4
5	X	X	5	0
6	X	X	4	1
7	X		5	0
8	X	X	2	3
9	X		0	5
10	X		0	5
11	X	X	1	4

Fuente 36 Producción propia con base en los resultados de la prueba diagnóstica

En la interpretación de la Tabla 14, se entiende que el primer ítem contiene la competencia razonamiento y que sólo dos estudiantes acertaron en sus respuestas; en los ítems número cinco y seis, se observa que están inmersas ambas competencias y que en los resultados la totalidad de estudiantes acertó en el ítem cinco y cuatro de uno acertaron en el ítem seis.

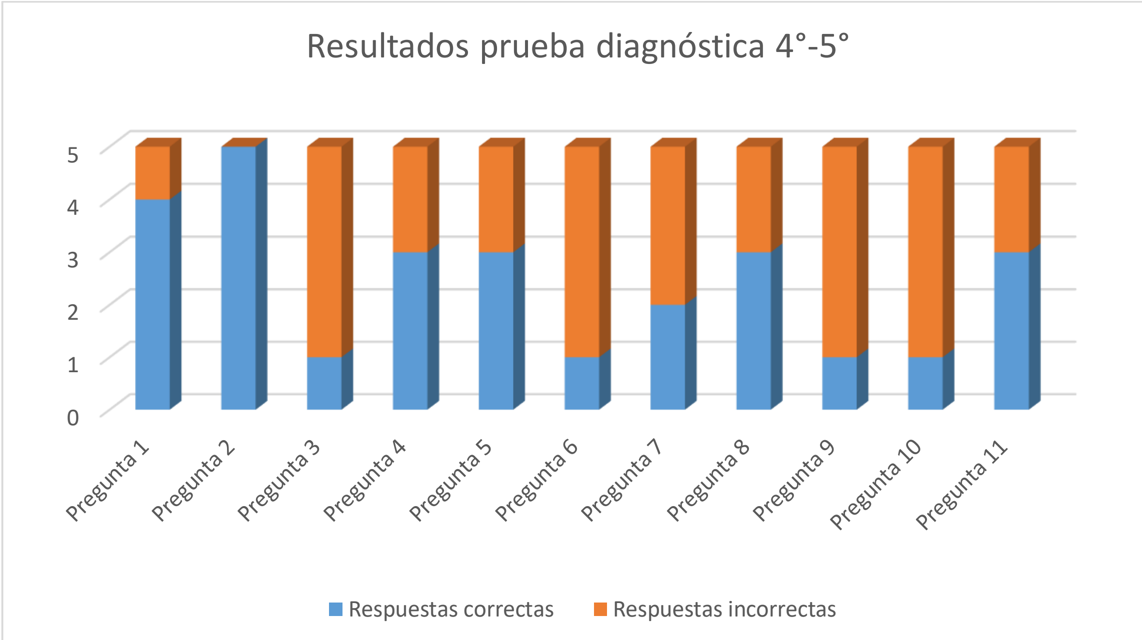
En síntesis, de la Tabla 14 se concluye que de once preguntas de la prueba ocho tienen relación con la visualización, de las cuales solo el 47.5% de los ítems fueron respondidos correctamente por la mayoría; mientras que, de las once preguntas propuestas siete tienen relación con el razonamiento, de las cuales solo el 48% de las preguntas fueron acertadas por la mayoría.

Hasta aquí, se observa que el porcentaje de respuestas correctas de los cinco estudiantes de segundo y tercero que corresponden a la visualización y al razonamiento son similares; se afirma de manera general, que los estudiantes se encuentran en una entrada icónica a la visualización, puesto que la mayoría de las veces, la atención se centra en el contorno de la figura y pocas veces se aprecian los elementos constitutivos y las propiedades geométricas. Llegados a este punto, se da por finalizado el análisis de la prueba de los estudiantes de grado segundo y tercero.

Ahora bien, en la prueba realizada a los cinco estudiantes de grado cuarto y quinto se evidenció que los niños y niñas están habituados a responder preguntas con opción de respuesta múltiple, esto debido a la experiencia con las pruebas externas, tardaron entre 25 a 40 minutos en realizar la prueba; especialmente las tres estudiantes que pertenecen a la comunidad indígena, tuvieron dificultades con las acepciones de las palabras polígono, simetría, ángulos, región, paralelos y pieza, por lo que la profesora explicó a cada estudiante las definiciones de esas palabras sin entrar a profundizar.

La Ilustración 23 presenta los resultados de los estudiantes en la prueba.

Ilustración 23 Resultados de la prueba diagnóstica en estudiantes de grados 4° y 5°



Fuente 37 Producción propia con base en los resultados de la Prueba diagnóstica de cuarto y quinto

De acuerdo a la Ilustración 23, se observa que la mayoría de estudiantes respondió correctamente las dos primeras preguntas, ubicándose en la primera entrada de visualización básica, en la que el contorno de la figura es quien brinda la mayor información; un gran número de desaciertos se presentaron en la pregunta número 3, en la que es de interés establecer la ubicación de un objeto respecto a otro; en la pregunta 4, algunos estudiantes presentan dificultad para ubicar elementos en el plano cartesiano, aunque la mayoría reconoce formas prototípicas y contornos, lo cual permite que se afirme que los estudiantes tienen una visualización icónica

La pregunta 5, deja ver que el 40% de los estudiantes se encuentran en un nivel de aprehensión perceptual pues observaron la figura a primera vista, mientras que el otro 60% demostró, en este caso, una aprehensión operatoria porque manipularon los elementos constitutivos de la figura al terminar la simetría que se pidió en la consigna.

Aunque la pregunta 6 es similar, cuatro estudiantes no pudieron visualizar un eje de simetría a partir de un pliegue para hallar la figura resultante al hacer el doblez.

Al parecer, la pregunta 7 requiere un nivel cognitivo mínimo puesto que hace referencia a un elemento constitutivo de la figura, sin embargo, la mayoría de los estudiantes no acertaron, tal vez porque no conocen o confunden el concepto de ángulo recto. En la pregunta 8 el 60% de los estudiantes acertaron, sin embargo, para algunos es difícil visualizar las ampliaciones y las reducciones de la figura, observar la cuadrícula y usarla como herramienta de validación al contar unidades.

La pregunta 9 causó gran dificultad entre los estudiantes, pues requiere que se realice movimientos con imágenes mentales para construir y dividir la región; igualmente la pregunta 10 obtuvo un gran número de desaciertos, por un lado, la convención que se usa para asignar el patrón de medida puede causar confusión, pues los estudiantes en algunas ocasiones deben realizar movimientos mentales para inferir que cierta porción de la figura se puede solapar con el patrón; por otro lado, los estudiantes ignoran que pueden darle un uso a la cuadrícula en la que está dibujada la figura, visualizando que un cuadrado es dos veces el patrón y de esa manera agilizar el conteo.

Finalmente, los resultados de la pregunta 11 permiten que se aprecie la coherencia en los conocimientos que los estudiantes demuestran, al realizar ampliaciones y reducciones, pues tanto la pregunta 11 como la 8 obtuvieron un alto número de aciertos.

En la Tabla 15 se expone la categorización de cada ítem de la prueba diagnóstica de 4° y 5° en la competencia y con los resultados que les corresponde.

De manera semejante a la Tabla 14, en la Tabla 15 se deduce que el primer ítem gravita en la competencia visualización y que cuatro estudiantes de cinco acertaron en sus respuestas; por ejemplo, en los ítems número cinco, diez y once se observa que tanto la visualización como el razonamiento están presentes.

Tabla 15 Competencia a la que pertenece cada ítem de la prueba de 4° y 5°

No. de ítem	**Competencias**		**Respuestas correctas**	**Respuestas incorrectas**
	Visualización	Razonamiento		
1	X		4	1
2	X		5	0
3		X	1	4
4	X		3	2
5	X	X	3	2
6	X		1	4
7	X		2	3
8	X		3	2
9	X		1	4
10	X	X	1	4
11	X	X	2	3

Fuente 38 Producción propia con base en los resultados de la prueba diagnóstica

En cuanto a la información presentada en la Tabla 15, se concluye que de once preguntas de la prueba diagnóstica diez corresponden a la visualización, de las cuales cinco, es decir el 50% fueron contestadas correctamente por la mayoría de los estudiantes; mientras que, de los once ítems de la prueba cuatro se relacionan con el razonamiento, de los cuales solo el 35% fue respondido acertadamente por la mayoría de los estudiantes. De estos resultados se puede decir que los cinco estudiantes de grados cuarto y quinto presentan disparidad en sus aprendizajes geométricos y sobre todo nótese que la mitad de la muestra demostró tener ciertas habilidades para la visualización, pero sólo el 35%, menos de la mitad, demostró habilidades en el razonamiento. A su vez, en estos resultados también se evidencia que alcanzar niveles de razonamiento matemático es un proceso más complejo que la visualización.

Finalmente, la competencia visualización de los estudiantes se encuentra en un nivel básico, no se observa que haya fortaleza en las aprehensiones discursivas y operatorias, por tanto, se concluye que los estudiantes carecen de razonamiento configural.

Con las anteriores conclusiones, se da por cumplido el primer objetivo específico que corresponde a la denominada fase 0, en la que se diagnostica el nivel de visualización y razonamiento de los estudiantes de 3°, 4° y 5° de la sede José María Carbonell, al resolver situaciones en las que intervienen las transformaciones geométricas.

4.2. Fase 2: preparación al diseño

A continuación, se presenta la conjetura y la trayectoria hipotética de aprendizaje del diseño en general; más adelante, se exhiben cada una de las situaciones con su conjunto de tareas, descripciones y sus respectivas conjeturas. De esta manera, el lector evidencia que se cumple con el segundo objetivo específico que corresponde a la fase 1, la cual hace referencia al diseño de una situación didáctica en la que se favorece las actividades cognitivas de visualización y razonamiento en el aprendizaje de las transformaciones geométricas al elaborar pulseras indígenas con patrones físicos y en GeoGebra.

Conjetura: la elaboración de una propuesta de enseñanza de la geometría escolar debe considerar por un lado los criterios cognitivos, es decir, las exigencias que la actividad geométrica requiere de quien aprende y, por otro lado, el reconocimiento del capital cultural de los estudiantes.

Dimensión del contenido: en el desarrollo del pensamiento espacial en básica primaria urge atender la representación de las figuras geométricas bidimensionales, sus transformaciones y relaciones; a su vez requiere el uso del discurso para expresar propiedades, formular, defender argumentos y resolver problemas en tareas auténticas.

Dimensión pedagógica: las actividades cognitivas que direccionan esta investigación son la visualización en el nivel operatorio de percepción visual y el razonamiento en el estudio de diferentes operaciones discursivas propias del discurso geométrico, a partir del empleo de patrones y del telar para la elaboración de pulseras en mostacilla como instrumentos principales.

Se aclara que la elaboración de pulseras en mostacilla es una actividad propia de los Embera, sin embargo, los niños indígenas de la sede no conocían la técnica de tejido de mostacillas, por lo que surgió ARTEmbera como una propuesta de integración de los saberes de la comunidad a la escuela, como una oportunidad para integrar a las familias y de prolongar tradiciones étnicas; más adelante se convirtió en el proyecto de emprendimiento de la sede y finalmente, desde el año 2018 hasta la actualidad se concibe como un recurso para el aprendizaje de la matemática.

Así que, con anterioridad a la implementación de la situación didáctica, la profesora ha enseñado a los estudiantes el proceso para tejer las pulseras en mostacilla checa, actualmente los estudiantes son habilidosos reproduciendo patrones de pulseras desde otra pulsera y algunos más avanzados desde un patrón bidimensional, pero, no tienen conocimiento sobre cómo generar patrones.

Trayectoria hipotética de aprendizaje:

Meta: Favorecer los procesos cognitivos de visualización y razonamiento desde su estado inicial, a través de un conjunto de actividades sobre transformaciones geométricas, el empleo de patrones y telares en la elaboración de pulseras en mostacilla.

Actividades: construcción de patrones físicos y en GeoGebra por medio de transformaciones geométricas para la elaboración de pulseras en mostacilla.

Tareas: de reproducción, de descripción y de construcción.

Herramientas: fichas de trabajo, patrones, telar, mostacillas de colores, aguja de pelo, hilo aptan, colores, tijeras, tabletas, televisor, GeoGebra, computador y video beam.

Formas de interacción en clase: juegos grupales, socialización en mesa redonda y discusión.

Métodos de evaluación: seguimiento al proceso de aprendizaje de cada estudiante por medio de la observación directa, entrevistas y de la valoración de la producción en las fichas de trabajo.

4.3. Fase 3: diseño de la Situación Didáctica ARTEmbera

4.3.1. Acciones dentro del aula.

En este apartado se aborda de manera breve los tres momentos que corresponden a las acciones que se deben llevar a cabo dentro del aula, puesto que, para el diseño de la situación didáctica, de estas acciones se han tomado elementos importantes que se destacan en cada una de las tareas propuestas.

Cabe señalar, que esta mirada pedagógica se encuentra avalada por el MEN, de acuerdo al formato de plan de aula publicado en diferentes páginas de la web y divulgados en las instituciones públicas por el Programa Todos a Aprender PTA.

Así pues, el primer momento es la exploración, el cual hace referencia a las actividades que motivan a los estudiantes, permiten tener consciencia de los saberes previos y propician la apropiación del discurso. Activados los conocimientos previos, se ejecuta la situación, hecho que permite el segundo momento que recibe el nombre de estructuración, resultado de las reflexiones alcanzadas por los estudiantes y que más adelante se convierten en conceptualizaciones; a su vez, se desarrolla la temática a partir de EBC, los DBA y las evidencias de la matriz de referencia. Finalmente, el momento de transferencia se refiere a la socialización para la posterior valoración de los aprendizajes y procesos.

4.3.2. Descripción de las tareas Situación Didáctica ARTEmbera.

4.3.2.1. Situación 1. Coordenadas cartesianas de las mostacillas.

Conjetura: en una pulsera, al denotar una mostacilla como un punto en el plano cartesiano para construir figuras, se potencia la competencia de visualización.

Dimensión del contenido: la ubicación de puntos en el plano cartesiano para la construcción de patrones de pulseras, facilita la comprensión de las transformaciones y brinda herramientas para mejorar el discurso matemático.

Dimensión pedagógica: A partir del empleo de patrones geométricos físicos y digitales, se desarrolla la actividad matemática con múltiples representaciones, acercando al estudiante a la visualización.

En la tarea 1 la actividad que realiza el estudiante es de tipo exploratorio, se propone la participación de estudiantes de segundo a quinto, el objetivo es conocer los saberes previos de los participantes y a partir de allí generar un diálogo grupal entre todos los estudiantes y profesora, en el que se expresen sus explicaciones y se defiendan posturas; a su vez, se realiza la caracterización formal de los elementos matemáticos que se mencionan.

En la tarea 2 se propone una actividad de exploración – estructuración mediada con GeoGebra con los estudiantes de segundo a quinto; en esta oportunidad, los estudiantes manipulan objetos geométricos con relación a las pulseras Embera Chamí, a través de un ambiente de geometría dinámico. El objetivo es que los estudiantes conozcan el plano cartesiano, los ejes, las unidades, interactúen graficando puntos bajo una consigna dada y exploren la caja de herramientas del software.

En la tarea 3 se plantea una actividad de estructuración mediada por GeoGebra con estudiantes de tercero a quinto. En un primer momento, se muestra un patrón realizado en GeoGebra y se pide a los estudiantes que completen los números que corresponden a las unidades de medida de los ejes x y y, luego, se sugiere señalar algunas coordenadas y decir el color correspondiente de la mostacilla. En esta tarea, por un lado, interesa que los estudiantes comprendan que las mostacillas en los patrones se pueden denotar como coordenadas de un plano cartesiano y, por otro lado, se constata si los estudiantes comprendieron el aprendizaje que se pretende movilizar.

La tarea 4 es una actividad de estructuración, en la que los estudiantes de tercero a quinto completan una ficha de un patrón incompleto (de manera intencionada se ha eliminado cierta parte del patrón), para esto los estudiantes deben demostrar conciencia de que cada punto en el plano cartesiano representa una mostacilla de la pulsera y viceversa; a su vez, los estudiantes demuestran una suerte de dominio sobre la visualización de patrones, esto es, ser capaz de identificar cuál es la serie que se repite y desde qué línea. Esta tarea se realiza de manera individual y más adelante se orienta hacia el diálogo en parejas acerca de los diseños que resultaron a partir de la acción de completar los patrones. Finalmente, esta actividad es la introducción de un juego que se propone en la próxima tarea.

La tarea número 5 es de transferencia para la validación de los aprendizajes y se relaciona estrechamente con la tarea anterior, puesto que se utiliza la ficha que se trabajó en la tarea 4, luego de verificar que se encuentre correcta y/o luego de corregir en caso de presentar un error; se propone entonces el juego del Espejo, para el cual los estudiantes de tercero a quinto, deben organizarse en parejas y seguir las instrucciones dadas. Jugar Espejo permite que los estudiantes expongan su trabajo anterior, lo comparen con el trabajo de su compañero(a), argumenten sus respuestas, negocien y decidan cuál es la propuesta correcta y, por último, aprueben las respuestas que se consideren acertadas por medio de una puntuación.

4.3.2.2. Situación 2. Construcción de figuras a través de transformaciones geométricas (traslaciones y rotaciones).

Conjetura: la construcción de patrones físicos y digitales utilizando las transformaciones geométricas permite que los estudiantes accedan a un nivel de orden superior en la visualización y en consecuencia en el razonamiento.

Dimensión del contenido: en el aprendizaje de la traslación y rotación es imprescindible que quien aprende, pueda realizar movimientos a las figuras de manera física, digital y con representaciones mentales.

Dimensión pedagógica: las actividades cognitivas que direccionan esta investigación son la visualización en el nivel operatorio de percepción visual y el razonamiento en el estudio de diferentes operaciones discursivas propias del discurso geométrico, a partir del empleo de patrones y del telar para la elaboración de pulseras en mostacilla como instrumentos principales.

La tarea 1 que se propone en la situación 2 gravita en la exploración guiada en GeoGebra. En esta tarea se muestra la opción de punto y segmento de la caja de herramientas, se solicita a los estudiantes que ubiquen tres puntos en el plano, se unen los puntos y se obtiene un triángulo, se comprueba por medio del arrastre de cada punto si la figura se mantiene o no. Luego se muestra la opción “polígono” y se solicita a los estudiantes de tercero a quinto, que construyan un polígono de tres puntos. Se explica cómo quitar la etiqueta de un elemento. Más adelante, se arrastra cada punto y se comprueba si la figura se mantiene o no. El objetivo es que los estudiantes comprendan que mover una figura geométrica implica que todos sus elementos constitutivos también se mueven.

En la tarea 2 participan los estudiantes de tercero a quinto y se les propone dos tipos de actividades, las cuales se categorizan en exploración y estructuración. En un primer momento, el estudiante utiliza el plano cartesiano físico para construir una figura congruente a otra dada, de manera que todos los pares de puntos homólogos se ubiquen a la misma distancia; a su vez, se plantean una serie de preguntas que orientan al estudiante a descubrir y comprender la relación de traslación. Por otro lado, se les solicita a los estudiantes abrir un archivo de GeoGebra, luego se procede a explicar el procedimiento para aplicar la transformación de traslación, después se sugieren unas preguntas que se responden en las parejas del plan padrino.

Las actividades de la tarea 3 gravitan en la exploración y estructuración. En la primera parte se retoma la tarea anterior, puesto que se sugiere que se complete un patrón físico por medio de aplicar traslaciones a una figura dada; después se invita a los estudiantes de tercero a quinto, completar un patrón físico con movimientos que no sean traslaciones, así, a través del descubrimiento y la práctica los estudiantes se acercan a la transformación de rotación. En la segunda parte, se indica el proceso de realizar rotaciones en GeoGebra y se proponen unas preguntas que luego se socializan en Asamblea de aula.

En la tarea 4 la acción que orienta la actividad es la transferencia. Se propone a los estudiantes de tercero a quinto, analizar a través de preguntas orientadoras, un patrón que contiene una secuencia de tres giros de 90° hacia la derecha. Los siguientes ítems sugieren que los estudiantes realicen procedimientos físicos y mentales, para contestar las preguntas, más adelante se realiza socialización por medio del Correo de la amistad.

La tarea 5 se compone de actividades de transferencia para la validación de aprendizajes. Se solicita a los estudiantes de tercero a quinto, conformar grupos de trabajo para analizar una pulsera y determinar las transformaciones que se les aplicó a las figuras para conseguir el patrón. Después, a través de la Asamblea de aula se socializan los planteamientos de cada grupo.

Finalmente, la tarea 6 moviliza una actividad de transferencia para la valoración de aprendizajes. Se propone a los estudiantes de tercero a quinto, participar en una muestra de ARTEmbera, en la que cada estudiante elabora un diseño creativo en GeoGebra, aplicando transformaciones a figuras y utilizando las diferentes herramientas del software.

CAPÍTULO 5. Análisis de la investigación

En este capítulo se realizan tres tipos de análisis a saber, a priori, local y retrospectivo, los cuales se complementan y alimentan los resultados de la investigación, obedeciendo al quinto objetivo específico; así, los siguientes apartados resultan de la mayor importancia, pues en ellos se revela el desempeño de los estudiantes al desarrollar las tareas, los aprendizajes adquiridos y la evidencia que soporta las afirmaciones planteadas.

Ahora bien, el primer análisis es el a priori y se refiere a la reflexión previa a la ejecución de las actividades; el siguiente recibe el nombre de análisis local y alude a las consideraciones realizadas a partir de la obtención de datos luego de la intervención para su posterior revisión, de ser necesario, es válido reformular las conjeturas de acuerdo con el protocolo de la metodología "experimentos de enseñanza"; el último análisis es el retrospectivo y corresponde a la recopilación y organización de toda la información obtenida, para analizar los datos en conjunto, esta acción implica que se tome una posición distante de los resultados obtenidos luego de cada intervención y de las conjeturas establecidas, con el fin de conseguir un análisis global acerca de la situaciones didáctica, cumpliendo así con el quinto objetivo específico.

5.1. Análisis a priori de las tareas

Este análisis es independiente de la experiencia, se intenta poner de manifiesto, ciertos conflictos de significado que potencialmente podrían manifestar los estudiantes, prever algunas variables que posiblemente afecten el desarrollo satisfactorio de las tareas por parte de los niños y niñas, en términos de dificultades con la redacción de la consigna, dificultad con los recursos utilizados, carencia de los pre saberes necesarios para abordar la actividad, obstáculos cognitivos, errores, preguntas de los estudiantes, etc., con la finalidad de que la profesora investigadora adquiera más herramientas para conducir la clase de manera efectiva.

Se inicia con el análisis a priori del conjunto de cinco tareas que componen la situación 1 "Coordenadas cartesianas de las mostacillas" y, por último, se entrega al lector el análisis a priori de las seis tareas que conforman la situación 2 "Construcción de figuras a través de transformaciones".

Ahora bien, la tarea 1 de la situación 1 requiere que los estudiantes se sientan motivados para trabajar en grupo y para asumir el rol que les correspondió, en caso de que el grupo no sea receptivo para este tipo de trabajo se recomienda realizar una actividad recreativa tipo rompe hielo que anime a los estudiantes; a su vez, es necesario que los estudiantes no se sientan evaluados, pues se estaría limitando la expresividad de cada uno. Normalmente los estudiantes responden a los nombres de las figuras geométricas básicas, es decir cuadrado, circulo, triángulo y rectángulo, pero, es necesario que en la mediación la profesora realice explicaciones y permita que los estudiantes construyan sus significados. Se puede presentar el caso en que un estudiante no pueda distinguir ninguna figura geométrica en un diseño de pulsera, en ese caso la profesora debe propiciar que los compañeros del grupo interactúen de manera que se brinden explicaciones entre sí.

En la tarea 2 se hace uso de recursos tecnológicos, esto es tabletas, computadores portátiles y Smart Tv, es necesario que con antelación los dispositivos se carguen y se confirme el buen funcionamiento tanto de los equipos como de GeoGebra; de igual manera que en la tarea anterior, se debe motivar a los niños a experimentar, compartir sus ideas y generar un espacio de diálogo. Es importante que la profesora disponga de suficiente tiempo para que los estudiantes exploren el software y no confundan la manera correcta de enunciar una coordenada cartesiana. A partir de esta tarea no participan los estudiantes de grado segundo porque aún no han terminado su proceso de lecto-escritura.

La tarea 3 requiere que los estudiantes diferencien los ejes X y Y que conforman el plano cartesiano. Se debe motivar al estudiante en participar de manera activa, propositiva, crítica y arrojado para dar sus explicaciones. Es posible, que sea necesario recordar a los estudiantes lo importante que es saber escuchar y, sobre todo, la manera correcta en la que se nombra la coordenada de un punto. Es posible que los estudiantes presenten dificultades para comprender qué es el tendido[10], también, es probable que los estudiantes ignoren a qué se

[10] La expresión "el tendido" se refiere a la estructura en hilo que se asegura a la base al iniciar el tejido de una pulsera Embera Chamí.

refiere la consigna cuando menciona la palabra línea para enumerar cada fila de mostacillas. En esta tarea, en la parte final se propone una actividad evaluativa a modo de juego, se prevé que persuada a los estudiantes hacia la corroboración de aprendizajes.

En la tarea 4, los estudiantes pueden presentar dificultad para identificar los colores de los puntos en la fotocopia, por eso la profesora debe asegurarse de que los colores se puedan diferenciar. Adicional a esto, el plano cartesiano que se entrega puede causar confusión porque solo se perciben los números pares en los ejes. Lo más seguro es que los estudiantes repitan toda la porción del patrón sobre la línea libre, es decir que realicen el patrón de la línea cero a la línea once, desde la línea doce. Se recomienda que, por medio de preguntas se lleve al estudiante a descubrir que las líneas cero y uno son las mismas líneas nueve y diez; en consecuencia, en la línea doce se debe colorear las mostacillas de la línea tres, en la línea trece se colorea las mostacillas de la línea cuatro y así sucesivamente. Es conveniente que la próxima tarea se presente a modo de juego.

La tarea número 5 es el juego del Espejo, se requiere que ambos jugadores hayan completado correctamente el patrón de la tarea 4. A pesar de que las instrucciones del juego estén escritas en la consigna, es necesario que la profesora explique cada paso y de ser posible presente un ejemplo. Es importante que se le dé puntos a quienes hayan acertado y a quienes hayan presentado errores en el juego; asimismo, que entre la pareja de estudiantes corroboren las puntuaciones entre sí. La intención es que el juego termine en un empate o en resultados no tan alejados, para así garantizar que el equipo de estudiantes no se encuentra dispersos en sus aprendizajes.

Por su parte, la tarea 1 de la situación 2 inicia con una serie de instrucciones para realizar diferentes tipos de figuras, eventualmente los estudiantes pueden tener dificultades para entender palabras desconocidas, como por ejemplo colineales, además de no estar habituados con el uso de la opción polígono y es posible que haya dificultad para dar clic en el punto preciso y generar el arrastre. Es importante que la profesora promueva el uso del arrastre, verifique que todos los estudiantes avancen en la actividad y oriente la socialización de los aprendizajes desde el Correo de la amistad, pues es un instrumento potente y es importante darle funcionalidad en la Escuela Unitaria.

En la tarea 2 la profesora debe recordar a los estudiantes la manera correcta de ubicar los puntos y de realizar el polígono en GeoGebra; al completar el patrón físico, se tiene que algunos estudiantes probablemente ubiquen la flecha superponiendo una porción de la figura sobre la otra. En el punto 3 y 4, se introduce a los estudiantes a generar movimientos de figuras, es aquí en donde se pone a prueba la operatividad de las representaciones mentales y la capacidad de trasladar la representación de un lugar a otro; es posible que los estudiantes desconozcan la acepción de la palabra homólogo y vector, por eso es importante que la profesora genere un espacio de conversación al respecto; más adelante, por medio de preguntas orientadoras se lleva a los estudiantes al descubrimiento de propiedades y relaciones geométricas. Luego, al indicar la manera de aplicar traslaciones en GeoGebra, los estudiantes eventualmente siguen las instrucciones de manera desordenada, lo cual les impide obtener los resultados esperados.

La tarea 3 retoma las traslaciones y más adelante reta al estudiante a mover la figura a través de un movimiento diferente, es importante que el estudiante no se encasille con la traslación, sino que explore otro tipo de movimientos. Después, se indica el proceso para aplicar rotaciones a figuras, en este momento se debe dar especial atención a los estudiantes porque suelen aplicar la rotación en otro punto centro, con un ángulo diferente y en una dirección contraria.

En la tarea 4 se inicia exhibiendo una secuencia de tres giros de 90° a una figura predeterminada, suele suceder que se presente algún estudiante que le sea imposible imaginar la posición de la figura en el cuarto giro de 90°, por lo que se recomienda usar diferentes objetos físicos que giren de manera similar. El desarrollo de las preguntas permite el análisis y la construcción de significados; se sugiere el trabajo en grupo, el uso del Correo de la amistad, libertad para explorar el software y el espacio para la socialización.

En la tarea 5 los estudiantes reciben pulseras elaboradas en ARTEmbera y deben ser capaces de visualizar y razonar sobre las transformaciones geométricas que se aplicaron a ciertas figuras para generar el patrón. Los aprendizajes obtenidos en las tareas anteriores, brindan herramientas que posibilitan a los niños y niñas a emplear en sus intervenciones un discurso formal, utilizando un lenguaje matemático para sus explicaciones, argumentaciones y demostraciones; por esta razón, es pertinente que en Asamblea de aula se motive a los estudiantes a participar en conjunto de manera activa. De esta manera, se inicia con la evaluación de los aprendizajes.

Finalmente, se intenta recoger todos los aprendizajes movilizados en las tareas que componen las dos situaciones aplicadas. Al proponer una feria de emprendimiento en la tarea 6, los estudiantes se sienten motivados en participar, disfrutan de la actividad y expresan creatividad, para la profesora es una oportunidad para evaluar los aprendizajes y el proceso de cada estudiante. Es importante resaltar a los participantes, que tienen total libertad en el uso de las herramientas de GeoGebra para construir el patrón de la pulsera.

5.2. Fase 4: análisis locales

Llegados a este punto, se destaca que la investigación se encuentra en la fase 2 y que se cumplió con el tercer objetivo específico, el cual se refiere a la Implementación de la situación didáctica en la sede José María Carbonell con los estudiantes de 3°, 4° y 5° de primaria. De igual manera, se precisa que los estudiantes de grado 2° participan en la implementación de la situación didáctica, pero los estudiantes objeto de análisis son aquellos que cursan grado 3°, 4° y 5°.

Ahora bien, al finalizar cada intervención se tomó las producciones de los estudiantes (fichas de trabajo), los registros de la profesora (observaciones directas) y las grabaciones (de la clase en general y de entrevistas en particular) para realizar los análisis locales. La mirada se centró en la evolución del discurso de los estudiantes, su desempeño al resolver situaciones que impliquen las transformaciones geométricas, el avance en la visualización y el razonamiento y, por último, la evaluación de las conjeturas planteadas. Los estudiantes, particularmente los indígenas presentan dificultades en sus procesos de lectura y escritura del idioma español, al parecer por ser el Embera su lengua materna, por esta razón, se debe prestar especial atención al realizar la lectura de sus producciones escritas.

En algunos apartados se recurre a la transcripción de fragmentos de video de clase, con el fin de hacer explícitas aquellas situaciones de interés en la intervención de aula y, en otros casos se exhiben algunas imágenes destacadas de las producciones de los estudiantes. Por lo cual, es necesario conocer las siguientes convenciones, que de manera respetuosa brindan información al lector para caracterizar a los estudiantes.

E1: estudiante grado quinto (mestizo)
E2: estudiante grado quinto (indígena, extra edad)
E3: estudiante grado quinto (indígena, extra edad)
E4: estudiante grado quinto (mestiza, repitente)
E5: estudiante grado cuarto (indígena)
E6: estudiante grado tercero (indígena)
E7: estudiante grado tercero (mestizo)
P: profesora (investigadora)

5.2.1. Análisis local Situación 1 Coordenadas cartesianas de las mostacillas.

5.2.1.1. Tarea 1.

Al analizar el desarrollo de esta actividad, la primera impresión es que generó incomodidad entre los estudiantes el hecho de sentirse grabados[11], por lo que fue necesario que la profesora explicara los motivos de la grabación diciendo:

> *P: …es importante que realicemos la actividad con naturalidad y que nos olvidemos de la cámara. Me gustaría que por favor me ayuden. Esta grabación es muy importante para todos, porque yo la voy a revisar y voy a mirar qué cosas hacemos muy bien y qué cosas debemos mejorar".*
> Minuto 2:17 al minuto 2:35 Situación 1 Tarea 1

A su vez, la profesora dirigió algunas actividades recreativas, de rompehielo y de conformación de equipos, con lo que consiguió que los estudiantes estuviesen animados y listos para seguir las indicaciones de la tarea 1.

La segunda impresión que se tuvo en la implementación de esta tarea, fue la sorpresa en los estudiantes, al parecer, porque ellos no están habituados a responder preguntas matemáticas alrededor de las pulseras, pues su participación en el proyecto ARTEmbera sólo se limitaba a la duplicación de pulseras y a reproducción de patrones para su posterior venta y/o muestras en ferias de emprendimiento.

[11] Con anterioridad la profesora dialogó con los padres de familia para obtener la autorización de los representantes de los menores, les explicó la importancia de los registros de imagen y voz para esta investigación académica sin ánimo de lucro.

Ilustración 24 Diálogo en grupo de trabajo A

Fuente 39 Imagen propia

Ilustración 25 Diálogo en grupo de trabajo B

Fuente 40 Imagen propia

Ilustración 26 Intervención del grupo B

Fuente 41 Imagen propia

La organización en grupos de trabajo no convencionales, permitió que los estudiantes participaran espontáneamente, se atrevieran a intervenir en la asamblea de aula sin temor al error (tal como se había previsto en el análisis a priori) y que la profesora pudiese hacer las respectivas devoluciones. Adicionalmente, se observó que al conformar equipos de trabajo con estudiantes de diferentes grados escolares, por un lado los niños de grado quinto y cuarto asumieron una actitud líder para explicar a los demás compañeros y para hacer las intervenciones en la asamblea; por otro lado, los estudiantes de grado tercero permanecieron con una actitud de escucha y tuvieron confianza para dialogar en el equipo de trabajo, sin embargo, no tuvieron iniciativa para intervenir en la asamblea de aula (ver Ilustraciones 24, 25 y 26).

En el desarrollo de la actividad, se registró que los estudiantes reconocen las figuras geométricas básicas como cuadrados y triángulos, pero no explican con qué criterios los clasifican.

También, se registró la intervención que realizó un estudiante de grado quinto, en la que refiere observar rombos en la pulsera, figura que para el resto de compañeros es desconocida, por lo que varios estudiantes manifestaron dudas. Para ilustrar la situación anterior, se muestra el siguiente diálogo que se categoriza como anticipación y negociación.

> *E1: en esta pulsera yo veo que hay muchos colores y de allí se forman rombos, por fuera y por dentro.*
> *E2: ¡yo no entiendo qué es un rombo!*
> *E1: un rombo es una figura como un cuadrado, mire este (señala), si ve que es como <u>puntudo arriba y abajo</u>.*
> *E5: sí veo, ¿puede ser puntudo para los lados?*
> *E1: eh… Sí, también (mientras voltea la pulsera).*
> Minuto 27:03 al minuto 27:26 Situación 1 Tarea 1

En esta conversación el estudiante E1 explica qué es un rombo, primero lo compara con un cuadrado, al parecer por su calidad de cuadrilátero y/o por ser una figura que a su consideración es cercana a su auditorio; luego, le da la característica *puntuda arriba y abajo*, lo cual indica que E1 desconoce que el rombo es un paralelogramo que tiene un par de ángulos mayor al otro par. Se destaca que E1 usa como estrategia manipular la pulsera, es decir "moverla" para hacerse entender a su compañero.

En la conversación se aprecia que E1 realiza una intervención considerada anticipación en tanto acción de descubrimiento; a su vez, E5 participa diciendo:" *sí veo, ¿puede ser puntudo para los lados?"*, obsérvese que ha comprendido la información anterior cuando dice "*sí veo"* y cuando pregunta "*¿puede ser puntudo para los lados?"* lanza un interrogante que modifica cuya respuesta posiblemente modifique un aprendizaje.

Ilustración 27 Imagen de pulsera entregada en fotocopia

Fuente 42 Imagen de la web

Ahora bien, cuando los estudiantes observan la fotocopia de la imagen de la pulsera (ver Ilustración 27), identifican figuras y voltean la imagen para observarla desde diferentes ángulos, mientras que, cuando los estudiantes tenían en sus manos la pulsera, lograron referirse a las relaciones entre figuras porque se atrevieron a manipular la pulsera, por ejemplo E1 y E3 doblaron la pulsera e hicieron afirmaciones como*: "…esta figura como pirámide es la misma que esta, pero volteada…", "…las puntas de la estrella son como triángulos en todos los lados de la estrella , son pequeños y son iguales, son ocho en todo alrededor…"*

En la primera afirmación, se nota que gracias a la observación el estudiante logra concluir que las dos figuras que él denomina como pirámide son iguales y al emplear la palabra *volteada*, deja ver su consciencia respecto al movimiento de figuras y la congruencia. En la segunda afirmación, el estudiante reconoce la igualdad de triángulos por su forma y tamaño, pero no visualiza el movimiento de una figura alrededor de otra. Es claro que, tanto E1 como E3, presentan ciertas habilidades que los destacan de los demás compañeros, y que les permite "ver" lo que otros no pueden ver.

5.2.1.2. Tarea 2.

Al iniciar la actividad se observó que los estudiantes demostraron estar motivados a escuchar las indicaciones de la profesora, al parecer, porque notaron que para el desarrollo de la tarea se utilizarían tabletas, computador y televisor.

En un primer momento, se entregó tabletas a siete estudiantes y tres portátiles a los tres restantes; luego, la profesora indicó la manera de ingresar a GeoGebra dirigiendo la actividad desde el televisor, mostró el plano cartesiano y explicó sus elementos, y, enfatizó en la manera que se denotan los puntos como una coordenada cartesiana; después, se atendieron las anticipaciones de los estudiantes, se realizó la socialización grupal con la participación de estudiantes voluntarios (como se ve en la Ilustración 28), en donde los niños ubicaron puntos dadas las coordenadas y determinaron las coordenadas dados los puntos.

Ilustración 28 Estudiantes de grado 2° y 3° proyectando su exploración en GeoGebra

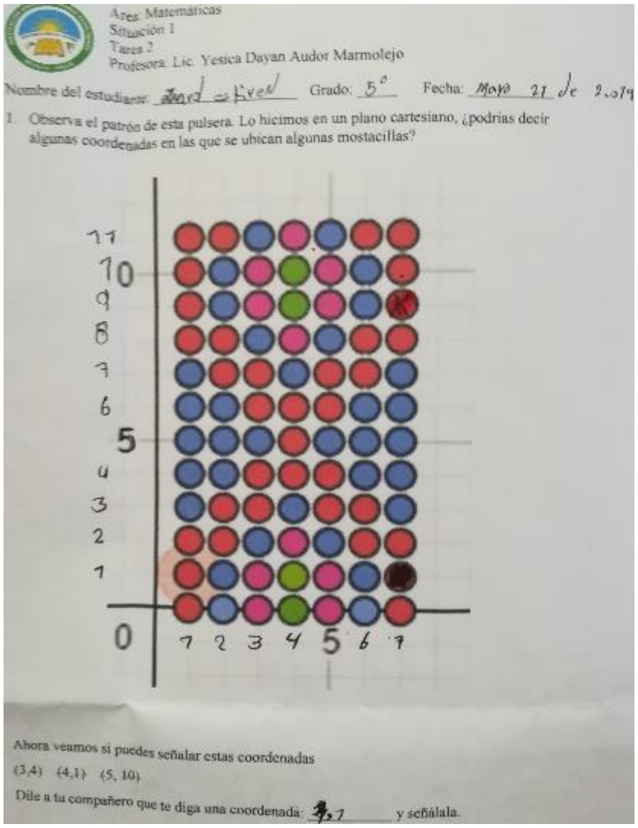
Fuente 43 Imagen propia

Finalmente, en los últimos doce minutos de la clase, se invitó a los niños a conocer la caja de herramientas del software, es decir, leer las ayudas de cada opción y atreverse a usar las herramientas. Algunos realizaron puntos, líneas y polígonos; otros se atrevieron a hacer paisajes y siluetas humanas; la mayoría exploró la configuración del objeto construido y jugó con la selección de colores, grosores y estilos.

En el desarrollo de la actividad, se observó que los estudiantes no tienen habilidad para controlar el puntero en el Touchpad ni en la pantalla de la tableta, al parecer, por la alta sensibilidad de los dispositivos y por la poca costumbre de uso, lo cual ocasionó que algunos estudiantes tardaran más que otros en la interacción con el software; esta variable no se tuvo en cuenta en el análisis a priori, empero constituye un aspecto relevante para la implementación de las próximas tareas.

5.2.1.3. Tarea 3.

Ilustración 29 Mostacillas de una pulsera como coordenadas cartesianas



Fuente 44 Producción de estudiante

En el desarrollo de la tarea 3 se observó que los estudiantes no tuvieron dificultad al leer la consigna, todos se mostraron apropiados del significado grupal de las palabras *tendido* y *línea*, esto por la experticia que tienen en la elaboración de pulseras en mostacillas; pero, algunos estudiantes confundieron los números que corresponden a cada eje, por ejemplo, cuando se les pide señalar la mostacilla de coordenada (3,4), algunos estudiantes señalaron la coordenada (4,3) porque confunden el eje vertical como el eje *x* y el eje horizontal como el eje *y*, y porque olvidan que la pareja ordenada es de la forma (*x*, *y*) y no (*y*, *x*).

En este punto, es preciso situarse en la última actividad que propone la tarea (ver la Ilustración 30), aquí, se le pidió al estudiante conformar parejas, preguntar a su compañero(a) cinco coordenadas y registrar los aciertos y desaciertos.

Ilustración 30 Juego para valorar el aprendizaje

Ahora, dile a tu compañero que te diga cinco coordenadas: ____________________ y señálalas.

¿Cuántos aciertos tuviste? _____________ ¿Cuántos desaciertos? ________________

Fuente 45 Tomado de la tarea 3

En este juego los estudiantes participaron en un proceso de validación de aprendizajes, en un primer momento ubicaron una mostacilla de acuerdo a una coordenada dada por su compañero, después admitieron ser evaluados por su par, negociaron para validar una respuesta, y luego registraron los aciertos y desaciertos.

La profesora refinó la tarea durante la intervención, pues sobre la marcha notó que a los estudiantes les gusta la competencia, así que, les sugirió que pidieran a su compañero no cinco coordenadas como dice el enunciado de la tarea, sino diez coordenadas; también, indicó que por cada acierto los estudiantes recibirían cinco puntos.

En la Tabla 16, se presentan los resultados que obtuvieron los estudiantes.

Tabla 16 Entrevista a estudiantes participantes en el juego de la Tarea 3

Grupo	Estudiante	Resultados	Observaciones
A	E1	50	El estudiante refiere sentirse cómodo con la actividad, dice ser tan rápido que ubica la coordenada con la mirada, sin utilizar los dedos.
	E3	50	La estudiante manifiesta sus deseos por repetir la ronda, está convencida que puede ganarle a su compañero.
B	E2	45	La estudiante expresa algunas coordenadas le quedaron mal porque confunde el eje x y el eje y.
	E7	30	El estudiante dice que algunas coordenadas le quedaron mal porque confunde el eje x y el eje y.
C	E4	50 50	La estudiante jugó contra E5 y luego contra E6, en ambos juegos obtuvo 50 puntos y comenta que la actividad fue fácil.
	E5	45	La estudiante refiere equivocarse porque ubica mal la coordenada, ella reconoce los ejes del plano, pero olvida que la pareja ordenada es de la forma (x, y) y no (y, x).
	E6	45	La estudiante expresa ser distraída.

Fuente 46 Producción propia a partir de las entrevistas a estudiantes y los registros de los puntajes

Se observa que E1, E2, E3, E4, E5 y E6 demuestran destreza para ubicar puntos, pues fueron los estudiantes que obtuvieron los puntajes más altos en el juego, con este hecho se afirma que el desarrollo de las dos primeras tareas, han influido en el avance de los aprendizajes. E7 es el estudiante que obtuvo el resultado más bajo, ella manifiesta que tuvo los desaciertos por falta de concentración y no por no haber comprendido la coordenada cartesiana, en la próxima tarea se constará esta afirmación.

La actividad involucró a los estudiantes en el juego, ellos aceptaron el problema, se apropiaron e intentaron resolverlo. Se destaca que no se presentaron conflictos y que la alta motivación de los estudiantes, al parecer es porque la profesora utilizó una entonación enérgica para invitar a los estudiantes a una competencia enfatizando en la expresión "*¿quién va a ganar?"*

Es importante resaltar que se recibieron comentarios positivos por parte de los estudiantes acerca de sus impresiones, se registró comentarios *como "…en esta tarea se aprende mientras juega…"*, *"…me gustan los juegos en clase de matemática…"* y *"…me gustó jugar con mi compañero…"*. También, algunos estudiantes indígenas manifestaron *"…nos gusta aprender matemáticas con cosas de nosotros…"*

El anterior aspecto cobra una importancia significativa que la investigación no tuvo en cuenta, pues gracias a las preguntas realizadas por la profesora durante la intervención, la evaluación no se quedó en el tinte tradicional, sino que trascendió hacia la evaluación para la comprensión y para la emancipación, pues se impulsó a los estudiantes a plantear valoraciones personales acerca de la actividad. Esta cuestión se tuvo en cuenta para las próximas tareas.

Finalmente, se destaca que esta tarea puso a prueba la visualización de los estudiantes, esta tarea permitió que los estudiantes pudiesen *ver* el patrón de una pulsera en un plano cartesiano, esto les hizo vivir de manera particular el vínculo inseparable de la matemática y el arte.

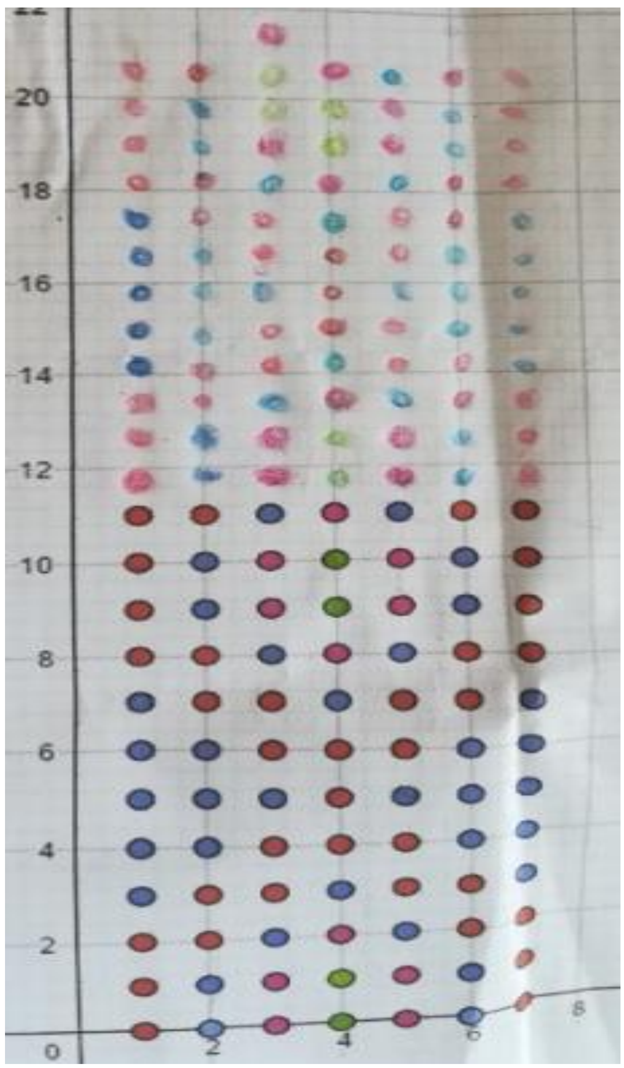
5.2.1.4. Tarea 4.

En esta tarea se pide completar un patrón incompleto, se observó que los estudiantes para desarrollar la actividad utilizaron dos maneras para completar el patrón.

La primera manera es la estrategia denominada A, empleada por el 71,42% de estudiantes (cinco de siete), esto es, tres estudiantes de grado quinto y dos de tercero. En la Ilustración 31 se exhibe a modo de ejemplo, la producción de un estudiante de grado quinto en la que se observa que repitió la línea cero en la línea once, es decir que la línea conformada por las mostacillas ubicadas en (1,0), (2,0), (3,0), (6,0) y (7,0), se repiten sobre la línea doce. Por esta razón, la mostacilla roja ubicada en (1,12) es roja como la ubicada en (1,0), la mostacilla verde en (4,0) es la misma de (4,12) y la mostacilla azul de (6,0) es la misma de (6,12).

Se observa también, que como no completó los valores impares que le faltaban al eje *y*, realizó unas líneas adicionales que no corresponden con los números del eje.

Ilustración 31 Estrategia A



Fuente 47 Producción de estudiante de 5°

En suma, en esta estrategia se aprecia que los estudiantes repiten la porción visible del patrón, a partir de la siguiente línea disponible, solo se preocupan por completar sin evaluar el sentido (formas artísticas) del patrón.

En entrevista a E6, se le pidió que explicara su proceso para completar el patrón, él mencionó que:

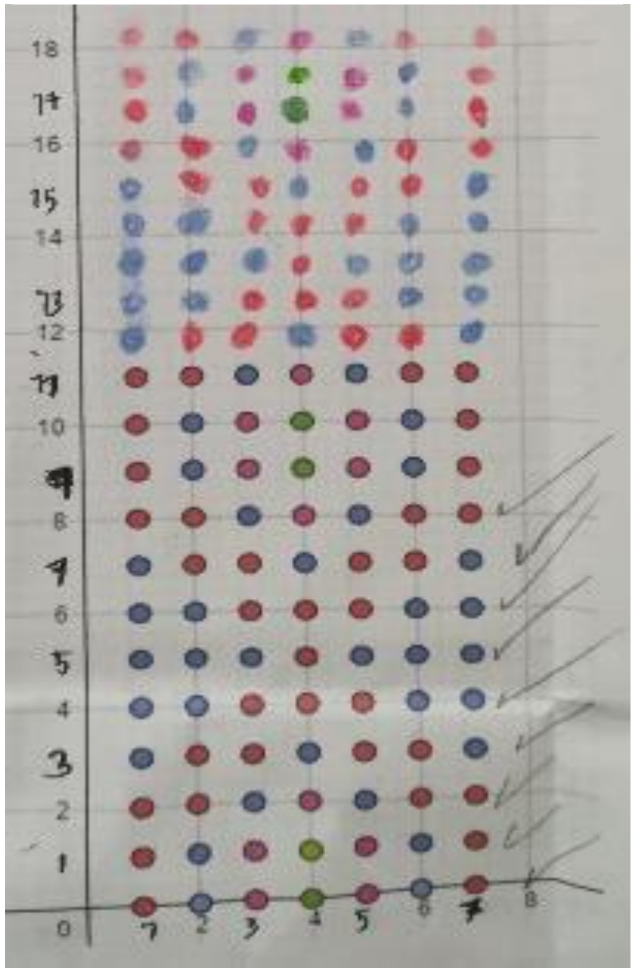
> *P: ahora vamos a mirar la ficha del patrón incompleto, incompleto porque aquí en la fotocopia hay un pedazo de los puntos del patrón, y tú con la ayuda del plano cartesiano, debías completar los otros puntos que faltaban. Entonces, ¿cómo hiciste esto?*
> *E6: mirando esta línea (señala línea que pasa por el punto 1 del eje x) que va de acá (señala el punto (1,0)) a acá (señala punto (1,11)), por eso estas tres pepas rojas (refiriéndose a los puntos (1,0), (1,1) y (1,2)), se repiten acá (señala los puntos, cinco azules (señala los puntos ubicados en (1,3), (1,4) y (1,5), (1,6) y (1,7)), los pongo acá (señala los puntos ubicados en (1,15), (1,16) y (1,17), (1,18) y (1,19)). Y así con las demás líneas.*
> *P: tú miraste la línea 1 del eje x y la repetiste tal cual como empezaba acá hasta el límite final.*
> Minuto 33:20 al minuto 34:13 Situación 1 Tarea 4

Esta es una manera diferente de ver el tejido, E6 identifica las líneas a repetir enumerándolas sobre el eje *x* y no sobre el eje *y*, lo cual resulta extraño porque la profesora siempre enumera el tendido sobre el eje *y*.

De acuerdo a la Tabla 13, la observación de E6 es estática y la dirige a sectores por separado, no aprecia los elementos constitutivos de la figura, por tanto, el estudiante se ubica en la entrada icónica de la visualización.

La segunda manera es la estrategia B, utilizada por el 28,57% de los estudiantes, esto es dos de siete, los cuales cursan grado quinto y cuarto. Para ejemplificar, en la Ilustración 32 se muestra que, para completar el patrón, la línea que se repite en la línea doce es la tres; por tanto, la mostacilla (1,3) es azul como la mostacilla ubicada en (1,12), (4,0) es igual que (4,12), (7,0) es igual que (7,12), etc.

Ilustración 32 Estrategia B



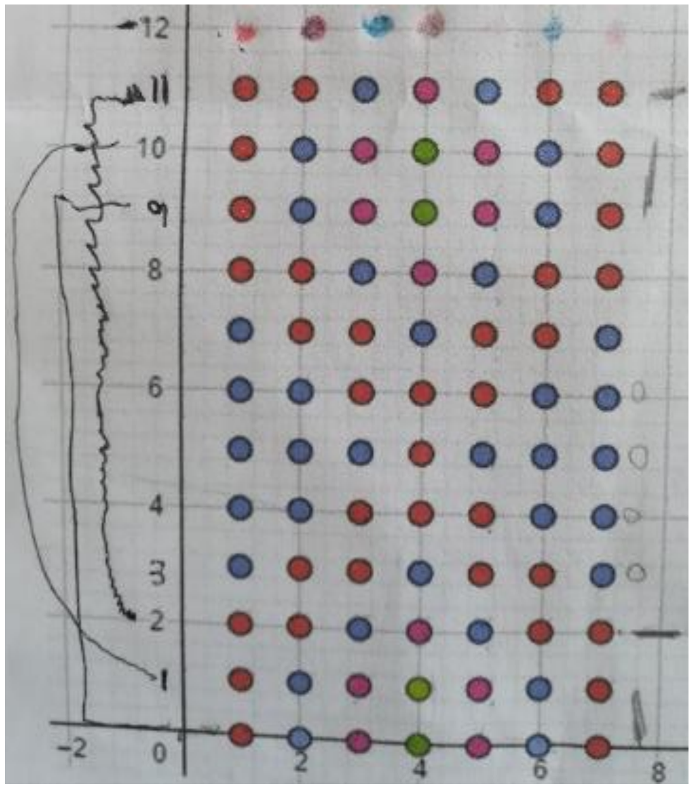
Fuente 48 Producción de estudiante de grado 5°

De los estudiantes que tomaron esta alternativa para completar el patrón, se entrevistó a E1 y se le pidió que explicara cómo desarrolló la actividad.

> *P: vamos a revisar tu patrón incompleto, ¿cómo hiciste para pintar estas mostacillas?*
> *E1: lo estuve mirando desde abajo y como estaba más hacia arriba, vi que tenía tres líneas de abajo que ya estaban completas, entonces tocaba seguir con el resto. Es que estas dos (señala líneas 0 y 1) son las mismas que estas (señalas 9 y 10), las reconocí por los puntos verdes y esta (señala la línea 3), es la misma que esta (señala la línea 11). Entonces tenía que pintar de la 4 para arriba.*
> Minuto 36:41 al minuto 37:13 Situación 1 Tarea 4

Se aprecia que E1 (igual que E5, como se verá más adelante) tiene la capacidad de tener una mirada amplia, no estática. Según la Tabla 13, el estudiante se ubica en la aprehensión discursiva, pues genera afirmaciones matemáticas relacionando las características de la figura y el enunciado, es decir asociando una figura a un discurso.

Ilustración 33 Explicación de estudiantes de grado 4°



Fuente 49 Producción de estudiante

En la socialización, E5, una de las estudiantes que usó la estrategia B, realizó una explicación a sus compañeros en la que estableció relaciones entre las líneas del tendido, su producción se muestra en la Ilustración 33 y en el siguiente párrafo se transcribe un fragmento de la explicación.

> *E5: ...yo completé el patrón* <u>*mirando*</u> *la forma que va a tener la pulsera, yo veo que la línea cero es la misma línea nueve, mire (señalando las mostacillas de la línea cero) rojo, azul, fucsia, verde, fucsia, azul y rojo, las mismas que acá (señala línea nueve). Y la línea uno es la línea diez,* <u>*comprueben*</u> *los colores y verán, la línea dos es la línea once, y ¿qué queda?, pues* <u>*que la línea que se debe pintar en la doce es la línea tres, la cuatro se pinta en la trece, la cinco en la catorce y así mismo las demás.*</u>
> Minuto 32:05 al minuto 32:40 Situación 1 Tarea 4

De esta explicación llama la atención que el estudiante emplea la palabra *mirando*, para referirse a una acción de ver el todo, incluso imaginando la porción faltante. Más adelante, invita a sus compañeros a *comprobar* la estrategia, esto les permite auto valorar sus aprendizajes y corregir de ser necesario. Por último, cuando dice "*…la línea que se debe pintar en la doce es la línea tres, la cuatro se pinta en la trece, la cinco en la catorce y así mismo las demás*", el estudiante previamente concatena una serie de afirmaciones que descubrió paulatinamente, permitiéndole llegar a la mencionada conclusión. Por lo anterior, E5 se ubica en la aprehensión discursiva.

En la actividad no hubo dificultad con los colores usados en los puntos, pero sí con los ejes del plano cartesiano porque sólo mostraba los números pares. Tal como se previó en el análisis a priori, la mayoría de los estudiantes repitieron toda la porción del patrón sobre la línea libre, es decir que realizaron el patrón de la línea cero a la línea once, desde la línea doce en adelante.

5.2.1.5. Tarea 5.

Se inicia diciendo que la totalidad de estudiantes es siete, así que al pedir que conformen parejas, resultaron dos y un grupo de tres. La profesora explicó el juego y a manera de ensayo se realizó una ronda. No se registraron preguntas de los estudiantes, pero sí comentarios de estudiantes interesados en conocer el por qué se le dan puntos a quien se equivocara, a lo que la profesora respondió diciendo que era importante para el aprendizaje valorar el trabajo de todos, incluso de los que fallaran. Este acontecimiento da luces a una futura investigación en torno a la Gamificación.

Al analizar el desarrollo del juego del Espejo, se percibe que la comprobación es la manera en que la pareja de estudiantes valida las coordenadas cartesianas de la ubicación de las mostacillas, y gracias a este hecho, se evidencia que los estudiantes son competentes porque han adquirido los aprendizajes y los utilizan en situaciones de la vida real, en este caso, un juego.

Ilustración 34 Estudiantes jugando Espejo

Fuente 50 Imagen propia

Algunas veces la profesora tuvo que mediar porque los estudiantes no se pusieron de acuerdo en definir el color de la mostacilla ubicada en una coordenada particular, pues cada uno defendía su postura; ante esta situación, la profesora decidió exponer el caso ante el grupo, para que de manera colectiva se tomara una decisión. Esta eventualidad no se tuvo en cuenta en el análisis a priori, sin embargo, en la intervención de aula la profesora actuó con naturalidad y resolvió la situación.

La mayoría de estudiantes expresó que les gustó la actividad por ser un juego y otros, mencionaron que les había llamado la atención el hecho de que las tareas se hilaban en un orden secuencial, es decir que se utilizaba el producto de la tarea anterior para el desarrollo de una tarea.

Se observó que la mayoría de equipos obtuvo en el juego un resultado total similar. A continuación, en la Tabla 17 se presenta el registro de resultados de la pareja A conformada por un estudiante de quinto y uno tercero, la pareja B que la compone un estudiante de quinto y uno de cuarto y el grupo C conformado por dos estudiantes de quinto y uno de tercero.

Tabla 17 Registro de resultados juego El Espejo

Jugadores			**Puntaje**
Equipo		**Grado**	
A	E1	5°	50
	E6	3°	45
B	E2	5°	50
	E5	4°	50
C	E3	5°	50
	E4	5°	45
	E7	3°	45

Fuente 51 Producción propia con base en los resultados obtenidos por los estudiantes

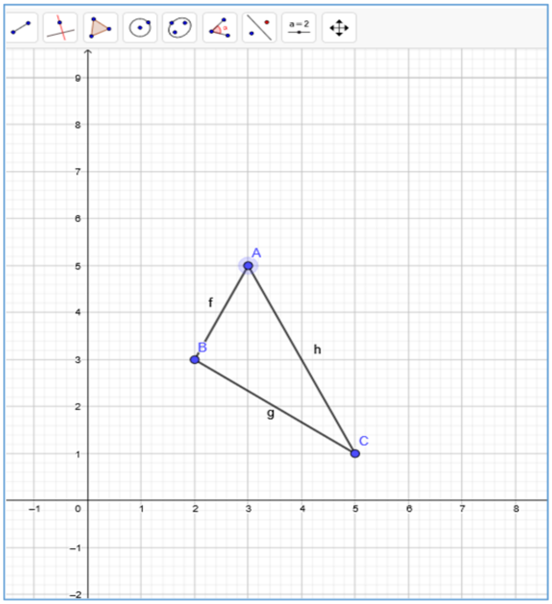
Se observa que los resultados tienden a ser parejos, es decir que los puntajes no están dispersos. E1, E2, E3 y E5 (los tres primeros de grado 5° y el restante de grado 4°), en las cinco rondas ganaron de a diez puntos cada uno, pues siempre acertaron; por su parte, E4, E6 y E7 obtuvieron de a 45 puntos por cuatro aciertos y una falla.

Con lo anterior, se afirma que el conjunto de actividades que se propuso a los estudiantes les permitió avanzar a un nivel superior de visualización (aunque, se acepta que E4, E6 y E7 presentaron algunas dificultades que no son graves), puesto que, todos lograron denotar una mostacilla como un punto en el plano cartesiano para construir figuras (siendo este el primer paso para la compresión de las transformaciones geométricas) y mejoraron el discurso matemático. De esta manera, se cumple la conjetura propuesta para la situación didáctica 1.

5.2.2. Análisis local Situación 2 Construcción de figuras a través de transformaciones.

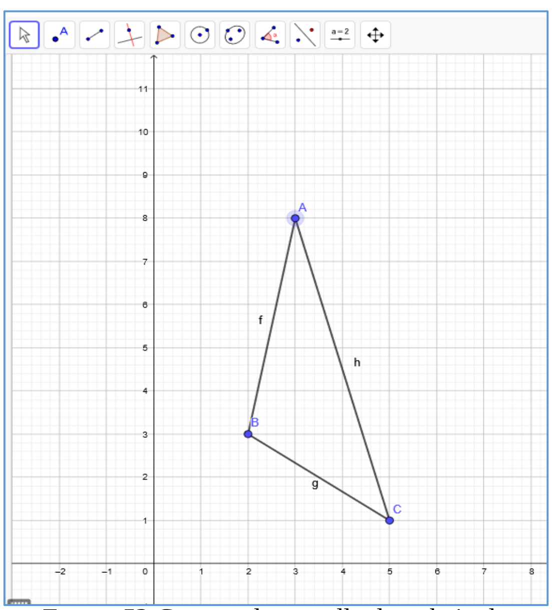
5.2.2.1. Tarea 1.

Ilustración 35 Triángulo ABC inicial



Fuente 52 Captura de pantalla de trabajo de estudiante de grado 3°

Ilustración 36 Triángulo ABC luego de haber movido el punto A



Fuente 53 Captura de pantalla de trabajo de estudiante de grado 3°

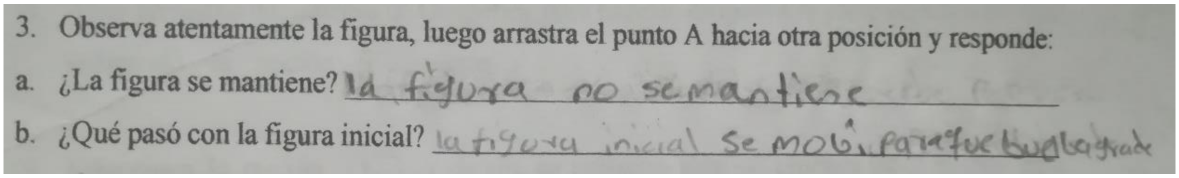
Los estudiantes realizaron la construcción pedida en el punto 1 y 2, en la Ilustración 35 se muestra el triángulo ABC cuyos vértices están ubicados en las coordenadas dadas y en la Ilustración 36 se ve el triángulo ABC luego de aplicar arrastre en el punto A.

Todos los estudiantes convergen en afirmar que al mover los puntos A, B y/o C indiscutiblemente ambos triángulos son diferentes en forma y tamaño. En la Ilustración 37, se observa la respuesta de E2 a la pregunta del numeral 3.

La estudiante comprobó que, al aplicar el arrastre a un punto en una construcción realizada con puntos y segmentos, "*la figura no se mantiene*" tal como expresa en el punto a.

De acuerdo a la respuesta del literal b *"la figura inicial se movió para que se vuelva grande"*, es interesante observar que dentro del discurso y de las representaciones mentales de E2 es posible el movimiento de figuras. Más adelante, la Ilustración 38 deja ver la respuesta de la estudiante en el punto 4 numeral b, en donde se le pide lo mismo que en el tercer ítem, pero con el punto B; se nota que ella prueba que con el punto B pasa lo mismo que concluyó con el punto A.

Ilustración 37 Respuesta de estudiante de grado 5°

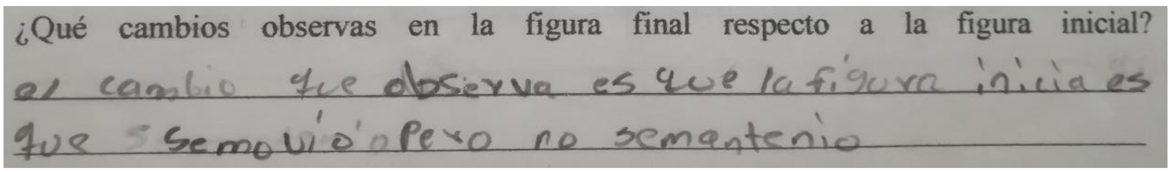

3. Observa atentamente la figura, luego arrastra el punto A hacia otra posición y responde:

a. ¿La figura se mantiene? la figura no semantiene

b. ¿Qué pasó con la figura inicial? la figura inicial se movi, paraque fue bugla grade

Fuente 54 Producción de estudiante

Ilustración 38 Respuesta de estudiante de grado 5°


¿Qué cambios observas en la figura final respecto a la figura inicial?

el cambio que observa es que la figura inicia es que se movio pero no semantenio

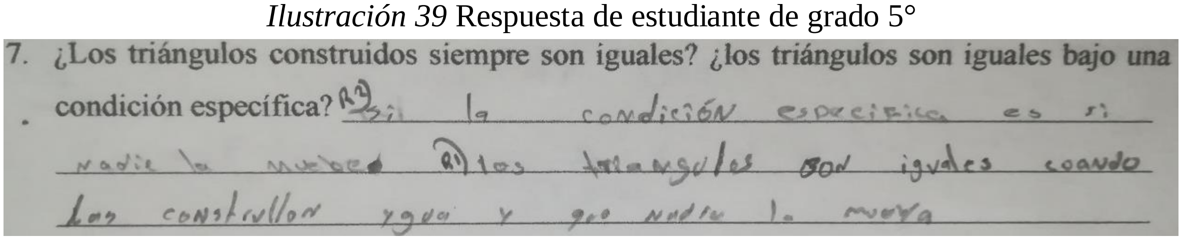
Fuente 55 Producción del estudiante

Al transcribir la respuesta de E2, se aprecia que ella dice: *"el cambio que observo es que la figura inicial se movió pero no se mantiene"*. Con esta afirmación, ¿E2 estará a la expectativa sobre lo que pasará si se mueve el punto C? o con las dos pruebas realizadas ¿es suficiente para que E2 establesca una generalización? Al entrevistar a E2, la estudiante expresa que *"Yo hice lo de mover C, no se me ocurrió en pensar que moviendo la C también pasaba lo mismo. Cuando estábamos en asamblea de aula y Yasuri lo dijo entonces yo caí en cuenta"*

De acuerdo a esta afirmación, E2 admite que aplicarle arrastre al punto A y B, no fue suficiente para generalizar el resultado para el punto C, sino que tuvo que mover el punto C, observar el comportamiento de la figura y escuchar la intervención de su compañera.

En la pregunta 7, E1 declara que el movimiento en las figuras hace que estas dejen de ser iguales, tal como se evidencia en la Ilustración 39.

Ilustración 39 Respuesta de estudiante de grado 5°

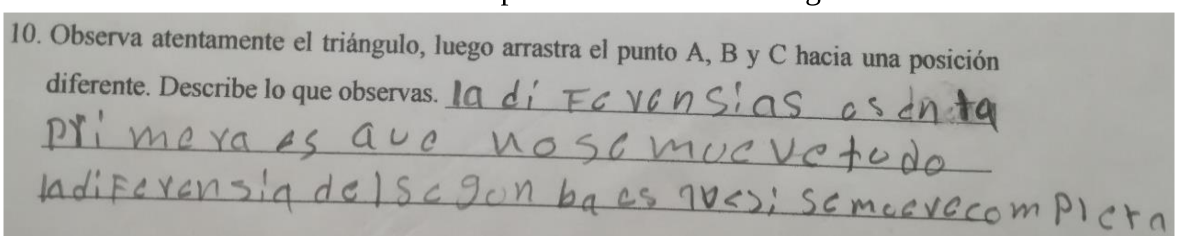

7. ¿Los triángulos construidos siempre son iguales? ¿los triángulos son iguales bajo una condición específica? R2 si la condición especifica es si nadie la mueve R1 los triangulos son iguales cuando los construllon ygual y que nadie la mueva

Fuente 56 Producción de estudiante

En la respuesta de E1, se evidencia su consciencia respecto al resultado de mover una figura realizada con punto y segmento y una realizada con la opción polígono en GeoGebra. Sabe que, al aplicar el movimiento en la primera, la figura se deforma; mientras que, cuando se aplica movimiento a la segunda figura, esta conserva su forma y tamaño. Por eso, E1 afirma en la primera pregunta que *"Los triángulos son iguales cuando los construyen igual y que nadie los mueva"* y en la segunda pregunta dice *"Si, la condición específica es si nadie lo mueve"*. Con estas respuestas se percibe que E1 ya tiene herramientas conceptuales para aplicar movimientos en un futuro.

En este sentido, resulta interesante analizar la pregunta 10, porque se espera que los estudiantes comprendan que al aplicar un movimiento a una figura, se debe mover todos los elementos constitutivos por igual, sin generar cambios en la forma y el tamaño de la figura. En la Ilustración 40 y 41 se observan las respuestas de E6 y E3 respectivamente.

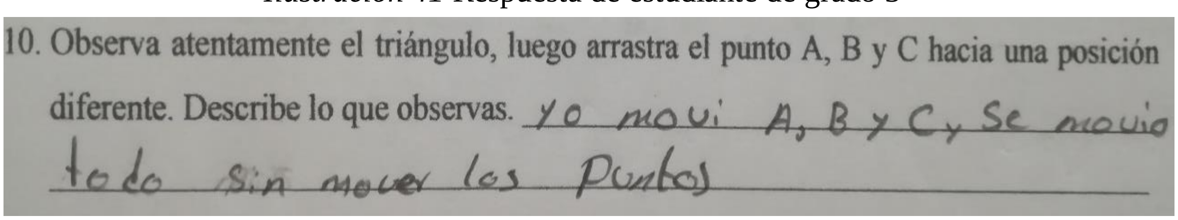
Ilustración 40 Respuesta de estudiante de grado 3°


10. Observa atentamente el triángulo, luego arrastra el punto A, B y C hacia una posición diferente. Describe lo que observas. la di ferensias es en la primera es auo nosemuevetodo ladiferensia delsegon ba es qves; semuevecompleta

Fuente 57 Producción de estudiante

Transcripción*: la diferencia es que en la primera no se mueve todo, la diferencia del segundo es si se mueve completo*.

Ilustración 41 Respuesta de estudiante de grado 3°


10. Observa atentamente el triángulo, luego arrastra el punto A, B y C hacia una posición diferente. Describe lo que observas. yo movi A, B y C, Se movio todo sin mover los Puntos

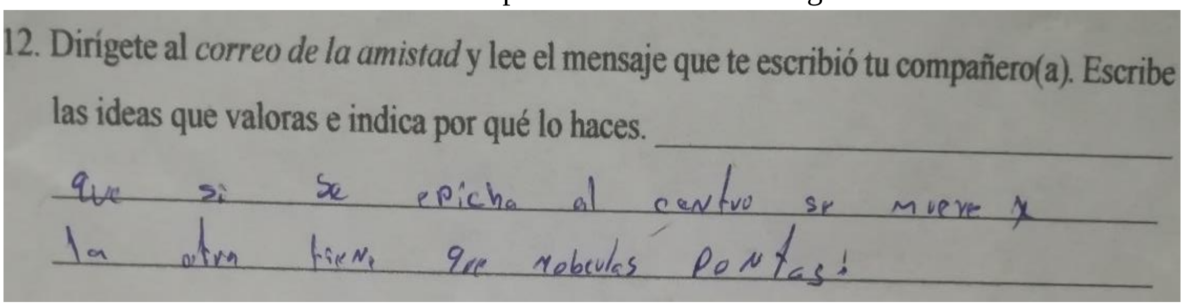
Fuente 58 Producción de estudiante

Transcripción: *yo moví A, B y C, se movió todo sin mover los puntos.*

E6 y E3 confirman que al mover la primera figura (realizada con punto y segmento), no se mueve como un todo, sino que varía la ubicación de los puntos deformando la figura; en cambio, si se mueve la segunda figura (realizada con la opción polígono) se mueve como un todo.

En la parte final de la actividad se utiliza el Correo de la amistad, para escribir un mensaje a un compañero acerca de lo que ha aprendido. Las Ilustraciones 42 y 43 contienen las respuestas de E1 y E3 respectivamente. E1 escribió las ideas que valora acerca del comentario que le hizo sus compañeros.

Ilustración 42 Respuesta de estudiante de grado 5°


12. Dirígete al *correo de la amistad* y lee el mensaje que te escribió tu compañero(a). Escribe las ideas que valoras e indica por qué lo haces.

que si se epicha al centro se mueve y
la otra tiene que mobeulas puntas!

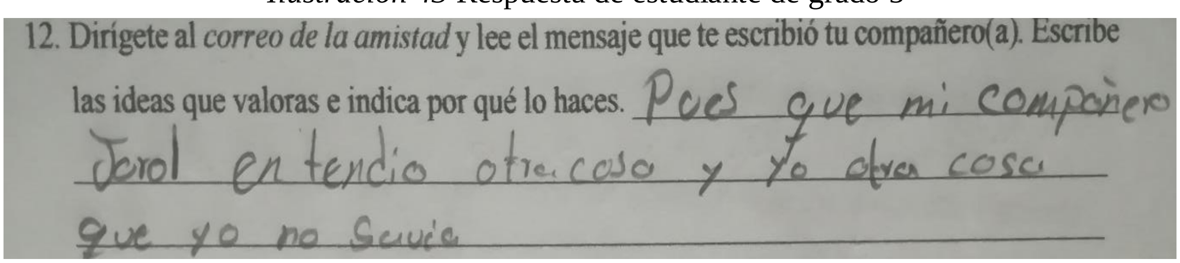
Fuente 59 Producción de estudiante

Transcripción: *que si se espicha*[12] *el centro se mueve y la otra tiene que mover las puntas.*

E1 recibió un mensaje de un estudiante de grado tercero, el cual expresa su conclusión respecto al movimiento de figuras realizadas con punto y segmento, y las figuras construidas con la opción polígono. Y es precisamente este hecho, que E1 valora y escribe.

En la Ilustración 43 se presenta la respuesta de E3.

Ilustración 43 Respuesta de estudiante de grado 5°


12. Dirígete al *correo de la amistad* y lee el mensaje que te escribió tu compañero(a). Escribe las ideas que valoras e indica por qué lo haces. Pues que mi compañero
Jerol entendio otra coso y yo otra cosa
que yo no savia

Fuente 60 Producción de estudiante

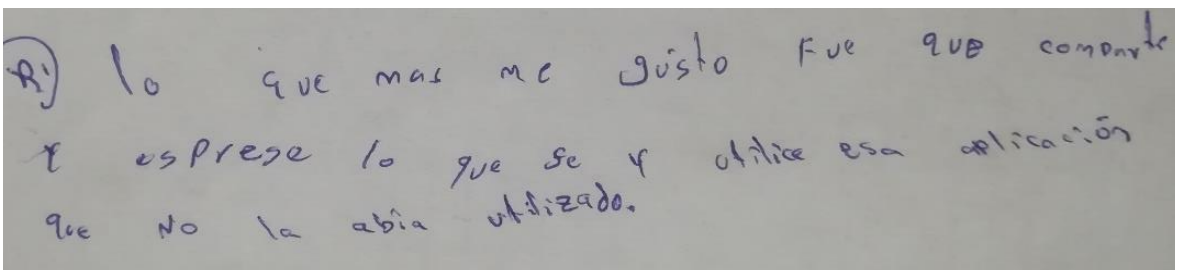
[12] Utiliza la palabra para referirse a la acción de dar clic.

Transcripción: *pues que mi compañero Jarol entendió otra cosa y yo otra cosa que yo no sabía.*

En la Ilustración 43, E3 no escribe lo que valora del comentario del compañero que le envió el mensaje, sino que ella admite por un lado que entendió algo diferente, y por otro lado, que “ese algo” no lo sabía. En este tipo de actividades, se aprecia el correo de la amistad por ser una oportunidad de acercar a los estudiantes entre sí, independientemente de su grado escolar, de compartir experiencias y construir conocimiento.

Durante la intervención, la profesora adicionó a la tarea la pregunta ¿qué fue lo que más te gustó de la actividad? A modo de ejemplo, se presenta la respuesta de E1 y E6 en la Ilustración 44 y 45 respectivamente. E1 reconoce que le gusta realizar actividades en grupo, al parecer disfruta la asamblea de aula y el plan padrino, y menciona su interés creciente por el uso de GeoGebra.

Ilustración 44 Respuesta de estudiante de grado 5°

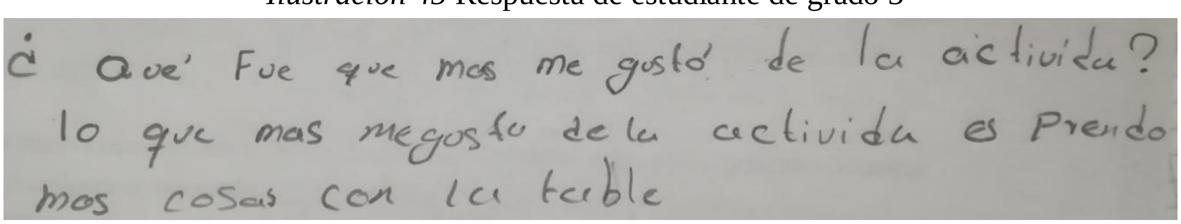

R: lo que mas me gusto Fue que comparte
y esprese lo que se y utilice esa aplicación
que No la abia utlizado.

Fuente 161 Producción de estudiante

Transcripción: *lo que más me gustó fue que compartí y expresé lo que sé, y utilicé esa aplicación que no había utilizado.*

En la Ilustración 45, E6 menciona que le gusta utilizar la tableta para aprender, sin duda una nativa digital.

Ilustración 45 Respuesta de estudiante de grado 3°


¿ Qué Fue que mas me gustó de la activida?
lo que mas megosto de la activida es Prendo
mas cosas con la table

Fuente 62 Producción de estudiante

Transcripción: *lo que más me gusta de la actividad es que aprendemos cosas con la tableta.*

Ilustración 46 Estudiantes de grado 5° desarrollando la tarea 1

Fuente 63 Producción de estudiante

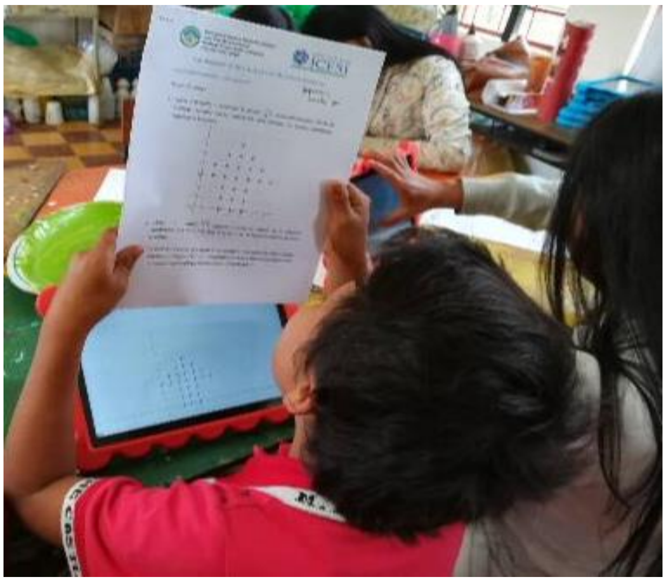
Para finalizar, es importante destacar que se observó que los estudiantes fueron rápidos para desarrollar la actividad, esto es, porque adquirieron un avance significativo en el manejo del Touchpad.

Esto les permite manipular el software con mayor precisión y manipular las herramientas con mayor eficiencia.

5.2.2.2. Tarea 2.

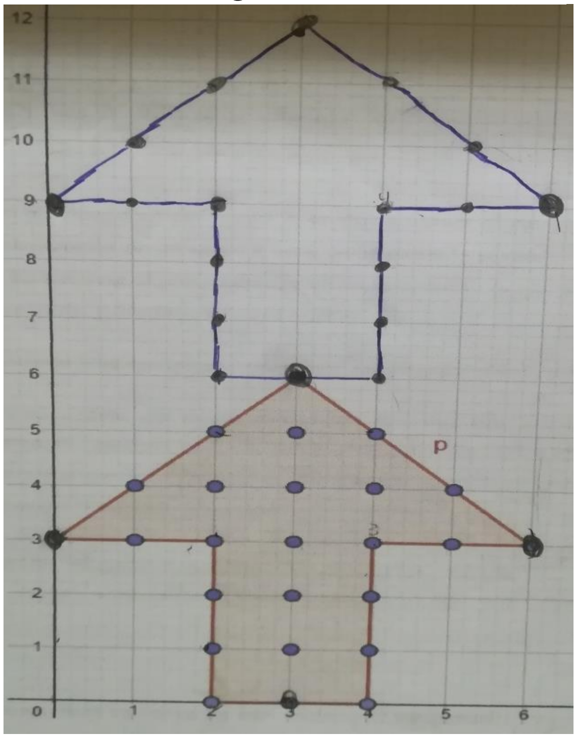
Se observó que los estudiantes iniciaron la clase con expectativa acerca de la actividad a realizar, esto se menciona por las constantes preguntas que se recibieron, algunas de ellas fueron: *¿vamos a usar las tabletas?, ¿qué vamos a hacer hoy?, ¿nos organizamos en grupos?*

Ilustración 47 Estudiante de grado 3° desarrollando la tarea 2



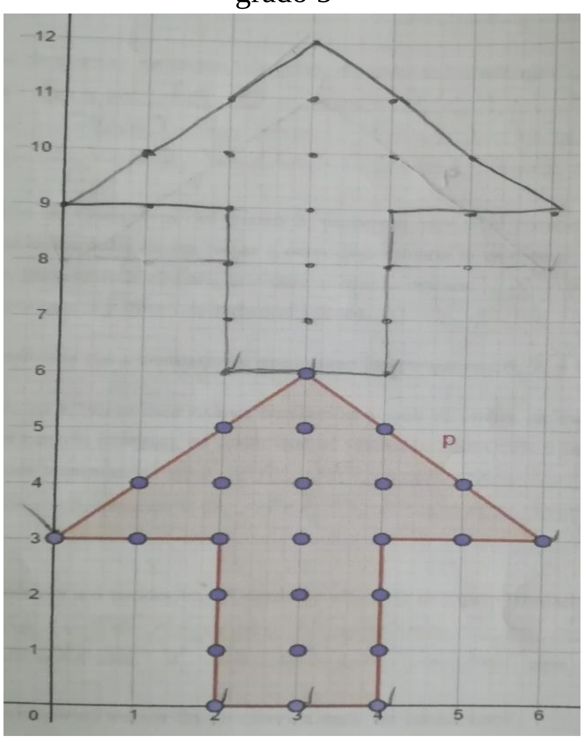
Fuente 64 Imagen propia

Ilustración 48 Actividad de estudiante de grado 3°



Fuente 65 Producción de estudiante

Ilustración 49 Actividad de estudiante de grado 5°



Fuente 66 Producción de estudiante

En el desarrollo de la construcción, se notó que los estudiantes tienen mayor habilidad utilizando el Touchpad, pues requirieron menos tiempo del previsto para hacer la figura pedida, incluso algunos cambiaron de color los puntos, el contorno del polígono y del área, sin que se les pidiera.

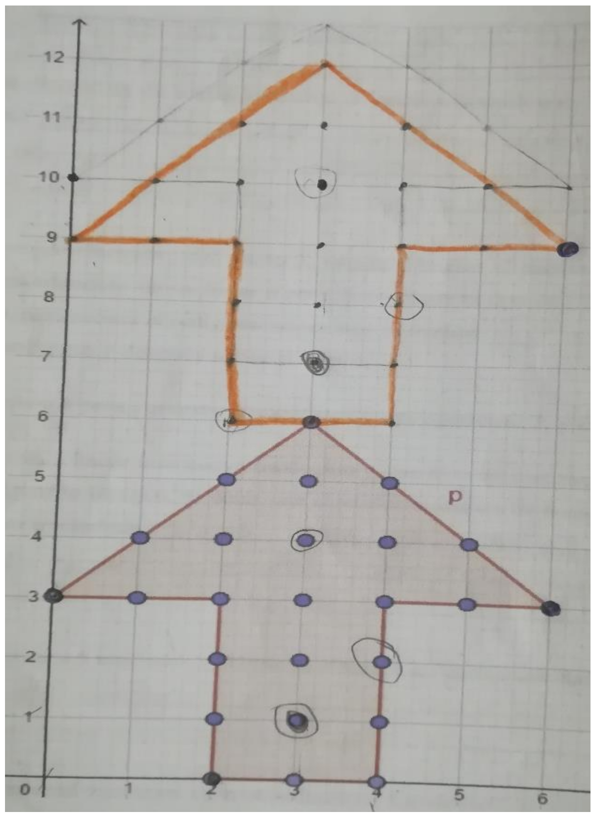
Al socializar el punto 3, se contemplaron dos maneras en que los estudiantes lo desarrollaron. La primera manera fue empleada por el 85,71% esto es seis de siete niños; se evidenció que hubo precisión en el conteo de las unidades, visualización del área de la figura que podría ocupar y razonamiento acerca del proceso indicado. Los niños ubicaron la flecha tal como se ve en la Ilustración 48.

La segunda manera fue empleada por el 14,28% esto es uno de siete niños; se evidenció que el estudiante de quinto no tuvo precisión en el conteo de las unidades y no visualizó el área de la figura que podría ocupar, pues se nota que realizó líneas y las borró repetidamente.

Por un lado, en la Ilustración 49 se observa que E2 empezó a hacer la flecha ubicando el vértice superior en la coordenada (3,11), pero como se percató que parte de la figura final quedaba superpuesta en la figura inicial, procedió a borrar y a subir el vértice superior a la coordenada (3,12), se deduce a partir de las marcas que quedaron en el papel.

Llama la atención la Ilustración 50, en la que se aprecia que E3 inicialmente ubica el vértice superior de la flecha en la coordenada (3,13), pero, por alguna razón E3 tomó la decisión de bajar ese vértice al punto (3, 12).

Ilustración 50 Actividad de estudiante de grado 5°



Fuente 67 Producción de estudiante

El siguiente fragmento deja ver la respuesta de la estudiante, al preguntarle acerca del cambio de decisión en el punto 3.

P: ¿por qué borraste la flecha que hiciste primero?
E3: como vi que Yasuri y Yeferson habían hecho la flecha más abajito entonces por eso borré y bajé la mía.
P: ¿pensaste que la tuya estaba incorrecta?

E3: No, yo sabía que estaba bien. Solo más separada que la de los compañeros. Me hubiese quedado mala si las flechas se pisan, ¿cierto profe?
P: ajam… pero para la próxima vez crea más en sus ideas, en usted.
Minuto 21:07 al minuto 21:43 Situación 2 Tarea 2

Ilustración 51 Estudiante de grado 5° desarrollando la tarea 2

Fuente 68 Imagen propia

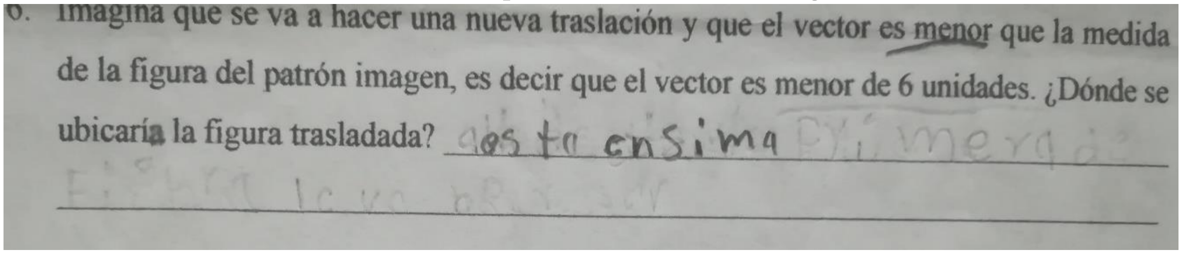
Este diálogo deja ver que, inevitablemente E3 dejó influenciar su decisión con el trabajo de los compañeros y prefirió cambiar su idea por replicar la idea de la mayoría; sin embargo, se rescata que la estudiante es consciente de que su procedimiento era correcto y lo justificó con un muy buen argumento, el solapamiento.

Ahora bien, en la pregunta 4 todos los estudiantes contestaron correctamente y se apropiaron del término homólogo. Cada estudiante fue capaz de reconocer los elementos homólogos en la figura inicial y la final. Todos los estudiantes comprobaron que la distancia entre los pares de puntos homólogos es 8 centímetros (de acuerdo a la figura realizada), pero ninguno pensó en hacer una generalización para todos los puntos.

Adelantando al punto 6, es preciso exhibir las Ilustraciones 52, 53, 54 y 55, en donde a modo de ejemplo se presentan las respuestas de E6, E3, E7 y E4 respectivamente. En esta oportunidad el 100% de los estudiantes convergen en su respuesta.

En esta pregunta, se les pide a los estudiantes imaginar la traslación de una figura con un vector menor a seis unidades.

Ilustración 52 Respuesta de estudiante de grado 3°

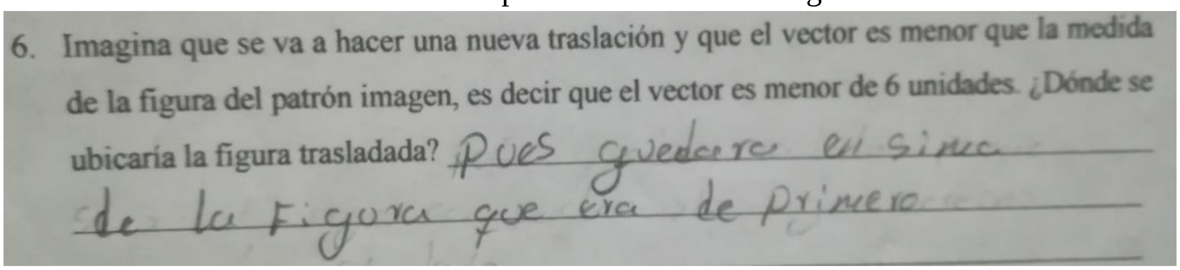


6. Imagina que se va a hacer una nueva traslación y que el vector es menor que la medida de la figura del patrón imagen, es decir que el vector es menor de 6 unidades. ¿Dónde se ubicaría la figura trasladada? es ta ensima

Fuente 69 Producción de estudiante

Transcripción: *está encima.*

Ilustración 53 Respuesta de estudiante de grado 5°

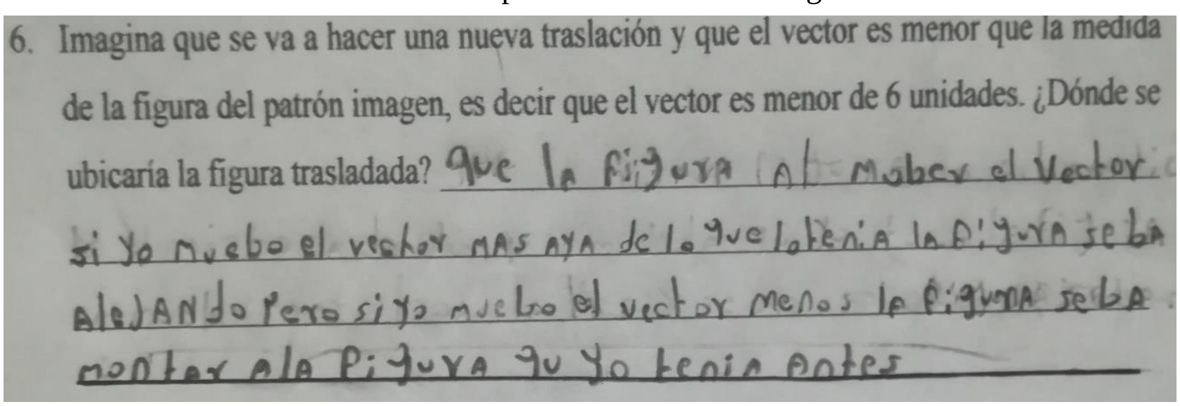


6. Imagina que se va a hacer una nueva traslación y que el vector es menor que la medida de la figura del patrón imagen, es decir que el vector es menor de 6 unidades. ¿Dónde se ubicaría la figura trasladada? pues quedara en sima de la figura que era de primero

Fuente 70 Producción de estudiante

Transcripción: *pues quedará encima de la figura que era de primera.*

Ilustración 54 Respuesta de estudiante de grado 3°

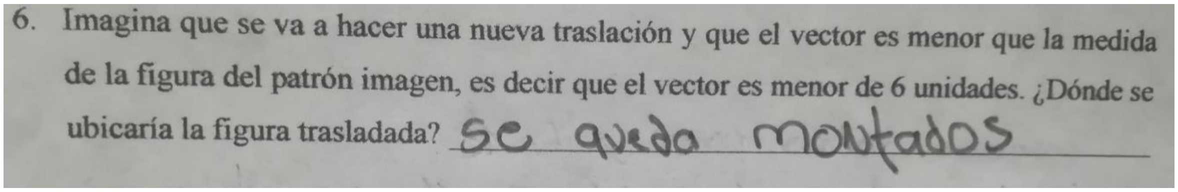


6. Imagina que se va a hacer una nueva traslación y que el vector es menor que la medida de la figura del patrón imagen, es decir que el vector es menor de 6 unidades. ¿Dónde se ubicaría la figura trasladada? que la figura al mober el vector si yo muebo el vector mas aya de lo que lo tenia la figura se ba alejando pero si yo muebo el vector menos la figura se ba montar ala figura qu yo tenia antes

Fuente 71 Producción de estudiantes

Transcripción: *que la figura al mover el vector, si yo muevo el vector más allá de lo que yo lo tenía, la figura se va alejando; pero, si yo muevo el vector menos, la figura se va a montar a la figura que yo tenía antes.*

Ilustración 55 Respuesta de estudiante de grado 5°


6. Imagina que se va a hacer una nueva traslación y que el vector es menor que la medida de la figura del patrón imagen, es decir que el vector es menor de 6 unidades. ¿Dónde se ubicaría la figura trasladada? se queda montados

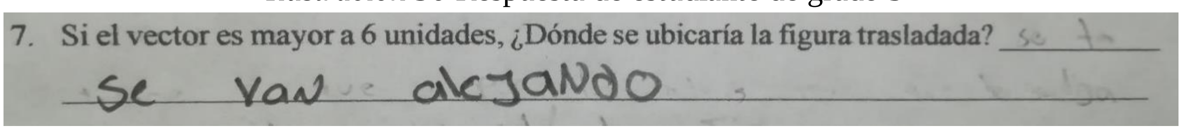
Fuente 72 Producción de estudiante

Transcripción: se quedan montados.

Los estudiantes analizaron el supuesto y convergen en decir que si se aplica una traslación y el vector es menor a seis unidades, entonces *p´* estará superpuesto en *p*.

En la pregunta 7, el interrogante es opuesto al ítem anterior, es decir que hace referencia al movimiento de la figura con un vector mayor a seis unidades. En este punto, se constata que los siete estudiantes respondieron de manera semejante, a modo de ejemplo se presentan las Ilustraciones 56, 57, 58 y 59, las respuestas de E4, E6, E7 y E1 respectivamente.

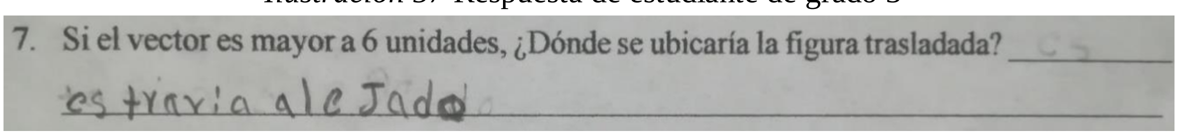
Ilustración 56 Respuesta de estudiante de grado 5°


7. Si el vector es mayor a 6 unidades, ¿Dónde se ubicaría la figura trasladada? se van alejando

Fuente 73 Producción de estudiantes

Transcripción: *se van alejando.*

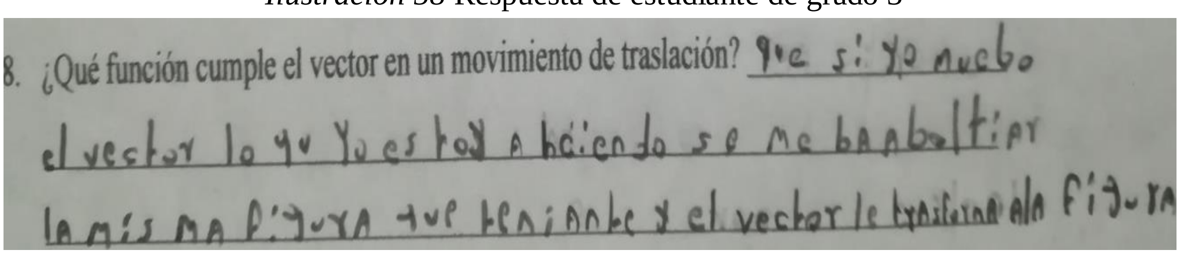
Ilustración 57 Respuesta de estudiante de grado 3°


7. Si el vector es mayor a 6 unidades, ¿Dónde se ubicaría la figura trasladada? estraria aleJado

Fuente 74 Producción de estudiante

Transcripción: *estaría alejado.*

Ilustración 58 Respuesta de estudiante de grado 3°


8. ¿Qué función cumple el vector en un movimiento de traslación? que si yo nuebo el vector lo qu yo estoy haciendo se me babaltiar la misma figura que teniante y el vector le trasforma ala figura

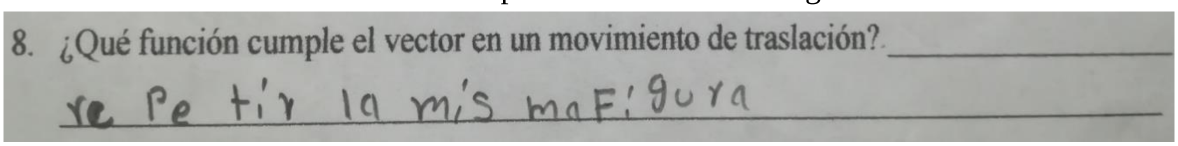
Fuente 75 Producción de estudiante

Transcripción: *que si yo muevo el vector, lo que yo estoy haciendo se me va a voltear la misma figura que tenía antes y el vector le transforma a la figura*.

Así pues, los estudiantes ya están preparados para determinar la función que cumple el vector en una traslación, es importante señalar, por un lado, que las siguientes declaraciones de los niños corresponden a sus descubrimientos y, por otro lado, que los estudiantes no han recibido ningún tipo de explicación teórica, solo el desarrollo de las tareas aquí propuestas. En las Ilustraciones 59, 60 y 61 se presentan las respuestas destacadas de E7, E6 y E1 respectivamente.

E7 comprende que en una traslación el vector es quien mueve la figura, al parecer el estudiante escribe voltear para referirse a mover. Llama la atención que el estudiante utiliza la palabra transformación.

Ilustración 59 Respuesta de estudiante de grado 3°


8. ¿Qué función cumple el vector en un movimiento de traslación?

re Pe ti r la mi's maFigura

Fuente 76 Producción de estudiante

Transcripción: *repetir la misma figura.*

Ilustración 60 Respuesta de estudiante de grado 5°

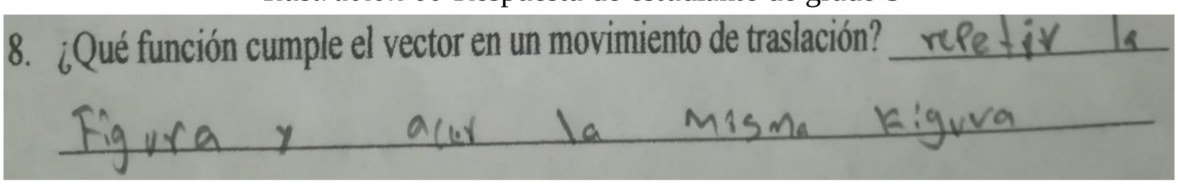

8. ¿Qué función cumple el vector en un movimiento de traslación? repetir la

Figura y acer la Misma Figura

Fuente 77 Producción de estudiante

Transcripción: *repetir la figura y hacer la misma.*

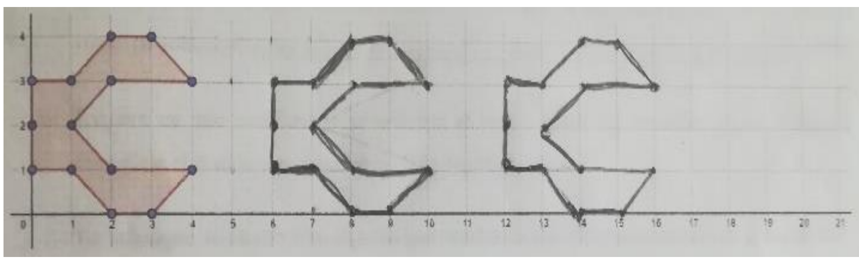
E6 y E1 (ver Ilustraciones 59 y 60) relacionan la función del vector en una traslación, con una acción de duplicado de figuras; adicionalmente, se desata que E1 agrega que la figura resultante es la misma. Al final de la tarea, los estudiantes realizaron de manera libre figuras en GeoGebra y con la opción traslación generaron transformaciones, algunos estudiantes concluyeron que con esta transformación se puede hacer patrones de pulseras.

5.2.2.3. Tarea 3.

Inicialmente, la tarea 3 y la tarea 4 componían una sola tarea (desde el punto uno al punto nueve), pero, gracias al refinamiento progresivo se decide la fragmentación de la actividad; durante la intervención de aula, la profesora evidenció que la actividad era muy larga y que era apropiado parar en el sexto punto y continuar del séptimo punto en adelante en una próxima sesión. En este sentido, la tarea 3 está compuesta de seis puntos y la tarea 4 de tres puntos.

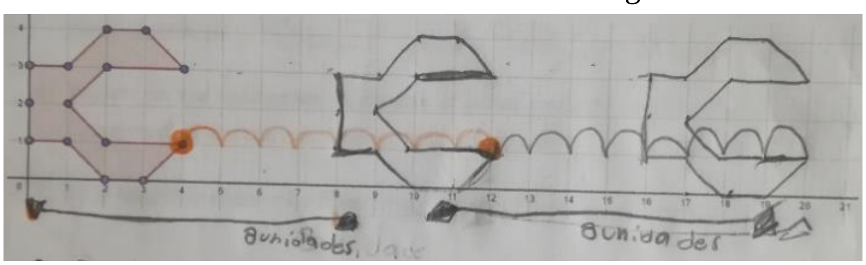
En el primer punto se les pide a los estudiantes completar un diseño físico por medio de traslaciones de una figura dada. A continuación, en las Ilustraciones 61, 62, 63, 64 y 65, se exhiben las producciones de E2, E5, E3, E6 y E1 respectivamente.

Ilustración 61 Actividad de estudiante de grado 5° E2



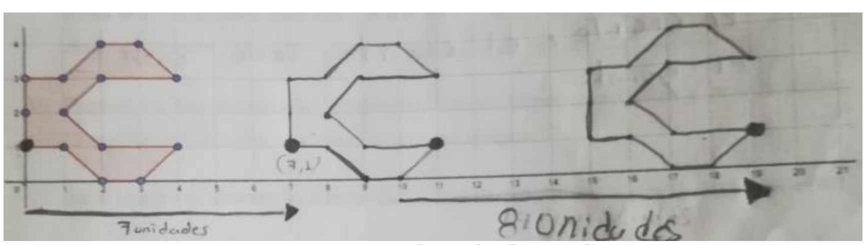
Fuente 78 Producción de estudiante

Ilustración 62 Actividad de estudiante de grado 4° E5



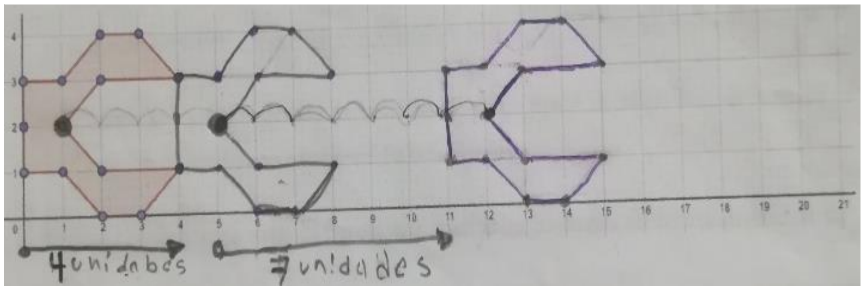
Fuente 79 Producción de estudiante

Ilustración 63 Actividad de estudiante de grado 5° E3



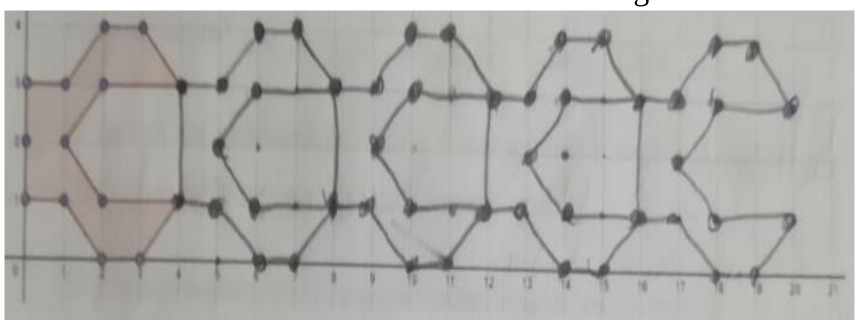
Fuente 80 Producción de estudiante

Ilustración 64 Actividad de estudiante de grado 3° E6



Fuente 81 Producción de estudiante

Ilustración 65 Actividad de estudiante de grado 5° E1

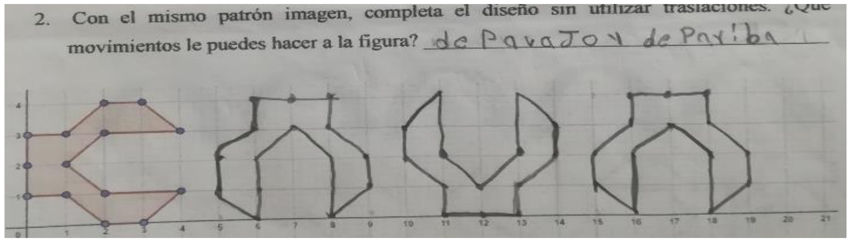


Fuente 82 Producción de estudiante

Se aprecia que, en las construcciones realizadas, E2 utilizó un vector de 6 unidades en las dos traslaciones; E5 aplicó dos traslaciones cada una con un vector de 8 unidades; E3 escogió hacer la traslación con un vector de 7 unidades y luego con uno de 8 unidades; E6 realizó la primera traslación con un vector de 4 unidades y luego con un vector de 7 unidades; finalmente, se presenta la traslación de E1 quien decide usar un vector de 4 unidades. En suma, se valora en gran medida que el 100% de los estudiantes demostró experticia para usar la traslación en situaciones de contexto

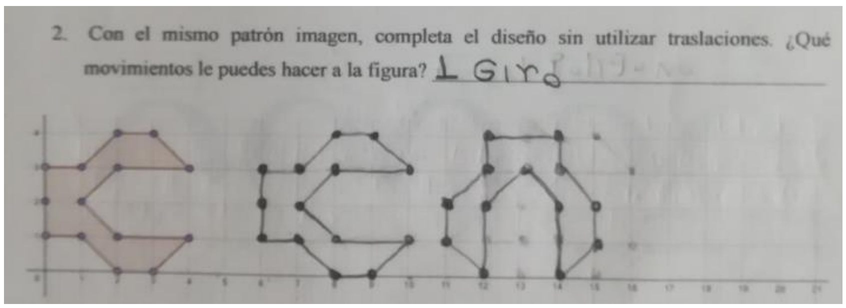
La pregunta 2 resulta conveniente para la actividad, porque hace que el estudiante analice la posibilidad de completar el patrón sin usar la traslación; de tal suerte, que exige que el estudiante imagine otro tipo de movimientos en las figuras. En esta dirección, es preciso presentar en las Ilustraciones 66, 67, 68 y 69, las ideas y construcciones de los estudiantes E6, E7, E1 y E5 respectivamente.

Ilustración 66 Actividad de estudiante de grado 3° E



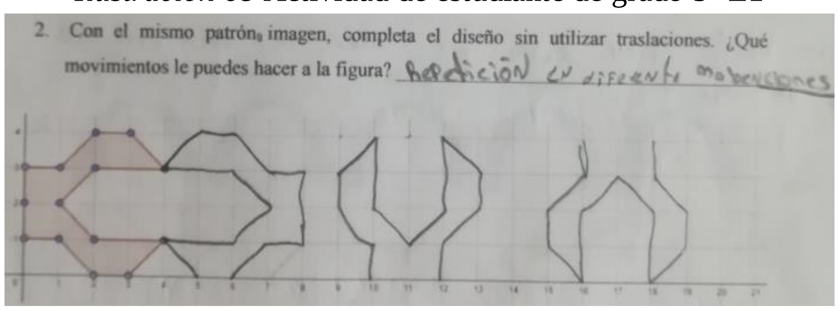
Fuente 83 Producción de estudiante

Ilustración 67 Actividad de estudiante de grado 3° E7



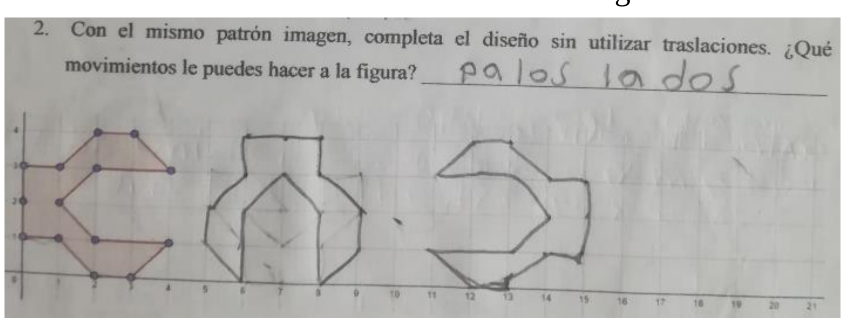
Fuente 84 Producción de estudiante

Ilustración 68 Actividad de estudiante de grado 5° E1



Fuente 85 Producción de estudiante

Ilustración 69 Actividad de estudiante de grado 4° E5



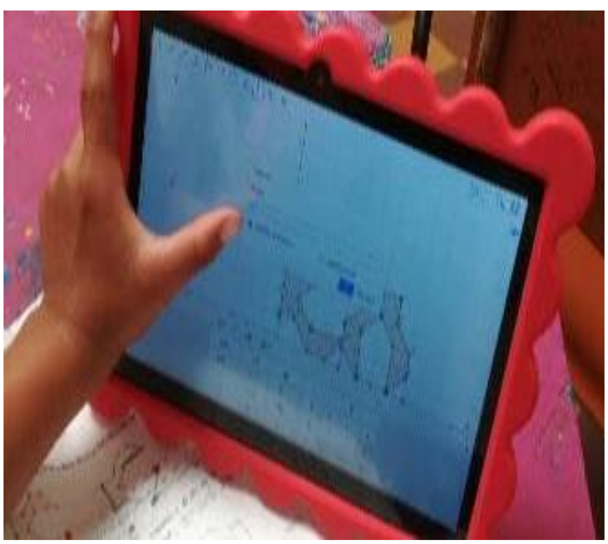
Fuente 86 Producción de estudiante

Al observar la Ilustración 66, se ve que la estudiante construye las figuras a partir de un giro de 90° y dos de 180°, E6 acompaña su construcción comentando que el movimiento que se le aplica "*es para abajo y para arriba"* y efectivamente, la estudiante hace los giros ubicando la abertura de la llave inglesa hacia abajo y hacia arriba.

En la Ilustración 67, E7 repite la figura y realiza un movimiento que él denomina *"giro*", que resulta ser una rotación con un ángulo de 90°. Por su parte, E1 en la Ilustración 68 realiza tres figuras en distintas posiciones y escribe que los movimientos que se le pueden hacer a la figura son de "*repetición"*. Finalmente, en la Ilustración 69 E5 realiza dos giros de 90° con sentido hacia las manecillas del reloj y comenta que los movimientos que puede hacer son "*movimientos para los lados"*.

Con estos ejemplos, se evidencia que este conjunto de tareas ha ampliado de manera progresiva el imaginario de los estudiantes acerca de la existencia de varios movimientos que transforman las figuras de diferentes maneras. Es un hecho, que los estudiantes comprenden que existen más movimientos aparte de la traslación y en esta ocasión iniciaron su proceso de descubrimiento.

Ilustración 70 Estudiante de grado 3° desarrollando el punto 6



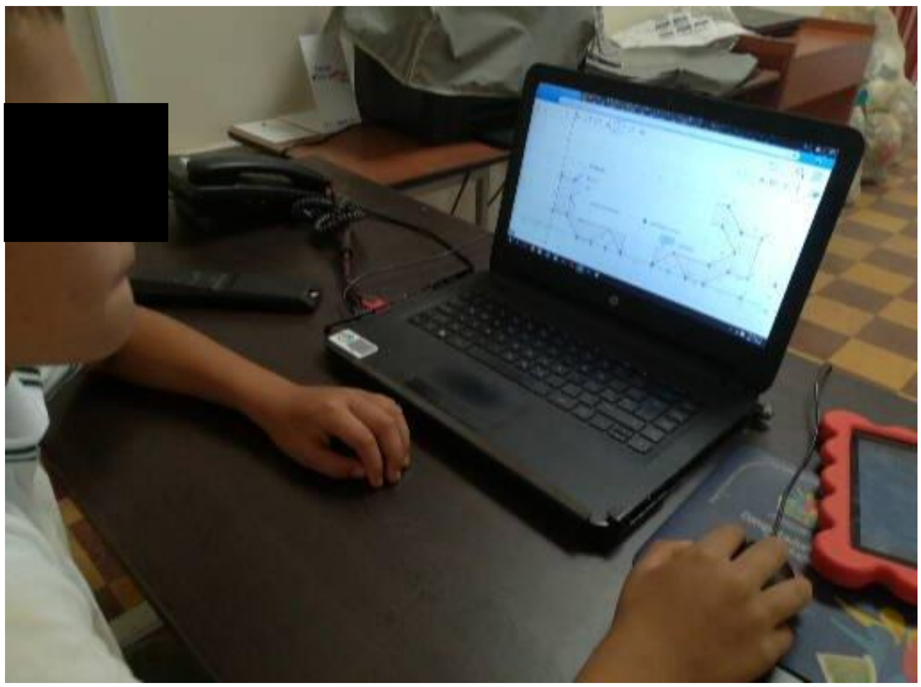
Fuente 87 Imagen propia

En los puntos 3, 4, 5 y 6 los estudiantes exploran la opción rotación de GeoGebra, se familiarizan con la diferencia entre el *sentido anti horario* y el *sentido horario*, probaron diferentes ubicaciones para el punto centro de rotación y evaluaron los resultados correctos de acuerdo a sus necesidades. Durante la socialización de la actividad, se notó que todos los estudiantes comprobaron que para los giros que ellos requerían, el punto centro de rotación no podía ser el mismo y que la precisión de la ubicación de aquel punto, marca una diferencia sustancial en el resultado.

5.2.2.4. Tarea 4.

Como se dijo en el apartado anterior, esta sección que se denomina tarea 4, en un principio perteneció a la tarea 3. El desarrollo de la tarea anterior, permitió que en esta tarea se estructuran los conceptos y propiedades que los estudiantes estuvieron experimentando, especialmente los ítems de la pregunta 2.

Ilustración 71 Estudiante de grado 5° desarrollando el punto 2

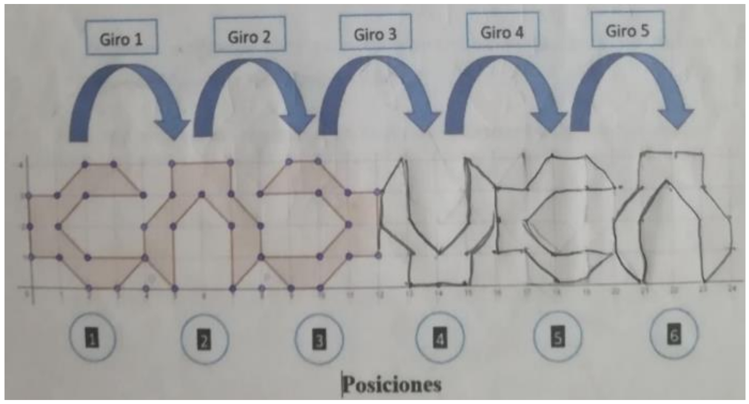


Fuente 88 Imagen propia

La intervención de aula inició con la explicación de procedimiento para realizar el giro 1 y el giro 2 en GeoGebra proyectado en el televisor, preguntó insistentemente el resultado de aplicar el giro 3 e invitó a los estudiantes a desarrollar los literales a y b, como se aprecia en la Ilustración 71.

A continuación, en las Ilustraciones 72, 73 y 74, se aprecian las estrategias de E5, E2 y E6 respectivamente.

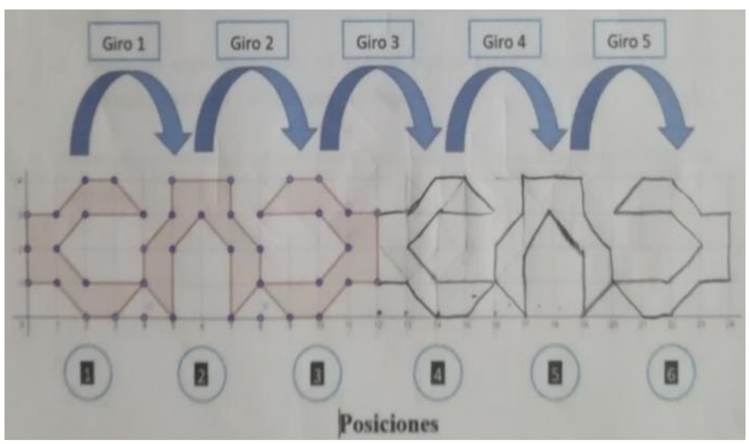
Ilustración 72 Actividad de estudiante de grado 4°



Fuente 89 Producción de estudiante

La Ilustración 72, ejemplifica la actuación de la mayoría de los estudiantes, pues E4, E1, E3, E5 y E7, esto es cinco estudiantes de siete, elaboraron las figuras mediante giros sucesivos de 90°. Lo anterior quiere decir que el 71,42% de los estudiantes realizó la serie correctamente y que el 28,57% la realizó de manera incorrecta.

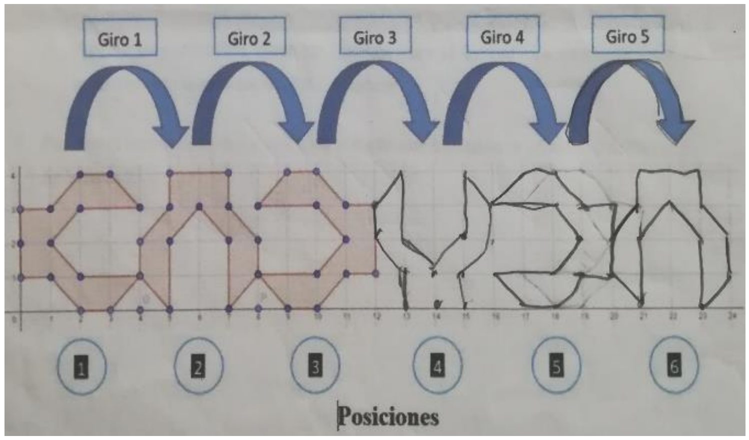
Ilustración 73 Actividad de estudiante de grado 5°



Fuente 90 Producción de estudiante

Otra estrategia utilizada es la que se muestra en la Ilustración 73. Un estudiante de siete, es decir que el 14,28% no realizó el tercer giro correctamente porque no lo hizo igual a 90° sino mucho mayor y los siguientes giros no siguen la lógica de la consigna de la actividad. Respecto a esto, se puede afirmar que la estudiante tiene debilidad para visualizar y razonar el movimiento de figuras a partir de una serie dada.

Ilustración 74 Actividad de estudiante de grado 3°

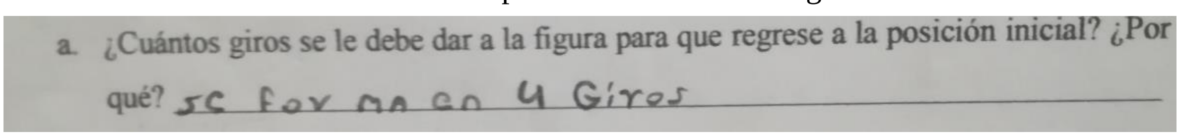


Fuente 91 Producción de estudiante

Por último, en la Ilustración 74 se observa la estrategia del 14,28% restante, en la cuarta posición la estudiante aplicó el giro de 90° sentido horario de manera correcta, pero en la quinta y sexta posición la rotación la aplicó de 90° sentido anti horario, duplicando las figuras de la tercera y segunda posición respectivamente.

Ahora bien, en el punto 2 se les pidió a los estudiantes que respondan unas preguntas explorando GeoGebra, las cuales exigieron visualización y razonamiento por partes de los estudiantes. El literal "a" requirió que los estudiantes analicen la serie de figuras dadas y que muevan sus representaciones mentales. A continuación, en las Ilustraciones 75 y 76, se muestra a manera de ejemplo, las respuestas de E7 y E1.

Ilustración 75 Respuesta de estudiante de grado 3°



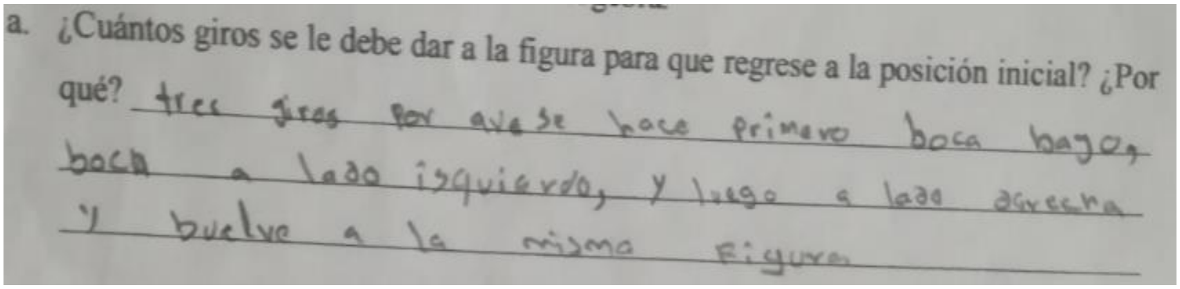
a. ¿Cuántos giros se le debe dar a la figura para que regrese a la posición inicial? ¿Por qué? sc forma en 4 Giros

Fuente 92 Producción de estudiante

Transcripción: *se forma en 4 giros.*

En esta oportunidad, la respuesta del estudiante de grado tercero es la correcta (ver Ilustración 75), es escogida por la gran mayoría de estudiantes, esto es seis de siete, que representan el 85,71% de la población del experimento. Este porcentaje amplio de estudiantes, demostró tener capacidad para hacer movimientos con sus representaciones mentales.

Ilustración 76 Respuesta de estudiante de grado 5°


a. ¿Cuántos giros se le debe dar a la figura para que regrese a la posición inicial? ¿Por qué? tres giros por que se boca primero boca bajo, boca a lado isquierdo, y luego a lado derecha y buelve a la misma figura

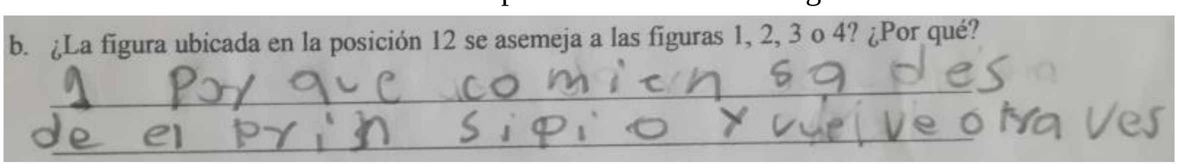
Fuente 93 Producción de estudiante

Transcripción: *tres giros porque se coloca primero boca abajo, boca al lado izquierdo, y luego al lado derecho y vuelve a la misma figura.*

E1 representa el 14,28% de los estudiantes, uno de siete que no construyó correctamente los giros, porque afirma que solo se requieren tres giros (ver Ilustración 76). En este caso específico, E1 siendo un estudiante de grado quinto no logró, por un lado, comprender la serie de figuras y, por otro lado, mover las representaciones mentales.

En el literal b, se puso en juego la visualización y el razonamiento de los estudiantes al tener que predecir la posición 12 de la figura dada, luego de los giros sucesivos de 90° y posteriormente, relacionarla con la posición 1, 2, 3 o 4. En las Ilustraciones 77 y 78, se muestran las respuestas de E5, y E1 respectivamente.

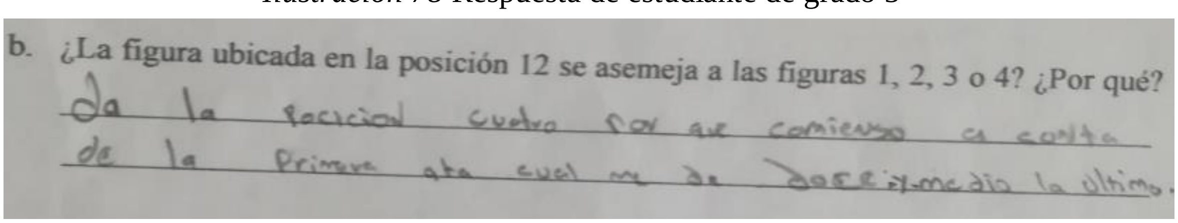
Ilustración 77 Respuesta de estudiante de grado 3°


b. ¿La figura ubicada en la posición 12 se asemeja a las figuras 1, 2, 3 o 4? ¿Por qué? 1 Por que comien sa des de el prin sipio y vuelve otra ves

Fuente 94 Producción de estudiante

Transcripción: *1 porque comienza desde el principio y vuelve otra vez.*

Ilustración 78 Respuesta de estudiante de grado 5°


b. ¿La figura ubicada en la posición 12 se asemeja a las figuras 1, 2, 3 o 4? ¿Por qué? da la pocicion cuatro por que comienso a conta de la primera ata cual me da doce y medio la ultimo.

Fuente 95 Producción de estudiante

Transcripción: *da la posición cuatro, porque comienzo a contar de la primera a la cual me de doce. Y me dio la última.*

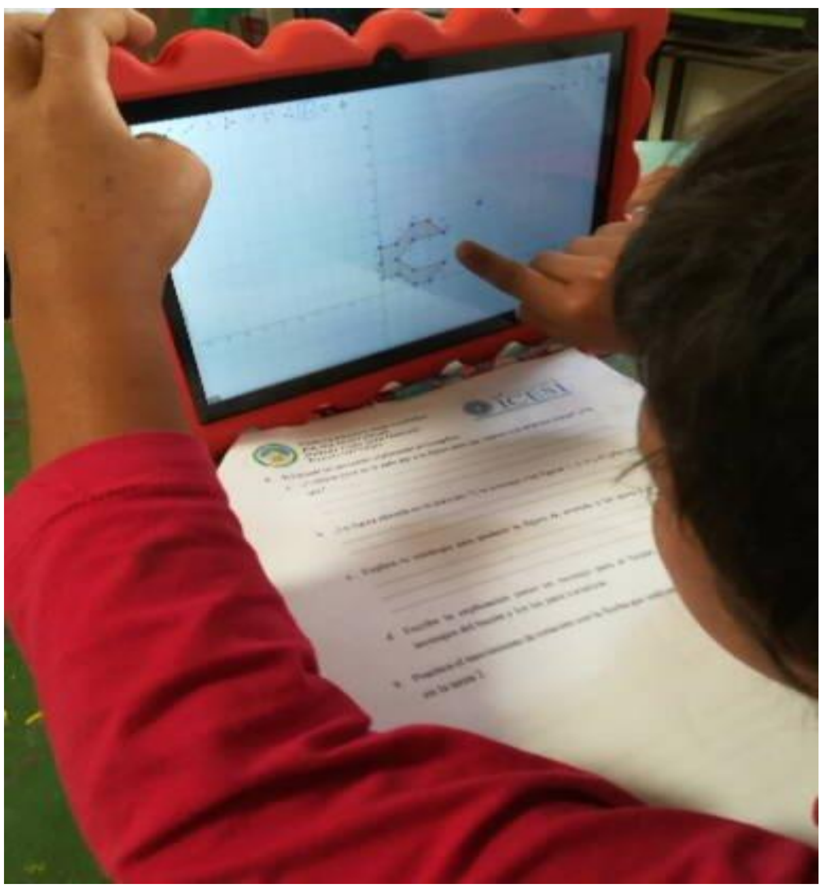
La Ilustración 77 exhibe la respuesta de E5, la estudiante afirma que en la posición12 se ubicaría una figura semejante a la primera, esta respuesta solo es considerada por E5 que representa el 14,28% de la muestra. Por su parte, E1 en la Ilustración 78 afirma que en la posición12 se ubicaría una figura semejante a la cuarta, esta respuesta es la escogida por el 85,71% de la muestra. En asamblea de aula se determinó la respuesta correcta de manera colectiva, esto se ve en el siguiente diálogo.

> *P: vamos a explicar nuestras respuestas. Veo que encontraron dos maneras de hacerlo. Anyi tiene una respuesta y los demás compañeros (refiriéndose a los seis restantes) pensaron en otra respuesta. Así que vamos a escucharnos entre todos y tomamos una decisión. ¿Quién quiere iniciar?*
> *E5: yo empiezo profe. Primero que todo ya sé que me equivoqué, porque volví a contar así… 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y vi que queda la cuatro, sino que yo ahora dije que en uno porque conté muy rápido y me equivoqué.*
> *E7: cuando yo lo hice, escribí 1, 2, 3 y 4 en el cuaderno, luego el 5 lo puse debajo del uno, porque significa que el 5 va a ser como el 1, el 6 lo puse debajo del 2, el 7 debajo del 3, el 8 debajo del 4, el 9 debajo del 1, el 10 debajo del 2, el 11 debajo del 3 y el 12 debajo del 4. Por eso sé que la figura 12 es como la cuatro.*
> *P: ¡qué buen descubrimiento! Ahora vamos a ver, ¿quién es capaz de decirme la posición 16 qué apariencia va a tener?*
> *E5: la 16 también es como la 4.*
> *E1: Ah es que todas las que son como 4 es la 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 y un poco más.*
> *E4: esos son los múltiplos.*
> *E1: pero solo se cumple con el 4, porque mire que los números que van con el 3 no son múltiplos de 3, o sea el 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.*
> *E5: tampoco con el 1 ni el 2.*
> *P: y si queremos saber la posición 27.*
> *E6: contamos, así como explicó Yeferson.*
> *E4: es mejor sin contar. Como ya se sabe que en la 4 están los múltiplos, yo ya sé que 28 es múltiplo de 4, entonces le quito una a 28 y da 27 y le quito una a 4 y me da 3. Entonces la figura de la posición 27 se parece a la figura 3.*
> Minuto 32:07 al minuto 34:33 Situación 2 Tarea 4

Este fragmento dilucida, por un lado, que E5 hizo un planteamiento erróneo por descuido y no por falta de competencia; por otro lado, que la conversación grupal permite la construcción de conocimientos. En el diálogo se evidencia que E7 y E6 piensan en un proceso de conteo en físico, ellos están en grado tercero y necesitan ver el objeto físico al que le van a atribuir un número; esto les permite hacer un procedimiento por el cual obtuvieron una respuesta correcta.

E4 demuestra que es competente al emplear el pensamiento lógico, en un primer momento, ella utiliza un descubrimiento anterior con relación a los múltiplos de cuatro, establece relaciones de orden y finalmente, "ve" el grupo cíclico. En el literal d, se socializó la actividad por medio del correo de la amistad. Finalmente, en el tercer punto los estudiantes exploraron las rotaciones en GeoGebra y algunos se animaron a rotar figuras diferentes.

Ilustración 79 Estudiante de grado 3° desarrollando el punto 3



Fuente 96 Imagen propia

Ilustración 80 Estudiante de grado 3° desarrollando el punto 3

Fuente 98 Imagen propia

5.2.2.5. Tarea 5.

La actividad tiene una consigna sencilla, sin embargo, el nivel de complejidad es alto, porque exige visualización, y razonamiento para analizar las relaciones matemáticas en un patrón de pulsera, la actividad requiere negociación y reflexión en el equipo de trabajo y, competencias discursivas para expresar ideas con fundamento matemático.

La intervención de aula inicia en el momento en que la profesora solicitó a los siete estudiantes organizarse en mesa redonda, al parecer están habituados porque siguieron la indicación rápidamente. Ella procedió a entregar la ficha de trabajo y explicó la actividad a desarrollar. Los estudiantes se organizaron en parejas, tal como sugería la consigna; los equipos que se conformaron fueron: E2E3, E1E4 y E5E6E7.

Se le entregó una pulsera en físico y una en fotocopia a cada uno de los tres equipos. Luego la profesora pidió atención y se dirigió a todos.

> *P: bueno, como ya todos los equipos recibieron el material entonces préstenme atención por favor. Chicos vamos a observar las pulseras, analicemos cuáles son los objetos matemáticos que vemos, las relaciones y propiedades, escríbalos de manera clara y conversen en el equipo. Luego vamos a hacer asamblea de aula y socializamos. ¿Tienen alguna pregunta?, ¿alguno no entendió?*
> *E4: pro ¿decimos los nombres de las figuras y las traslaciones y las rotaciones?*
> *P: si, ¡eso es!*
> Minuto 2:33 al minuto 3:06 Situación 2 Tarea 5

En este fragmento, se nota que la profesora se dirigió a los estudiantes utilizando en su discurso expresiones que dotan de formalismo la consigna, como por ejemplo las palabras que aparecen subrayadas. De igual manera, se destaca que la estudiante de manera espontánea intervino para corroborar la información y lo hace de manera elaborada, usando palabras matemáticas de manera correcta.

En el transcurso de la intervención de aula, la profesora les pidió a los estudiantes que observaran, analizaran y conversaran acerca de las relaciones geométricas de las pulseras entregadas, las imágenes en fotocopia y las pulseras en físico. Se observó que los 15 minutos que la profesora dio para la preparación de la exposición fueron aprovechados eficientemente; a su vez, se aprecia que todos los estudiantes asumieron la actividad con buena actitud, porque hubo compañerismo, diálogo y respeto, en los grupos de trabajo y en la socialización durante la Asamblea de aula.

En la Ilustración 81 se muestra una de las pulseras que se entregó a E2 y E3, el primer equipo en intervenir.

Ilustración 81 Pulsera entregada en fotocopia

Fuente 98 Imagen de la web

A continuación, se presentan algunos fragmentos de diálogos entre los estudiantes y la profesora, que se destacan por revivir los aprendizajes de los estudiantes.

E2: a nosotras nos tocó esta pulsera y vemos que estas figuras de las puntas (señala los extremos) son las mismas. Porque uno puede decir que el punto verde del centro es el punto de rotación. Imaginen que esto lo amarran de una cuerda y que se le da la vueltica por aquí.
E3: nosotras también vemos que los triángulos que están arriba y abajo también se han girado, todo por 180°. También los triángulos que están por todo alrededor de la estrella y las puntas de la estrella, también tiene rotaciones, pero con otros números.
Minuto 24:13 al minuto 25:05 Situación 2 Tarea 5

De la intervención de este equipo, se destaca que las estudiantes mencionaron con propiedad las relaciones existentes entre los elementos constitutivos de la figura del patrón, esto es las rotaciones. Además, ellas identificaron los puntos centro de giro en las rotaciones que mencionaron, sin hacer ningún tipo de líneas, lo hicieron sólo observando y manipulando la hoja de la fotocopia.

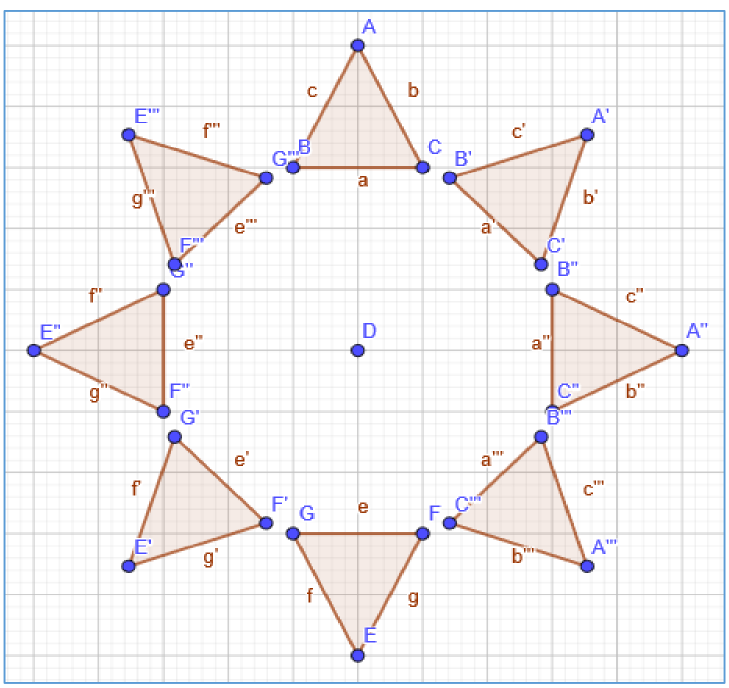
En esta tarea es funcional la asamblea de aula, puesto que les permite a los estudiantes y profesora establecer una conversación grupal para intercambiar y construir aprendizajes desde las preguntas y comentarios de todos. En este sentido, es preciso conocer la siguiente conversación, en la que un estudiante, luego de escuchar a los expositores pidió la palabra, más adelante otros compañeros participan de la conversación.

E4: ¿Cómo sabe que la rotación es de 180°?
E3: Yo sé que es por 180° porque yo aprendí que cuando uno hace la rotación y le queda al lado un poquito torcido es de 90°, pero como estos triángulos quedan al frente, pero del otro lado y con las puntas mirándose, entonces se ve el giro.
E1: pero el giro de 90° no siempre queda al lado derechito, es depende de donde se ubique el punto de rotación.
E3: sí, es cierto.
E6: ¿Cómo sabe que los triángulos que están por toda la estrella tienen rotaciones con otros números?
E2: es que uno mira que están de pa bajo haciendo como un circulo y las posiciones cambian, pero vuelve al inicio, como el reloj. No sé cómo decirlo. Profe mándeme a usar el portátil y el televisor pa yo mostrarles lo que quiero decir.
P: dale, úsalo.
(E2 se dirige al portátil, abre GeoGebra y realiza rápidamente la construcción de un triángulo y un punto, simulando la figura de la estrella. Inicia a hacer rotaciones de 45° sentido horario, después de haber realizado la cuarta rotación E4 pide la palabra)

E4: ya vi que la rotación de 180° deja la figura al otro lado, pero al frente, así como dijo Norli.
P: muy bien Yasuri, pero vamos a hablar especificando el nombre de las figuras, recuerda que las figuras se nombran por los puntos.
E4: ajam… yo veo que el <u>triángulo ABC se le hace rotación de 180° y queda el triángulo EFG.</u>
P: ¿ustedes entendieron? (pregunta a los estudiantes), ¿la siguen? (al unísono los estudiantes responden que sí) ¡Qué bien!
(E2 continuaba realizando las rotaciones, cuando terminó la construcción se dirigió a todos y mencionó)
E2: me gusta como se ve, todo bonito con los triángulos por todo lado. Yo antes no lo había hecho, <u>pero lo imaginé y si quedó así</u> (mientras señala al televisor la imagen que se aprecia en la Ilustración 84).
P: te quedó muy bonito. Yo tengo una pregunta, ¿por qué hiciste los ángulos de 45°?
E2: a mí me dio por hacerlos de 45° porque yo sé cómo quedan los de 90° y yo sé que así no son como la pulsera, entonces <u>pensé en un número bajito, pero no tanto</u> y como en el GeoGebra le aparece a uno con el número 45, entones yo <u>quise hacerlo así para ver qué salía.</u>
P: qué bien Yahira, o sea que no lo habías intentado hacer así ¡muy interesante!
Minuto 26:17 al minuto 30:52 Situación 2 Tarea 5

En la Ilustración 82 se muestra la construcción que E2 utilizó para hacer su explicación.

Ilustración 82 Construcción en GeoGebra de estudiante de grado 5°



Fuente 99 Producción de estudiante

En el diálogo anterior, se observó que las estudiantes expositoras atendieron las preguntas de sus compañeros, trataron de significar de la manera más clara posible los aprendizajes que ellas adquirieron por experimentación, se valieron de ejemplos como en el caso "*del reloj"* y de la construcción que realizó E2 por iniciativa propia; por su parte, el público no sólo entró en la conversación, sino que la mantuvo y aportaron comentarios significativos para el análisis de la pulsera.

Retomando la asamblea de aula, se aprecia que E1 pidió a la profesora proyectar su construcción para acompañar su explicación al grupo, acto seguido siguió la discusión añadiendo nuevos elementos: "*profe, es que a mí me parece que cuando el punto centro se aleja entonces los grados del ángulo son más pequeños y las figuras que se le hacen la rotación quedan más lejos y cuando el punto está más cerca el ángulo es más grande y las figuras rotadas se quedan pisando"* mientras mueve el punto centro comprobando al público su afirmación.

La anterior declaración deja ver las competencias en visualización y razonamiento de E1, pues el análisis del estudiante evidencia su habilidad para mover las figuras mentalmente y establecer la hipótesis que finalmente comprobó.

En la Ilustración 83 se presenta una de las pulseras que se le entregó al segundo grupo expositor, el grupo conformado por E5, E6 y E7.

Ilustración 83 Pulsera entregada en fotocopia

Fuente 100 Imagen de la web

En el siguiente apartado se aprecia la intervención de los estudiantes durante la socialización.

> *E6: yo veo que hay un poco de figuras.*
> *E7: es que cada color hace figuras.*
> *E6: veo rombos si lo miro para un lado, y veo cuadrados si lo miro para otro lado; esos rombos se <u>repiten</u> porque <u>tienen traslaciones</u>.*
> *E5: <u>y el vector de esa traslación es desde el punto del comienzo del rombo hasta el punto del comienzo del otro rombo del lado</u>. Yo sé porque en una tarea pasada yo vi que el pedacito que las separa es del tamaño del vector.*
> *E7: los rombos también se pueden <u>ver como rotaciones con centro en el punto dorado.</u>*
> *E6: y las figuras pequeñas que parecen pajaritos también están con traslación porque se ve que están derechitos.*
> *(Todos se quedan en silencio)*
> *P: no Sirley. Esa no es una traslación, mira que la orientación de las dos figuras es diferente.*
> *E7: yo creo que es una rotación porque vea como se ve el giro y las alas quedaron para un lado y estas para el otro.*
> Minuto 31:40 al minuto 32:37 Situación 2 Tarea 5

En la anterior conversación, se señalan algunas palabras que indican que los integrantes del equipo han adquirido aprendizajes conceptuales y procedimentales relacionados con las transformaciones geométricas. Por ejemplo, es claro que E6 la mayoría de las veces identifica figuras que se relacionan por medio de traslaciones; sin embargo, otro tipo de movimientos como la rotación, no la identifica. Por su parte, E5 en su planteamiento deja ver el andamiaje que ha elaborado con conocimientos anteriores para la recepción de nuevos aprendizajes.

Durante la asamblea de aula, E4 inicia el diálogo agregando nuevas transformaciones que ella había identificado.

> *E4: también <u>cada línea del cuadrado (señala los segmentos) se le ha hecho una rotación</u>, sino que no sé, profe déjeme hacerlo en el computador.*
> *P: claro, úsalo y nos explicas.*
> *(E4se toma un tiempo prudente para construir un segmento y ubicar en el plano cartesiano un punto centro sin ubicación especial, luego aplica la rotación de 90° y observa el resultado)*
> *E4: muevo el punto y lo ubico en el centro del cuadrado, aquí (va señalando en el televisor). Si ven, todos los puntos del segmento se tocan y ahora es cuadrado. Lo mismo es para hacer los otros.*

E7: Yasuri, ¿cómo sabías que había que hacer la rotación por 90°?
E4: me acordé que los cuadrados tienen los cuatro ángulos de 90°.
Minuto 37:03 al minuto 38:10 Situación 2 Tarea 5

Es importante notar que la estudiante identifica la relación de rotación gracias a sus competencias en visualización y razonamiento; a su vez, la estudiante demuestra consciencia del arrastre, por lo que el punto lo ubica en cualquier coordenada, pues sabe que, para su ejercicio de experimentación, en GeoGebra el punto es susceptible al movimiento.

En este apartado, E4 formula un planteamiento que a su juicio es correcto, realiza la experimentación y consigue corroborar su afirmación, validando sus aprendizajes en asamblea a de aula.

En general, en este análisis se evidenció que los estudiantes se encuentran preparados para identificar transformaciones geométricas en un patrón de pulseras, porque visualizan y razonan sobre los elementos constitutivos de las figuras y sus propiedades; el reto de la siguiente tarea debe ser el proceso contrario, que los estudiantes elaboren los patrones aplicando transformaciones a las figuras.

5.2.2.6. Tarea 6.

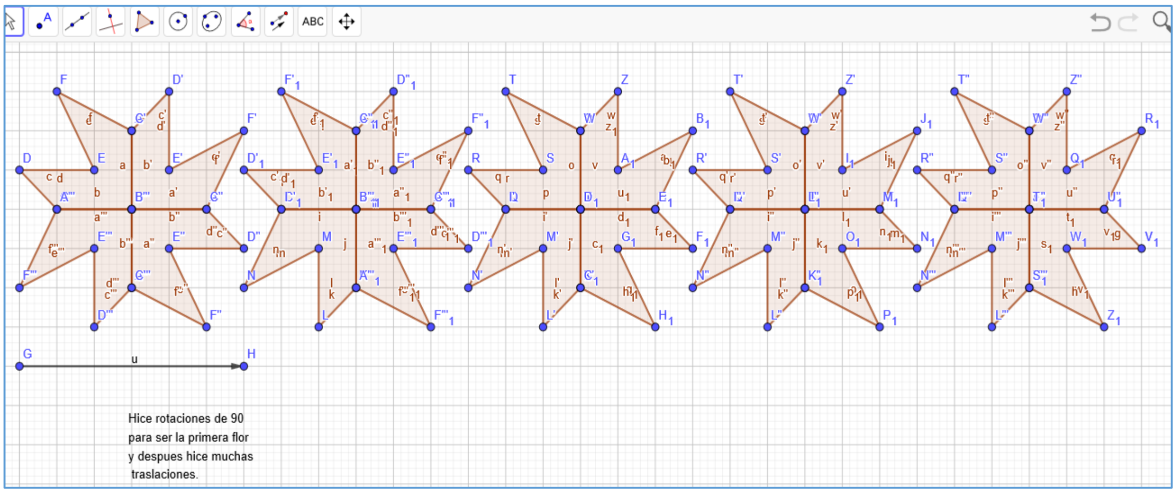
En esta oportunidad, se les recordó a los estudiantes la intención de organizar una *Muestra Empresarial* con los productos elaborados en ARTEmbera, por lo cual es necesario tener una cantidad aceptable de pulseras disponibles para la venta. Para llevar a cabo la exhibición, en la primera parte de la actividad los estudiantes construyeron en GeoGebra figuras a las que les aplicaron transformaciones para generar el patrón de la pulsera.

En el desarrollo de la primera parte de la actividad, se contempló que los estudiantes se encontraban a la expectativa y rápidamente se ubicaron en mesa redonda, recibieron el dispositivo que les correspondió (tres estudiantes usaron portátil y cuatro tabletas) y estuvieron atentos a la orientación de la profesora.

Acto seguido, inician la construcción de los patrones en GeoGebra utilizando las opciones: punto, segmento, vector, traslación, rotación, y configuración para la edición de color y estilo; antes de finalizar la sesión, los estudiantes expusieron sus diseños y explicaron los procedimientos.

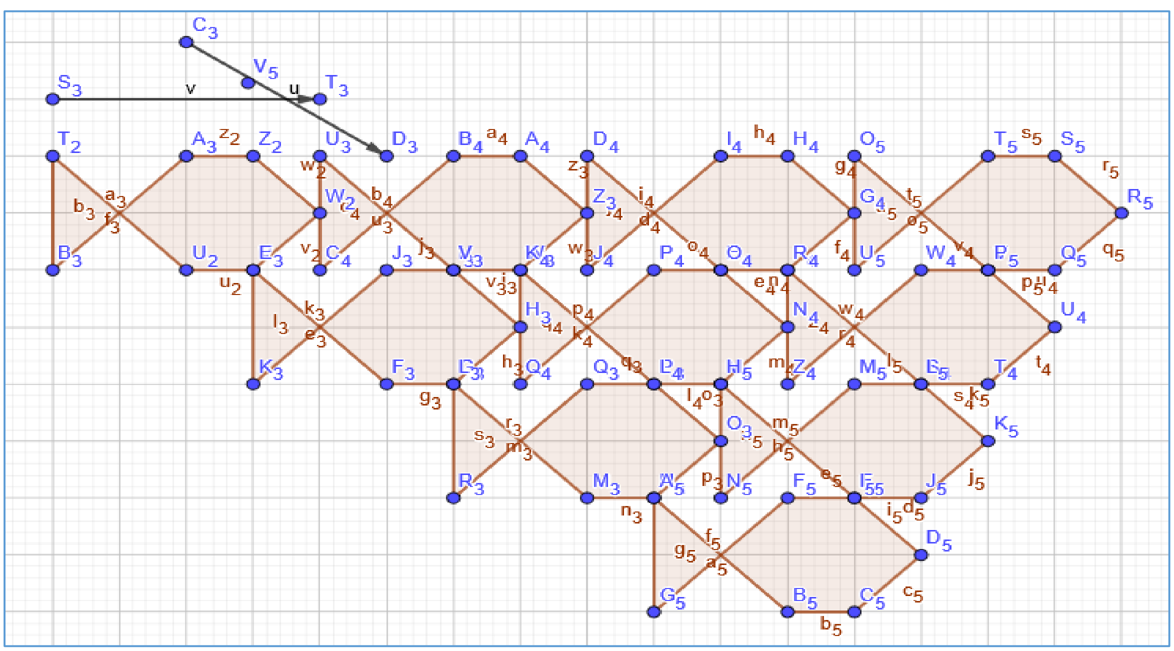
Dicho esto, es preciso a la menor brevedad ver algunas de las construcciones elaboradas por los estudiantes en las siguientes Ilustraciones.

Ilustración 84 Construcción en GeoGebra de estudiante de grado 3° “Flores de jardín”



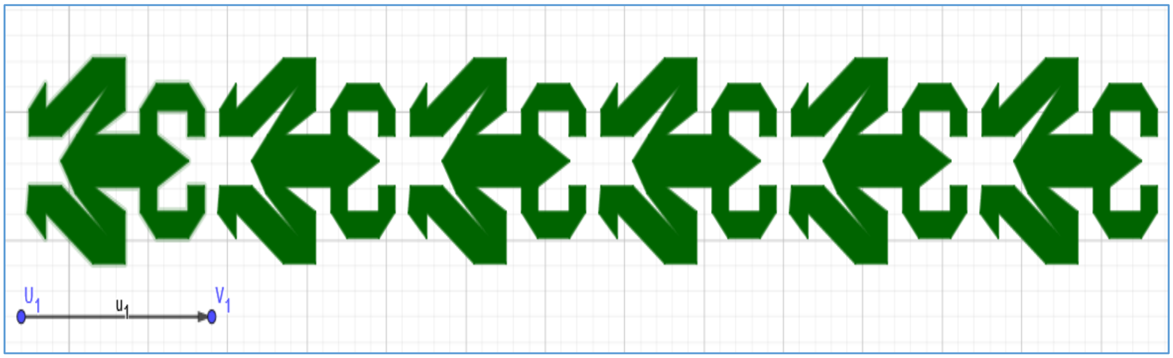
Fuente 101 Producción de estudiante

Ilustración 85 Construcción en GeoGebra de estudiante de grado 3° “Peces en el mar”



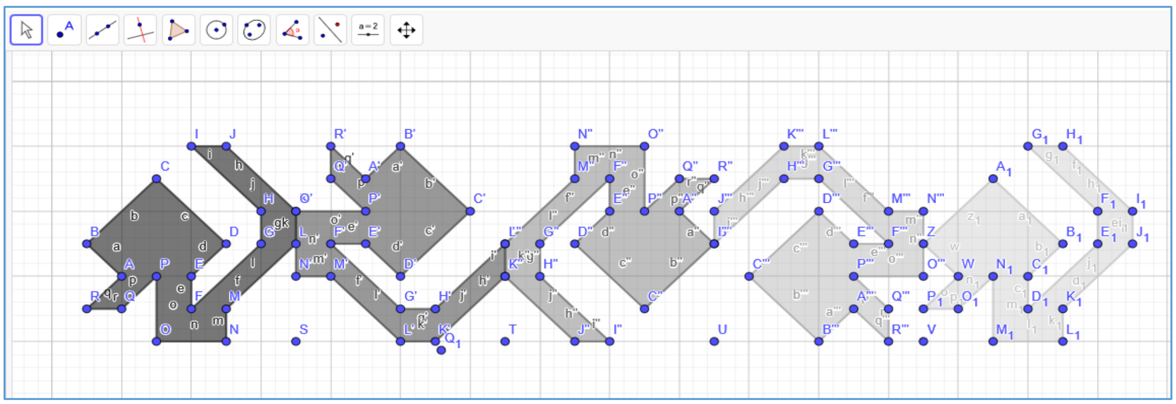
Fuente 102 Producción de estudiante

Ilustración 86 Construcción en GeoGebra de estudiante de grado 4° “Ranas saltarinas”



Fuente 103 Producción de estudiante

Ilustración 87 Construcción en GeoGebra de estudiante de grado 5° "Ardillitas"



Fuente 104 Producción de estudiante

Ilustración 88 Construcción en GeoGebra de estudiante de grado 5° “Colores indígenas”

Fuente 105 Producción de estudiante

Se observó que los estudiantes no necesitaron apoyo de la profesora para realizar ningún procedimiento, tampoco manifestaron dudas, sólo la llamaron para mostrar con alegría sus avances; así que, la profesora estuvo caminando de puesto en puesto comentando el trabajo con los estudiantes.

Para socializar los diseños, la profesora se valió de la asamblea de aula como mecanismo de evaluación, en tanto que valoró los aprendizajes matemáticos de los estudiantes por medio del desarrollo de la expresión oral, pues los estudiantes proyectaron en el televisor su construcción y explicaron al público el diseño elaborado; esto se contrastó con los desempeños en las tareas anteriores. La profesora modificó la última actividad de la tarea, agregando dos preguntas más *"cuéntanos si te equivocaste, dinos qué fue lo más difícil"*

En la Ilustración 84, se presenta la construcción de E7 denominada *"Flores del jardín"*, el estudiante explicó al auditorio el proceso de construcción diciendo que: *"yo primero usé polígono y, hice una figura que se pareciera a un pétalo y le hice rotación tres veces, es que imaginé hacer una flor. Le hundí rotación, hice un punto cerquita y le di 90°, me puse a correr el punto pa que me quedara bien como flor. Y para hacer las otras flores le hice traslación al primer pétalo que hice y volví a hacer las rotaciones como en la primera flor. A mí no me pareció difícil nada"*

La Ilustración 85 muestra una construcción titulada *"Peces en el mar"*, elaborada por E6 y cuya explicación es la que sigue: "*yo me acordé que en artística cuando hacemos lo de la cuadrícula hicimos este pez, y quise hacerlo aquí y para que se repita le hice muchas traslaciones. Yo al principio, hice el pez con segmento y quería hacer rotaciones y lo empecé a hacer así, pero me pareció muy duro porque no me daba, entonces lo hice mejor con traslación con un vector de para abajo y un vector de para un lado."*

Más adelante, en la Ilustración 86 se aprecia el diseño de E5, quien nombró su construcción como *"Ranas saltarinas"*, ella mencionó que: *yo hice la ranita y me pareció difícil porque no me daba. Yo la intenté hacer primero en una hoja cuadriculada y luego la hice en GeoGebra. Lo hice con polígono, pero primero hice un lado y luego intenté copiar ese lado para que la rana quede bien. Y le hice traslaciones varias veces. Y luego le cambié* *el color y las pinté de verde, también los puntos porque eran azules y no quedaba bien. También le quité las letras de los nombres.*

En la Ilustración 87 se observa la construcción de E3, quien elaboró un patrón que llamó *"Ardillitas"*, ella dice que: *"con polígono me puse a hacer figuritas y la que más me gustó fue esta, yo al principio no sabía qué hacer, hice esta y pensé que se parece a una ardilla. Lo hice con polígono, y luego le hice rotaciones de 90° y luego le cambié el color y los puse así desde oscuro a más claro."*

Por último, la Ilustración 88 titulada *"Colores indígenas"* fue elaborada por E2, quien explicó que: *yo quería hacer una figura diferente, así como nosotros Embera y pensé en esa porque cuando nos pintamos para bailar me gusta esa. Eso no fue difícil. Yo la imaginé y comencé a hacerla con polígono, hice traslaciones para un lado y para abajo, y también les cambié el color, le pinté con los colores del bastón. Y le hundí en los puntos para hacerlos invisibles y también en las otras letras.*

De manera general, se afirma que los estudiantes mencionados demostraron tener habilidad para utilizar la caja de herramientas del software, algunos estudiantes fueron más arrojados y se atrevieron a editar la configuración de los elementos, cambiaron colores y ocultaron las etiquetas y los puntos; los estudiantes en sus explicaciones manifestaron un "ver" la figura antes de hacerla y en su relato, refieren que cada vez que realizaron ciertos procedimientos lo hicieron convencidos del resultado porque lo habían analizado con antelación..

En la segunda parte de la actividad, se elaboraron las pulseras durante tres clases de 50 minutos; algunos estudiantes tejieron dos, tres, cuatro y hasta cinco pulseras. En el desarrollo de la actividad se contempló que los estudiantes estuvieron motivados, ordenados y concentrados, se ubicaron en mesa redonda como normalmente lo hacen y compartieron el material (hilo, mostacillas, tijeras, vela y encendedor); los estudiantes de grado quinto y la profesora asistieron a los compañeros cuando se enredaba el hilo y/o se salía la aguja, la profesora no fue requerida para responder preguntas.

Las Ilustraciones 89, 90 y 91 exhiben las pulseras tejidas inspiradas en el patrón "Flores de jardín" construido por E7 (ver Ilustración 84).

Ilustración 89 Pulsera tejida inspirada en el patrón "Flores de jardín"

Fuente 106 Producción de estudiante

Ilustración 90 Pulsera tejida inspirada en el patrón "Flores de jardín"

Fuente 107 Producción de estudiante

Ilustración 91 Pulsera tejida inspirada en el patrón "Flores de jardín"

Fuente 108 Producción de estudiante

La Ilustración 92 muestra la pulsera tejida con base en el diseño elaborado por E5 (ver Ilustración 87).

Ilustración 92 Pulsera tejida inspirada en el patrón "Ranas saltarinas"

Fuente 109 Producción de estudiante

Resultó ser un diseño muy creativo y otra estudiante quiso replicarlo utilizando otros colores (fondo azul y rana roja), en la Ilustración 93 se ve el proceso de elaboración de dicha pulsera.

Ilustración 93 Estudiante de grado 5° en proceso de tejido

Fuente 110 Imagen propia

En la Ilustración 94 se aprecia una pulsera tejida inspirada en el patrón construido por E2 “Colores indígenas” (ver Ilustración 88).

Ilustración 94 Pulsera tejida inspirada en el patrón “Colores indígenas”

Fuente 111 Producción de estudiante

Similar al anterior ejemplo, este patrón también tuvo buena acogida y un estudiante decidió de manera creativa, rediseñarlo y montarlo en un llavero. Ver Ilustración 95.

Ilustración 95 Llavero tejido

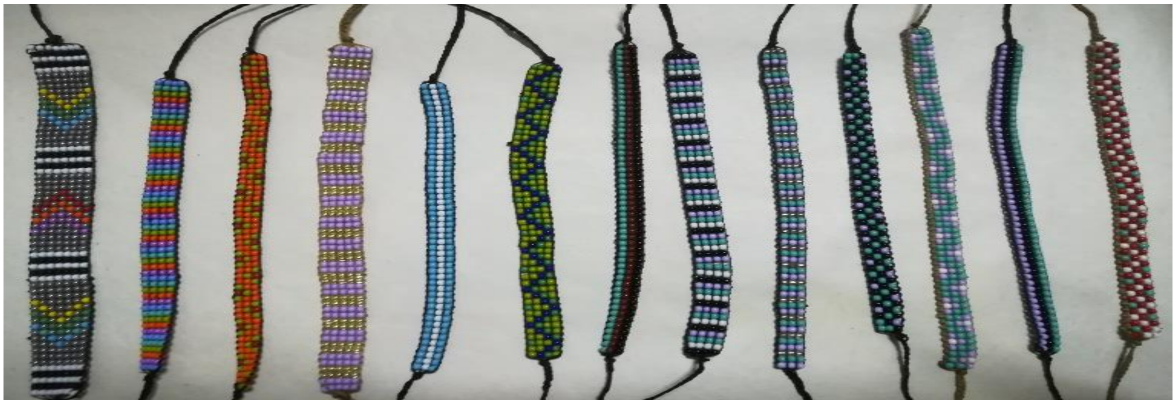
Fuente 112 Producción de estudiante

En las Ilustraciones 96, 97, 98 y 99, se muestran las demás pulseras elaboradas al finalizar la segunda parte de la actividad, las cuales son los productos que se vendieron en la muestra empresarial.

Ilustración 96 Pulseras para venta

Fuente 113 Producción de estudiante

Ilustración 97 Pulseras para la venta



Fuente 114 Producción de estudiante

Ilustración 98 Pulseras para la venta

Fuente 115 Producción de estudiante

Ilustración 99 Pulseras para la venta

Fuente 116 Producción de estudiante

Luego de terminar la producción, la profesora pidió atención a los estudiantes y añadió unas preguntas a la actividad, se dirigió al grupo y mencionó:

> *P: Bueno chicos, oficialmente está lista la producción. Vengan, vamos a charlar un poco. Yo quiero que hagamos el último comentario de ARTEmbera en este año. Yo quiero saber ¿qué aprendieron?, o sea, si yo les digo ¿qué les dejó las tareas de ARTEmbera?, entonces ¿vos qué me decís?*
> *E6: me parece que con matemática es más fácil y más rápido hacer patrones.*
> *E1: a veces no tengo necesidad de hacer el patrón con lápiz y papel, sino que me lo imagino y de una lo hago.*
> *E3: a mí me gusta mucho aprender a hacer traslaciones y rotaciones con las cosas de nosotros. Yo nunca pensé que en la escuela iba a aprender algo así.*
> *E2: me gustó aprender a hacer figuras con las traslaciones y rotaciones.*
> *E4: yo a todas las cosas que veo, le miro si tiene transformaciones.*
> *E5: a mí también me gusta aprender con cosas de nosotros. Cuando yo hacía las pulseras me gustaban las de loros, tigres y de animales, pero ahora me gustan más las pulseras geométricas porque ya sé cómo se hicieron esas figuras y me lo imagino en la mente.*
> *E7: yo aprendí a hacer patrones con matemática. Me gustó que todas las tareas eran para que al final hiciéramos la Muestra.*
> Minuto 42:03 al minuto 43:10 Situación 2 Actividad 6c

De acuerdo al fragmento anterior, se afirma que los siete estudiantes saben qué aprendieron, pues sus intervienciones aluden específicamente al conocimiento disciplinar inherente a las tareas, es decir las transformaciones geométricas (traslaciones y rotaciones); adicionalmente, se aprecia que los estudiantes saben para qué sirve lo que han aprendido, pues fue por medio de la experiencia que ellos se acercaron a estas relaciones matemáticas y vivenciaron su uso; también, se evidencia que estos aprendizajes modifican las actuaciones de los estudiantes, tal como lo manifestó E4 cuando dijo: *"yo a todas las cosas que veo, le miro si tiene transformaciones"*.

Esta conversación muestra pistas que dan certeza que los estudiantes pueden identificar las transformaciones geométricas estudiadas, tal como lo plantean E2, E3 y E4 en sus intervenciones; se observa que los estudiantes pueden usar los aprendizajes adquiridos para optimizar una actividad, el tejido de pulseras en mostacillas; y finalmente, se contempla que los estudiantes perciben que la actividad resultó provechosa.

Un par de días después, se organizó la Muestra Empresarial en la sede principal con la participación de los estudiantes de bachillerato, de primaria de todas las sedes, los profesores y el rector de la institución. En la Muestra participaron varios proyectos de emprendimiento, ciencia y tecnología, la sede José María Carbonell se visibilizó con el proyecto ARTEmbera.

Las siguientes Ilustraciones exhiben algunos momentos destacados en el desarrollo de la Muestra Empresarial. Se vendieron todos los productos.

Ilustración 100 Participación de ARTEmbera en la muestra empresarial institucional

Fuente 117 Producción de estudiante

Ilustración 101 Participación de ARTEmbera en la muestra empresarial institucional

Fuente 118 Producción de estudiante

Ilustración 102 Profesora y algunos estudiantes de ARTEmbera

Fuente 119 Producción de estudiante

Llegados a este punto, se afirma que el conjunto de actividades que se propuso a los estudiantes les permitió avanzar a un nivel superior de visualización y razonamiento configural, puesto que, todos lograron construir patrones físicos y digitales utilizando las transformaciones geométricas, accediendo a un nivel de orden superior en la visualización y en consecuencia en el razonamiento. De esta manera, se cumple la conjetura propuesta para la situación didáctica 2.

5.3. Fase 4: análisis retrospectivo

En este apartado, se dilucidan los aspectos más importantes luego de haber finalizado la intervención y cada uno de los análisis locales. Este análisis es recapitulador y se hace desde una mirada general, en donde se incluyen varios aspectos como: los aprendizajes matemáticos, los procesos cognitivos para el aprendizaje de la geometría, la metodología (conjetura y trayectoria) y el software utilizado.

Ahora bien, respecto a los aprendizajes matemáticos se afirma que los estudiantes partícipes adquirieron conocimientos de tipo conceptual y procedimental, por un lado, identificaron elementos y figuras geométricas y, por otro lado, aplicaron las transformaciones de traslación y rotación en GeoGebra y las reconocieron en las artesanías que elaboraron. Sin embargo, ellos desconocen la traslación y rotación desde la demostración y construcción utilizando papel, lápiz, regla y transportador, pues en el diseño de las tareas sólo se contempló hacerlo desde GeoGebra y desde las pulseras.

Sin lugar a dudas, el conjunto de actividades permitió que los estudiantes comprendieran las transformaciones geométricas, tal como se evidenció en las producciones de los estudiantes y en los fragmentos de la clase; así, se abre paso para el futuro aprendizaje de transformaciones más complejas como las homotecias.

Respecto a los procesos cognitivos para el aprendizaje de la geometría, esto es visualización y razonamiento matemático, se evidenció que una situación común entre aquellos estudiantes que presentaron dificultades, se relacionó con el no poder girar mentalmente la representación de una figura porque se habituaron a la traslación. Lo anterior, se equipara a un obstáculo didáctico, en la medida que cierta operatividad le sirvió al estudiante para una cuestión, es decir para desarrollar una actividad, pero para otra definitivamente no.

De los aspectos relevantes de la tabla 13, se observó que los siete estudiantes se ubicaron en la entrada no icónica de la visualización, en tanto que reconocieron las figuras de manera global, sus elementos constitutivos y propiedades geométricas (diferencian las transformaciones de traslación y rotación). A su vez, los niños se situaron en el nivel de percepción de los elementos constitutivos, puesto que, se empoderaron de una mirada geométrica para identificar elementos constitutivos, distinguir relaciones y propiedades geométricas. De los tipos de aprehensión los estudiantes transitaron entre la aprehensión operatoria y discursiva; la primera, significa que los estudiantes algunas veces realizaron modificaciones a la figura para resolver un problema, agregando y/o eliminando elementos y manipulando los elementos constitutivos; la segunda, significa que los estudiantes fueron capaces de generar afirmaciones matemáticas con un dibujo que le acompañara, relacionaron las características de la figura y el enunciado y por último, asociaron una figura a un discurso al desarrollar la actividad propuesta en un enunciado.

Al inicio se veía una brecha amplia entre el discurso matemático de los estudiantes de 3°, 4° y 5° al final, se observó en los estudiantes cierta paridad, pues de acuerdo a los fragmentos presentados, se logró evidenciar que entre los estudiantes hubo una conversación matemática fluida.

El hecho de que la visualización de los estudiantes transite entre la aprehensión operatoria y discursiva, permitió que el estudiante generara un discurso matemático alrededor de un registro figural, vinculado cognitivamente a las modificaciones realizadas a la figura para encontrar la solución, en otras palabras, razonamiento configural.

La metodología “experimentos de enseñanza” permitió analizar el aprendizaje en contexto, en escenarios reales, identificando el orden, las regularidades y los patrones de los momentos destacados de la intervención de aula. En esta metodología no existen las generalidades, los experimentos de enseñanza son inacabados, pues permitieron la modificación sobre la marcha, así, las acciones específicas de la profesora contribuyeron a cambios menores que se les realizaron a algunas tareas.

De otro lado, se comprobó la conjetura formulada para el diseño, pues se encontró que la propuesta de enseñanza en geometría escolar (el diseño y la implementación de las tareas ARTEmbera) que esta atendió, por una parte, los criterios cognitivos que la actividad geométrica requiere (visualización y razonamiento) y por otra parte el capital cultural de los estudiantes.

Uno de los mecanismos más efectivos para vivenciar el trabajo en equipo, la anticipación, la negociación y la institucionalización de saberes es la asamblea de aula. Este instrumento se utilizó en la mayoría de las tareas del diseño, en donde los estudiantes elaboraron y formalizaron sus argumentos para explicar y validar las propiedades y procedimientos puestos en juego.

En la intervención se evidenció que cuando los grupos de trabajo se conforman con niños y niñas de diferentes grados, hay una vasta posibilidad de aprendizaje con el otro, los niños pequeños se convierten en estudiantes autónomos, los interrogantes que ellos formulan a los estudiantes de grados avanzados, obliga a estos últimos a perfeccionar su discurso, sus representaciones y estrategias para hacerlas de fácil comprensión a los demás y así acercarse a niveles superiores de visualización y razonamiento.

Con relación al uso de las herramientas tecnológicas, se vio que el uso de GeoGebra en tableta sin mouse resultó incómodo para algunos estudiantes, sin embargo, rápidamente se habituaron y se evidenció que definitivamente los estudiantes de la actualidad son los nativos digitales. Particularmente el software tiene una interfaz amigable y no se registraron dificultades aspecto.

Así pues, entregados los análisis locales y el análisis retrospectivo, se evidencia que se ha cumplido con el cuarto y quinto objetivo específico que corresponde a la fase 3 y 4 respectivamente, las cuales se relacionan por un lado, con el análisis de las producciones de los estudiantes para valorar el avance en las competencias visualización y razonamiento en el aprendizaje de las transformaciones geométricas; por otro lado, con la determinación de los aprendizajes de los estudiantes de 3°, 4° y 5°, luego de haber desarrollado las tareas que componen la situación didáctica ARTEmbera.

5.4. Fase 5: ventajas y desventajas del diseño

En este apartado, se exponen una serie de afirmaciones positivas y negativas acerca del diseño aplicado, con la finalidad de valorar las tareas propuestas y formalizar el objetivo general de la investigación; adicionalmente, se brinda información complementaria a los interesados en esta investigación.

De las ventajas del diseño observadas durante la intervención de aula, se tiene que este diseño es una orientación didáctica, en otras palabras, una propuesta de geometría escolar que aborda las transformaciones geométricas; esta propuesta comprende un conjunto de tareas que consideran por un lado, el tejido de pulseras concebido como una actividad étnica y por otro lado, la construcción de figuras geométricas en la elaboración de los diseños seleccionados, en cuyas construcciones aparecen las traslaciones y las rotaciones.

Una ventaja de ARTEmbera es su naturaleza de ser aplicado en multigrado, aplicable en los grados de 3°, 4° y 5°, tal como se evidenció en esta investigación. Adicionalmente, se observó que todas las tareas del diseño se encuentran estrechamente relacionadas, es decir que, el producto y/o aprendizaje de una tarea resulta ser el insumo de la próxima, lo cual hizo que los estudiantes encontraran un sentido a las actividades propuestas. Las tareas resultaron ser muy valiosas porque permitieron que los estudiantes participantes transitaran desde un nivel básico de la competencia matemática hasta niveles de orden superior.

Otra ventaja que se contempla, es que este diseño es una oportunidad para que tanto estudiantes como profesores se acerquen a la relación entre geometría y cultura, al tiempo que, los estudiantes mestizos y Embera conocen formas complejas de desarrollo de la geometría, desde el conocimiento de prácticas étnicas y saberes matemáticos, el uso de herramientas tecnológicas y material manipulativo.

Lo anterior, alimenta una posible línea de investigación en el marco de la Etnomatemática desde diferentes ámbitos a saber, institucional, regional y/o nacional; visibilizando las prácticas y saberes que generan pensamiento matemático en diferentes contextos. En este sentido, la propuesta se sumará al corpus teórico de la Etnomatemática, brindando alternativas innovadoras para enfrentar procesos de enculturación matemática en otras comunidades indígenas, de Colombia y América Latina. Los resultados de la investigación, motivarán a investigadores y estudiantes de pregrado y posgrado para que implementen y modifiquen la presente propuesta de acuerdo al contexto.

Una ventaja adicional del diseño, es que algunas actividades se plantean a modo de competencia, promoviendo una competencia sana, es posible que este hecho motive a profesores e investigadores, a continuar diseñando situaciones didácticas mediadas por la Gamificación como estrategia para la motivación y el aprendizaje.

Al darle un viraje a esta escritura, es preciso mencionar la única desventaja que se encontró en el presente diseño. Se reconoce como desventaja, que desde el diseño no se propuso tareas sobre las transformaciones geométricas de manera formal, esto es, a través de construcciones y demostraciones a lápiz y papel y/o en GeoGebra, pues se admite que es necesario que se propongan actividades a los estudiantes en las que ellos accedan al objeto matemático desde sus múltiples representaciones semióticas, es decir, darle otra perspectiva a los objetos y relaciones matemáticas. Sin embargo, la investigadora no contempló esta opción porque, por un lado, la Situación didáctica no se planteó para un grado específico sino para la escuela multigrado y, por otro lado, porque se considera que ese tipo de construcciones corresponden a niveles avanzados.

Dicho esto, se evidencia que se ha cumplido con el sexto y último objetivo específico referido a las ventajas y desventajas del diseño luego de su implementación.

Conclusiones

Antes de plantear las conclusiones de este trabajo, se hace especial énfasis en la identificación de la población, puesto que los resultados aquí encontrados son válidos sólo para estos participantes y con las condiciones propias de este entorno, por lo cual no es posible establecer grandes generalidades. A continuación, se exponen cinco conclusiones de esta investigación y las apreciaciones de la profesora investigadora de la sede José María Carbonell.

Con relación al objetivo general planteado al inicio de esta investigación, se aprecia que las fases propuestas en la metodología y el conjunto de tareas permitieron la consecución de este. En cada análisis, particularmente en el retrospectivo se recogen, por un lado, los logros de los estudiantes en términos de aprendizajes matemáticos de tipo conceptual y procedimental y, por otro lado, se categorizan los niveles de visualización y razonamiento alcanzados por los niños y niñas participantes.

En primer lugar, se concluye que los estudiantes adquirieron experticia para realizar transformaciones geométricas en GeoGebra y para elaborar diseños de pulseras a través de patrones generados con dichos movimientos, esto, gracias al desarrollo de las tareas que componen el diseño ARTEmbera. De manera que, se puede asegurar que los niños de los grados 3°, 4° y 5° de primaria, de la sede José María Carbonell de la vereda Las Brisas en el municipio de Sevilla (Valle) durante el año lectivo 2019, comprendieron las relaciones matemáticas de traslación y rotación.

En segundo lugar, es preciso mencionar que, once actividades (cinco de la situación 1 y seis de la situación 2), son insuficientes para lograr que los estudiantes se ubiquen en niveles de orden superior de la visualización y el razonamiento, pues en realidad en un proceso complejo, para esto es necesario que se generen actividades que incorporen diferentes objetos matemáticos y sus múltiples representaciones; es por esto que, cabe señalar que esta investigación no esperaba que al finalizar los estudiantes fueran individuos versados en las competencias visualización y razonamiento, sino que, mediante el desarrollo de las actividades se fortalecieran dichas competencias.

En tercer lugar, la clase de matemáticas se convirtió en una comunidad de aprendizaje, en la medida que los estudiantes en el marco de esta investigación, aprendieron a comunicarse utilizando un discurso matemático, participaron del proceso de compartir y desarrollar significados matemáticos, es decir que aprendieron a pensar matemáticamente. Conforme a lo anterior, se destaca que se observó paridad en el desempeño de los estudiantes, es decir, una brecha casi nula en el discurso matemático empleado en el desarrollo de las tareas; esto se afirma, en virtud de que los siete participantes se ubicaron en la entrada no icónica de la visualización, se situaron en el nivel de percepción de los elementos constitutivos y transitaron entre la aprehensión operatoria y discursiva. Este hecho permite afirmar que, los estudiantes al elaborar un discurso matemático alrededor de un registro relacionado a las modificaciones hechas a una figura, generan razonamiento configural.

Adicionalmente, se identificó, por un lado, que los estudiantes de los grados quinto y cuarto, se destacaron en sus razonamientos al realizar explicaciones y, por otro lado, que los estudiantes de grado tercero, a pesar de pertenecer a un grado inferior, lograron comunicarse en el desarrollo de las tareas y engranar excepcionalmente en la comunidad matemática que se convirtió la clase.

En cuarto lugar, con relación con la metodología empleada, se vivenció que los "experimentos de enseñanza" permitieron, de un lado, analizar el aprendizaje en escenarios reales y, de otro lado, refinar progresivamente la conjetura de aprendizaje, las tareas del diseño y la actuación de la profesora durante la intervención de aula.

En quinto lugar, esta investigación cobra importancia para la educación matemática, en virtud de la aplicabilidad del diseño para vivenciar aprendizajes escolares a partir del tejido de pulseras (actividad propia de los Embera Chamí), dado que posibilitó tanto a estudiantes como a la profesora, valorar las actividades de los indígenas desde una perspectiva diferente a lo manual, lo artesanal o lo bonito, pues hubo un reconocimiento de la existencia de un pensamiento matemático formal y complejo inmerso en el proceso del tejido de las mostacillas en las pulseras Embera. De ahí que se considere que, en este contexto cultural, la geometría transformacional es una manera de pensar, comunicar y actuar al servicio de la preservación de la identidad cultural de las minorías del país.

Finalmente, dentro de las apreciaciones de la profesora investigadora encargada de la sede, se destacan los cambios positivos que mostraron los estudiantes, especialmente aquellos pertenecientes a la comunidad indígena Embera Chamí, pues adquirieron habilidades comunicativas y de expresión corporal que anteriormente carecían y que no les permitía establecer relaciones personales con personas diferentes a su comunidad indígena. Este hecho se debe a la decisión de realizar equipos de trabajo no convencionales, lo cual obedece a las condiciones de la escuela rural de Colombia, esto es, estudiantes campesinos, indígenas, desplazados, negros, con necesidades educativas especiales, extra edad, repitentes, trabajadores infantiles, con familias disfuncionales, etc., en un salón con un solo profesor para todos los estudiantes desde preescolar, hasta grado quinto a la vez, lo cual como se dijo en otra oportunidad, se visibilizó como una oportunidad y no como una dificultad. Así pues, el diseño aplicado es innovador y totalmente aterrizado a la realidad de las escuelas rurales del país.

Recomendaciones

En este apartado se encuentra una serie de planteamientos, sugeridos a modo de recomendaciones, en un primer momento, recomendaciones de tipo didáctico a investigadores y colegas que pretendan emprender un proyecto similar y, en un segundo momento, recomendaciones técnicas a la Universidad Icesi (Cali) y a la Institución Educativa María Auxiliadora (Sevilla).

A investigadores y colegas, lo primero que hay que decir, es la importancia de conseguir motivación por parte del estudiante, pues el deseo es un prerrequisito para el aprendizaje; en el caso particular de esta investigación, es necesario que los participantes sientan la necesidad de tener un discurso matemático que les permita ser miembros de la comunidad escolar. Para lograr este cometido, se hace especial énfasis en la importancia de la comunicación como vehículo principal para compartir el significado matemático, por esto, se debe priorizar actividades como la asamblea de aula o aquellas que permitan que los niños y niñas expresen sus explicaciones, argumentos y contraejemplos.

A su vez, se debe comprender que el desarrollo de competencias matemáticas mediante un proceso de enculturación matemático, como es el caso de esta investigación, no se genera de manera inmediata ni lineal, sino que es un proceso prolongado, complejo y resulta ser una expectativa a largo plazo, pero inacabada, siempre evolutiva; por esta razón se recomienda implementar la negociación de manera constante, dinámica y continua, para comunicar y compartir significados matemáticos. Así, el estudiante partícipe se integra a la comunidad escolar y se hace sujeto del proceso de enculturación matemática.

Se recomienda también, para aquellos trabajos en torno a los conceptos de perímetro, área, congruencia y semejanza de figuras a través de las pulseras en mostacillas, es importante que se tenga en cuenta que las figuras homólogas no mantienen exactamente las medidas, ni la forma, ni el tamaño, debido a las irregularidades de cada pepita o mostacilla checa. Si se quiere lograr medidas exactas, se recomienda usar la marca Miyuki delica, pues es un tipo de mostacilla japonesa en cristal cuya forma es cilíndrica, usada en la alta bisutería y reconocida por su perfección en forma y tamaño.

A la Universidad Icesi, se le recomienda mejorar en dos aspectos. El primero, se refiere a la gran cantidad de estudiantes matriculados al estudio de Maestría en Educación, pues durante el periodo académico 2018 – 2019, hubo cerca de sesenta estudiantes distribuidos en solo dos grupos, es decir que cada grupo se integró con casi treinta maestrandos. Este hecho, no permitió que las clases se desarrollaran de la mejor manera, por la gran cantidad de intervenciones, el amplio número de estudiantes que conformaron equipos de trabajo (de cinco a seis), el reducido espacio de algunos salones, entre otros factores, generaron dificultades en la participación y en la evaluación, por lo que se recomienda de manera respetuosa, establecer grupos de máximo quince maestrandos para cada clase.

El segundo aspecto a recomendar, apunta hacia la apertura de más cursos académicos enfocados a las disciplinas de formación y/o de interés de los maestrandos, pues de manera personal se afirma que, un solo curso en didáctica de la matemática no es suficiente. Esta situación mejora, si inicialmente se estudia el perfil de los estudiantes y su proyecto de investigación, adicionalmente, si se realizan encuestas a los estudiantes desde el primer semestre, para definir qué cursos son requeridos.

A la Institución Educativa María Auxiliadora, se le recomienda continuar el trabajo interno que se viene adelantando, en cuanto a la restructuración del PEI y de los planes de área y no abandonar las ideas rectoras de inclusión de la cultura de las minorías étnicas presentes en la comunidad educativa.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52. Pp. 215-241.

Aroca, A. (2007). *Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural. Caso de estudio: comunidad indígena Ika – Sierra Nevada de Santa Marta*. (Tesis de Maestría). Universidad del Valle. Cali.

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamérica. Bogotá. Pp. 33-60.

Audor, Y. y Echeverry F. (2013). La matemática en los malabares. *Revista científica.* ISSN 0124 2253. Edición especial. Bogotá. Pp. 321-325. https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/7059

Audor, Y. (2016). *Visualización y razonamiento matemático. Una situación de aprendizaje acerca de la relación de congruencia, implementada a través de un experimento de enseñanza en una escuela rural.* (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle. Cali.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. España: Editorial Paidós.

Bishop, A. J. (2005). *Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Blanco, H. (2008). Entrevista al profesor Ubiratan D´Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática.* 1(1).

Broderick, J. (1998). *El imperio de Cartón.* Recuperado en http://www.ellibrototal.com/ltotal/?t=1&d=6921

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas*. (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986).

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática. 17(3)*. Pp. 53-76.

Censat (2009) Cabildo abierto por la vida. No a las plantaciones forestales. https://censat.org/es/actividades/cabildo-abierto-por-la-vida-no-a-las-plantaciones-forestales

CENTRO NACIONAL DE MEMORIA HISTÓRICA. (2014). *"Patrones" y campesinos: tierra, poder y violencia en el Valle del Cauca (1960 – 2012)*. Bogotá: CNMH.

COMISIÓN ECONÓMICA PARA AMÉRICA LATINA [CEPAL]. (2014). *Los pueblos indígenas en América Latina.* Avances en el último decenio y retos pendientes para la garantía de sus derechos. Chile.

Chevallard, Y., y Johsua, M. (1982). Un exemple d´analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématique.*

Chevallard, Y. (1997). *La Trasposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Barcelona-España: AIQUE Grupo Editor. https://es.slideshare.net/observatorio2015/yves-chevallardla-trasposicion-didactica-del-saber-sabio-al-saber-enseado

Colbert, V. y Mogollón, O. (1980). *Hacia la Escuela Nueva*. República de Colombia. Ministerio de Educación Nacional. Ediciones Programa Escuela Nueva.

D'Ambrosio, U. (2001) Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad. Belo Horizonte: Autêtica.

Delors, J. (1996*). Los cuatro pilares de la educación. La educación encierra un tesoro.* Informe a la UNESCO de la Comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI, Madrid, España: Santillana/UNESCO. Pp. 91-103.

Droguett, L. (2008). *Danzas religiosas: ¿alguna relación con la matemática?* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad de Valparaíso. Chile.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*. Pp. 37-65.

Duval, R. (1999). Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle.

Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning.

Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Traducción de Miryam Vega Restrepo. Cali, Universidad del Valle.

Duval, R. (2004b). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y… una quinta. *En M. D. Ciencia, números, formas y volúmenes en el entorno del niño*. Pp. 159 - 188. Madrid.

Environmental Justice Organizations, Liabilities and Trade. [EJOLT]. (2014). Smurfit-Kappa Cartón de Colombia en Sevilla. Recuperado en https://ejatlas.org/conflict/smurfit-kappa-carton-de-colombia-en-sevilla

Ertmer, P. y Newby, T. (1993). Conductismo, cognitivismo y constructivismo: una comparación de los aspectos críticos desde la perspectiva del diseño de instrucción. Performance Improvement Quarterly 6(4). Pp. 50-72.

Fernández, M. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial.* (Tesis doctoral). Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela.

Fernández, T., Godino, J. y Cajaraville, J. (2012) Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico. *Boletim de Educação Matemática, 26(42A*). Pp. 39-63 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro. Brasil.

Fernández, E. (2014). La inteligencia cultural en los grupos interactivos: un estudio de caso en la Comunidad de Aprendizaje La Pradera de Valsaín (Segovia). *Revista de Psicología, Ciències de l'Educació i de l'Esport ISSN: 1138-3194*. Pp 85-95.

Fontán, M. (2004). Evaluación curricular y mejora didáctica. *El guiniguada – N°13.* Pp. 43-58.

Galeano, J. (2015). *Diseño de situaciones para el trabajo con figuras geométricas basado en las operaciones cognitivas de construcción, visualización y razonamiento.* (Tesis de Maestría). Universidad del Valle. Cali.

García, B. (2015). Orientaciones didácticas para el desarrollo de Competencias Matemáticas. Universidad de la Amazonia.

GeoGebra Group. (2019). Acerca de GeoGebra. Recuperado de https://www.geogebra.org/about

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14 (3*). Pp. 325-355.

Godino, J., Gonzato, M., Cajaraville, J. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30 (2). Pp.* 109-130.

Gómez, R. (2004). Calidad educativa: más que resultados en pruebas estandarizadas. *Revista Educación y Pedagogía. 16(38).*

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dermolen, J. (1996). Space and Shape, en Bishop and others, A.J. (eds.). International handbook of Mathematics Education, Pp. 161-204 (1).

ICFES. Cuadernillos de Pruebas Saber años 2016, 2017 y 2018.

Kubovy, M. (1996). Psicología de la perspectiva y el arte del Renacimiento. Madrid: Trotta.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN]. (1998). *Matemáticas, Lineamientos Curriculares*. Santiago de Cali. Artes Gráficas Universidad del valle.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Recuperado el 18 de abril de 2018 en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN]. (2009). *Documento No. 11 Fundamentaciones y orientaciones para la reglamentación del Decreto 1290 de 2009.* Bogotá.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. [MEN]. (2010). Embera Chamí. http://observatorioetnicocecoin.org.co/cecoin/files/Caracterizaci%C3%B3n%20del%20pueblo%20Embera%20Cham%C3%AD.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2016). [MEN]. *Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje (V2) y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas.* Bogotá.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. 29(1)*. Pp. 75-88.

Municipios del Valle también son Patrimonio Cultural de la Humanidad. (27 de junio de 2011). *El País*. Recuperado de https://www.elpais.com.co/valle/municipios-del-tambien-son-patrimonio-cultural-de-la-humanidad.html

OBSERVATORIO DE CONFLICTOS AMBIENTALES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL. [OCA]. (2014). Smurfit-Kappa Cartón de Colombia en Sevilla (Plantaciones, Smurfit, Eje Cafetero) https://conflictos-ambientales.net/oca_bd/actions/view/1446

Ruíz, A., Chavarría, J. y Alpízar, M. (2006). La escuela francesa de didáctica de las matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Número 2.*

Sacristán, G. (1992). Capítulo 10 La evaluación en la enseñanza. *Comprender y transformar la enseñanza.* Ediciones Morata. Madrid.

Salazar, A. (2017). *Estrategia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones en el plano cartesiano en el grado sexto.* (Tesis de Pregrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Santos, L. (2003). Procesos de transformación de artefactos tecnológicos en herramientas de resolución de problemas matemáticos. *Boletín de la asociación matemática venezolana.* 10(2). Pp. 195 – 211.

Tabares, J. (2016). *Estado del arte de la Etnomatemática en Colombia.* (Tesis de Pregrado). Universidad Nacional Abierta y a Distancia. Medellín.

Tobón, S. (2006). Formación basada en competencias: pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica. Ecoe. ISBN 958648419X

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(2)*. Pp. 275-300.

Torregrosa, G., Haro, M., Penalva, M., Martínez y Llinares, S. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje.

Vasco, C., (2003). Objetivos específicos, indicadores de logro y competencias: ¿y ahora estándares? *Revista: Educación y Cultura. Editorial: FECODE. ISSN: 0120-7164. 62.* Pp. 33-48.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y Aprendizaje*, 36(2). Pp. 131-161. doi:10.1174/021037013806196283

WRM. (2006). Colombia: Letter fot the de-certification of Smurfit Kappa Cartón de Colombia https://wrm.org.uy/other-relevant-information/colombia-letter-for-the-de-certification-of-smurfit-kappa-carton/

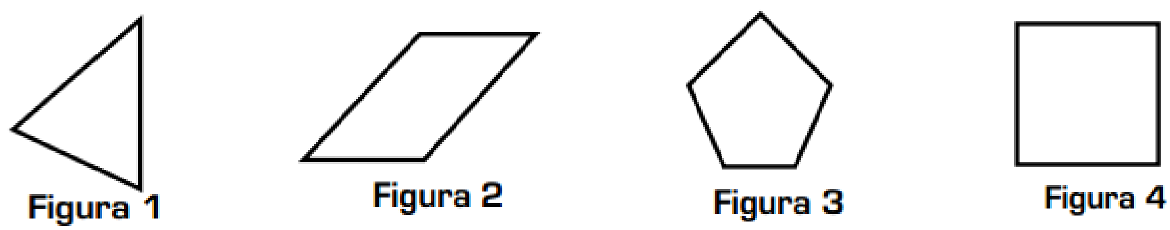
Yojcom, D., Castillo, E., Gavarrete, M., Tun, M., Pou, S., Flores, W., Morales, L., y Aroca, A. (2016). El programa etnomatemática en Centroamérica y Norteamérica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, 9(2)*. Pp. 202-237. Recuperado el 20 de octubre de 2018 en: http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/article/view/245

Anexo A: Pruebas Diagnósticas

Esta primera sección del anexo, comprende las dos pruebas diagnósticas diseñadas para los grupos segundo-tercero y cuarto-quinto. Las imágenes y las preguntas del diagnóstico se tomaron de las Pruebas Saber de los años 2016, 2017 y 2018, se aclara que algunas preguntas fueron modificadas, pero las imágenes sí son propias de las pruebas mencionadas.

A. 1 Grados: Segundo – Tercero

1. ¿Cuáles figuras tienen el mismo número de lados?



Escoge una de las siguientes opciones.

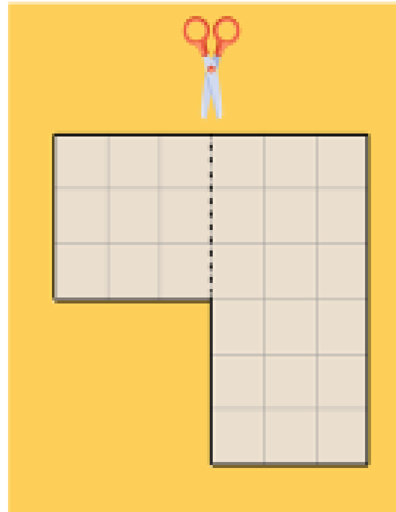
A. La 1 y la 2
B. La 1 y la 3
C. La 2 y la 3
D. La 2 y la 4

Respuesta: C La 2 y la 4.

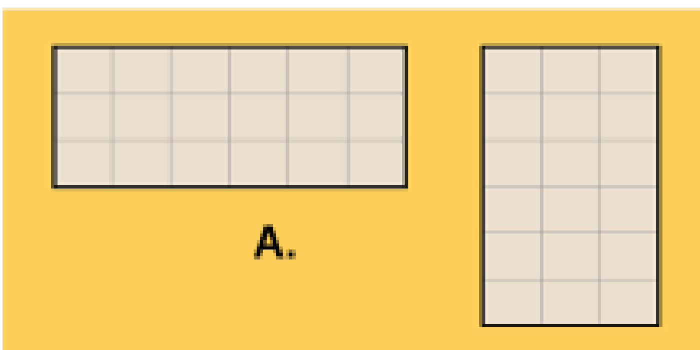
Competencia: razonamiento.

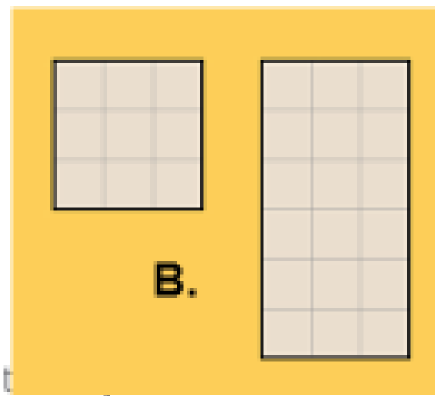
2.

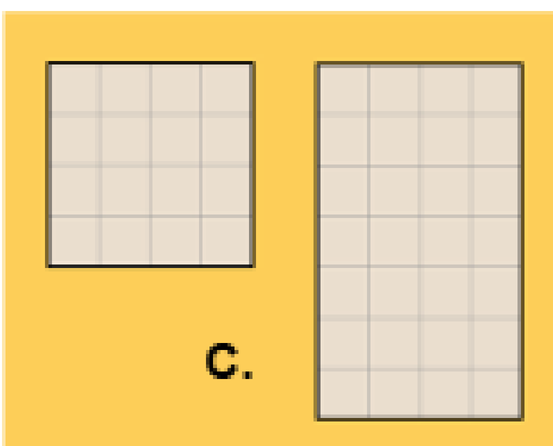
Observa el corte que se realiza en la siguiente figura.

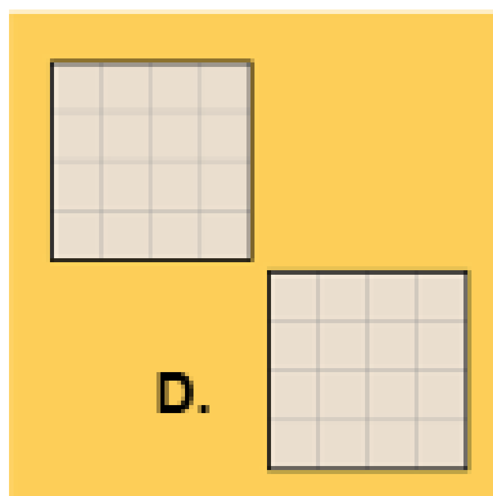


Realizado el corte, ¿cuáles son las piezas que conforman la figura?





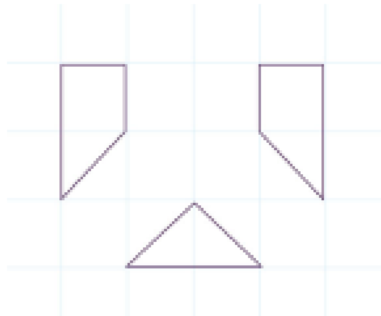




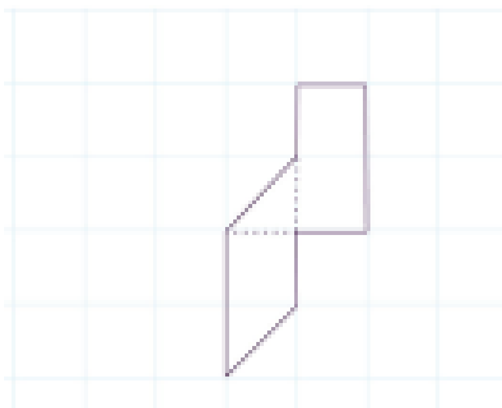
Respuesta: B

Competencia: visualización.

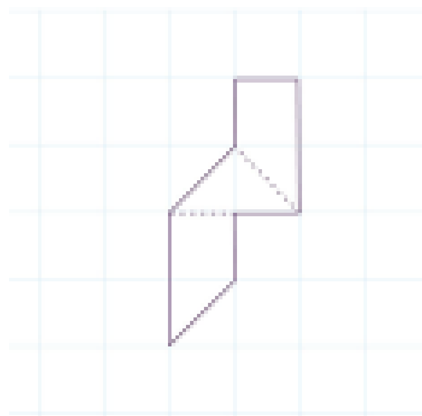
3. Observa las siguientes tres figuras.



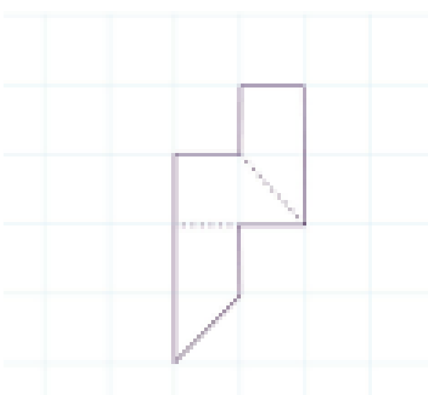
¿Cuál imagen se arma usando las tres figuras?



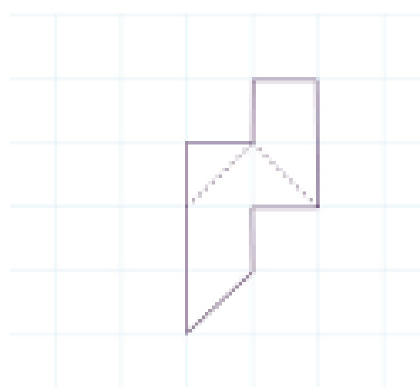
A



B



C

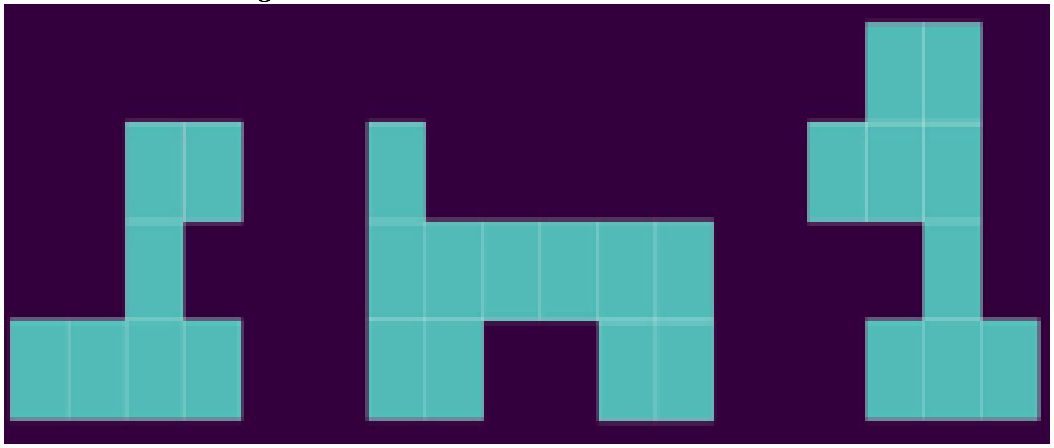


D

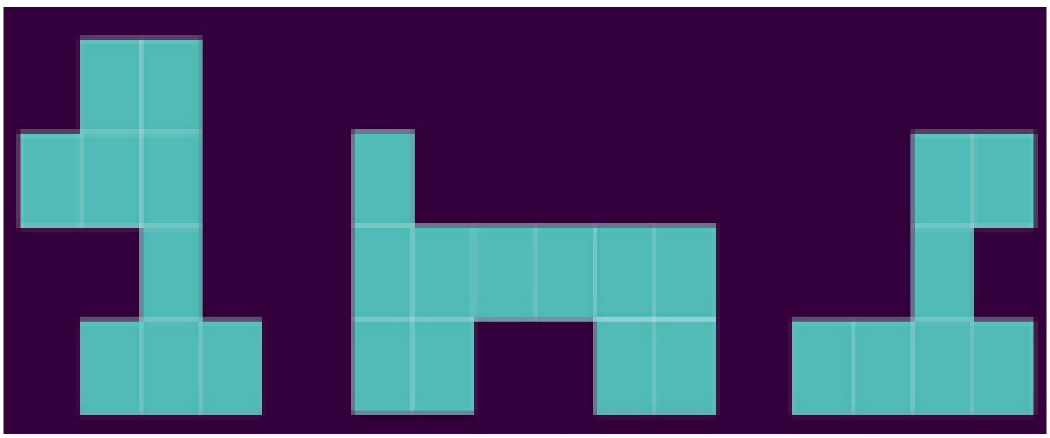
Respuesta: B

Competencia: razonamiento.

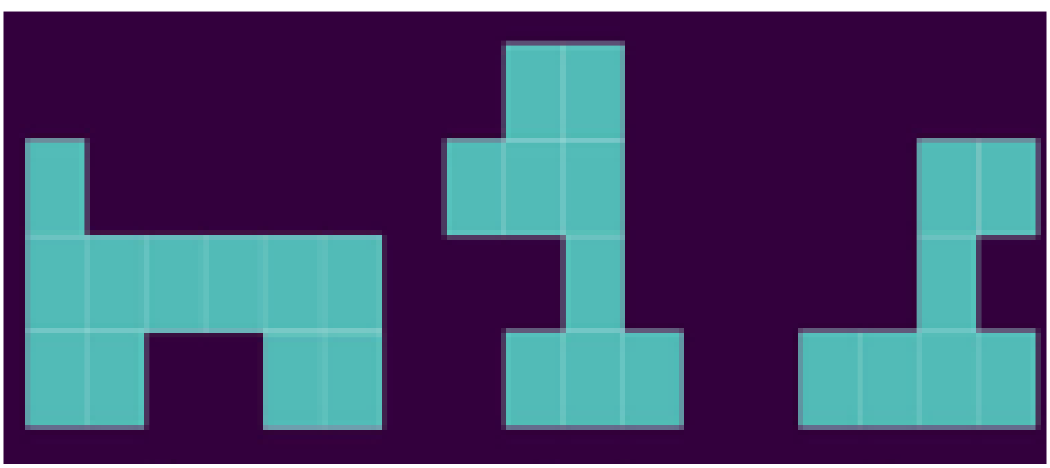
4. Observa las tres figuras formadas con cuadritos.



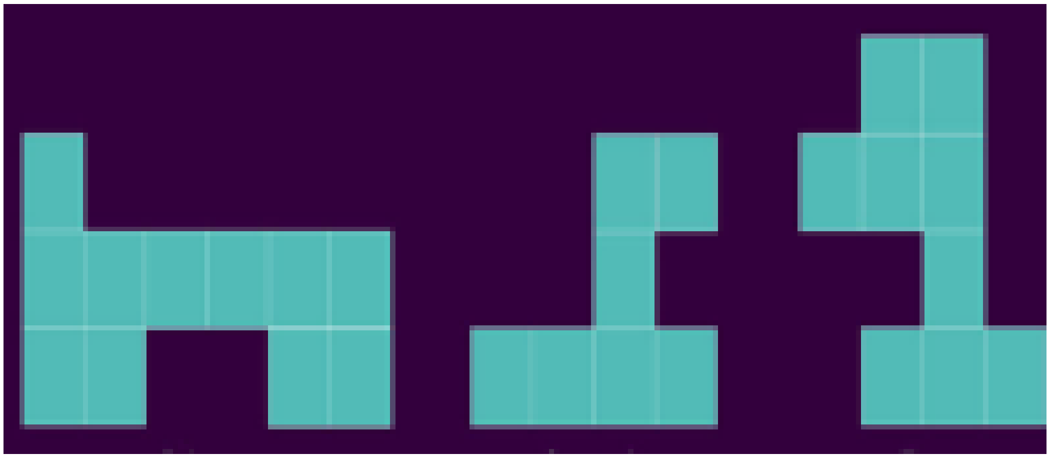
¿Cómo quedan las figuras si se organizan de mayor a menor número de cuadritos?



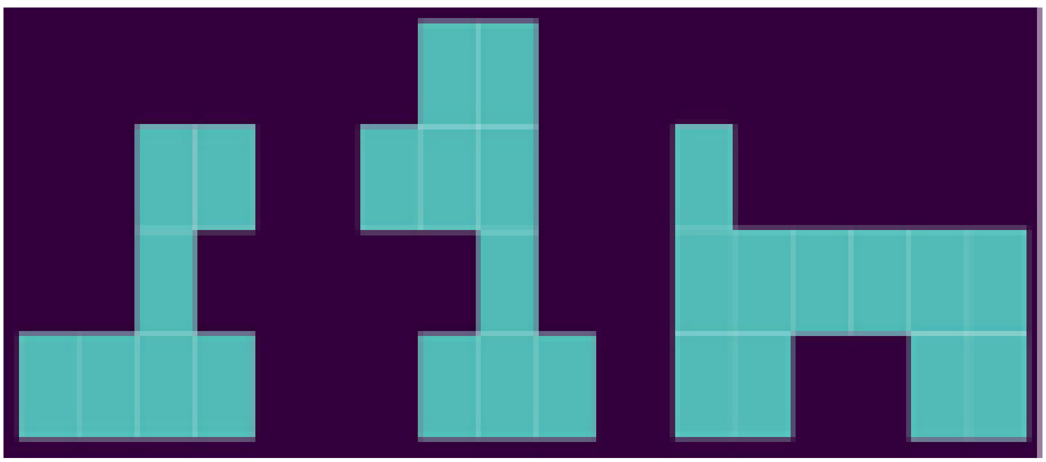
A



B



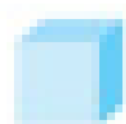
C



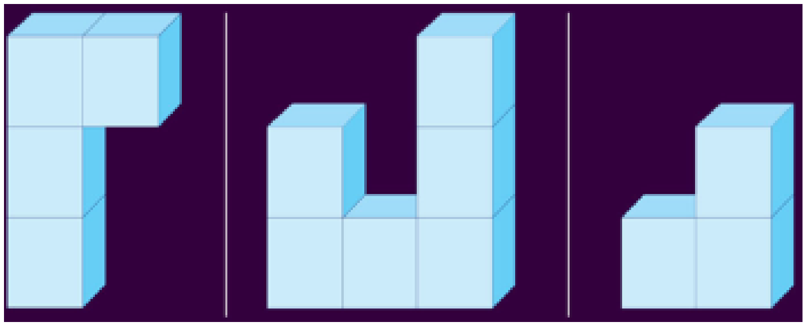
D

Respuesta: D

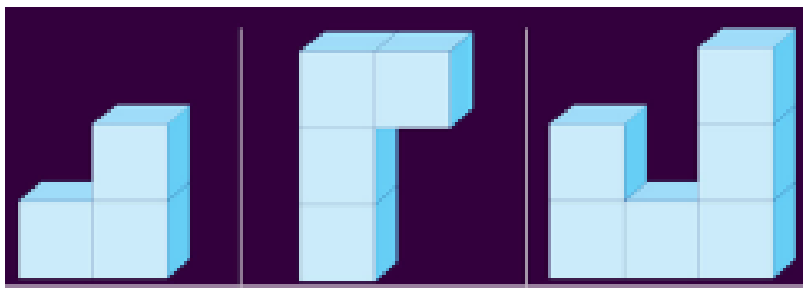
Competencia: razonamiento

5. Marina armó tres objetos empleando cubos como este. 

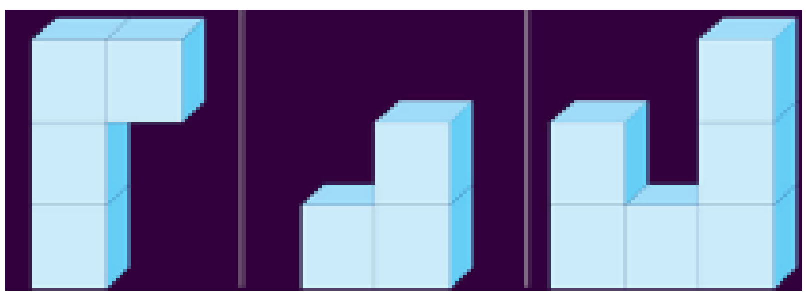
Observa las figuras.



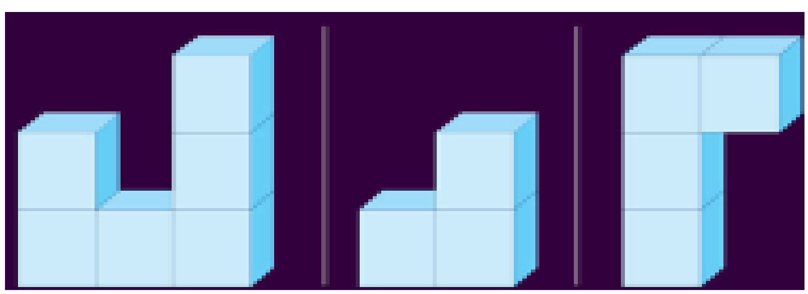
¿Cómo quedarán organizados los objetos cuando se ordenan de menor a mayor cantidad de cubos?



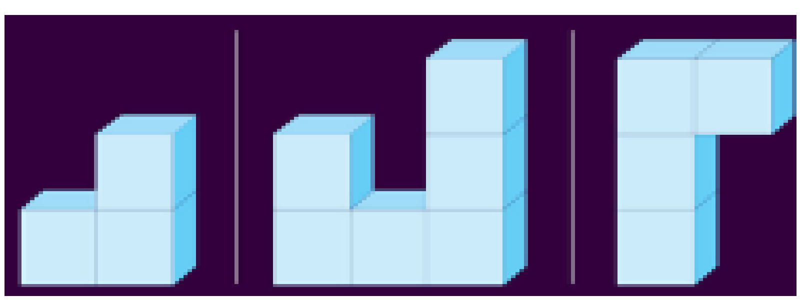
A



B



C

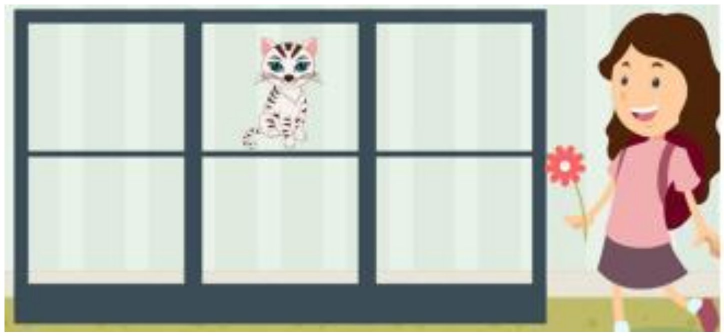


D

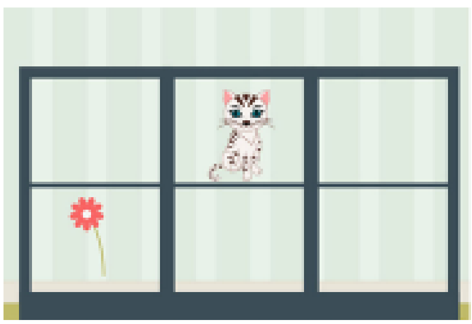
Respuesta: A

Competencia: visualización y razonamiento

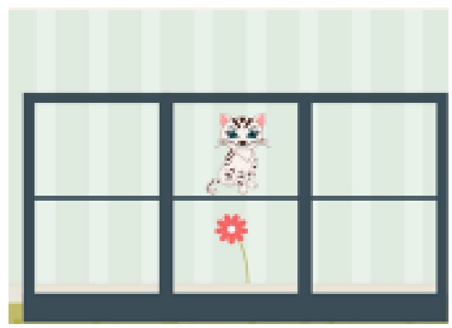
6. Daniela quiere colocar una flor a la izquierda del gato.



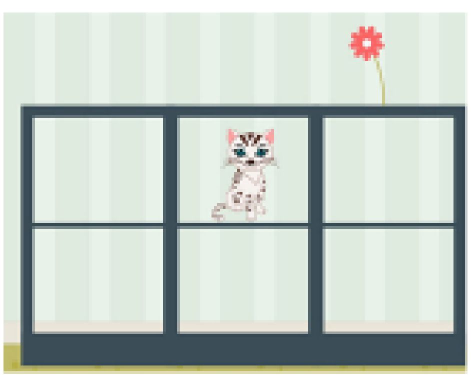
¿Cuál de las siguientes figuras muestra donde colocó la flor Daniela?



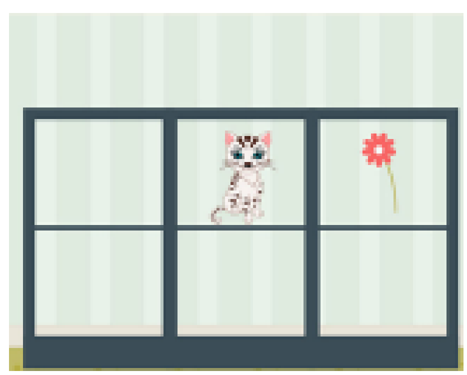
A



B



C

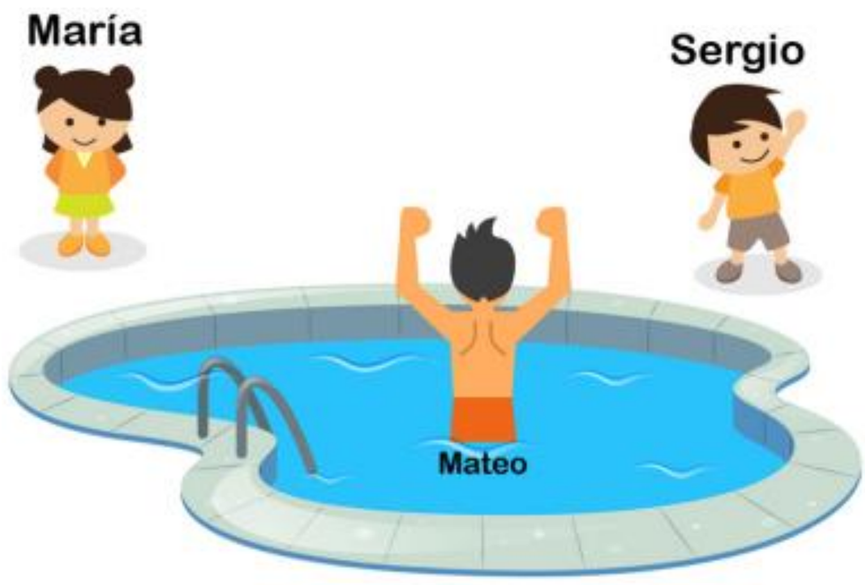


D

Respuesta: D

Competencia: visualización y razonamiento

7. María, Mateo y Sergio están de vacaciones.



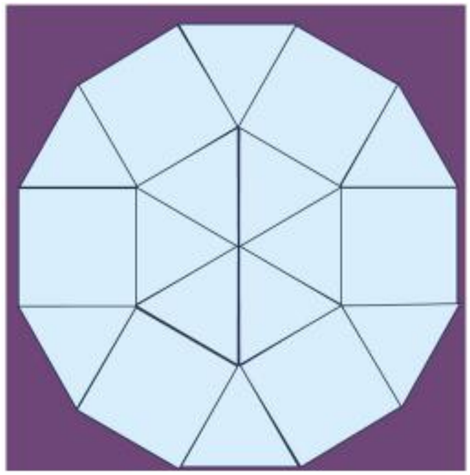
De acuerdo a la imagen, ¿dónde se encuentra Sergio?

A. Dentro de la piscina.
B. A la derecha de María.
C. A la derecha de Mateo.
D. A la izquierda de Mateo.

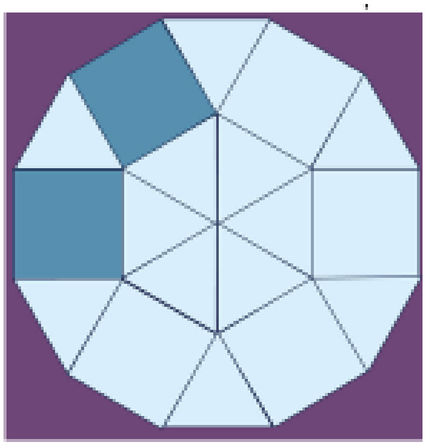
Respuesta: C

Competencia: visualización.

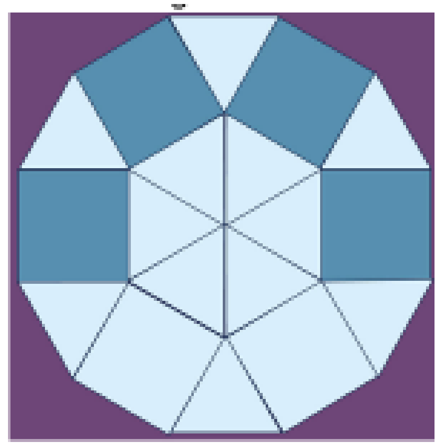
8. Marina hizo un dibujo con figuras en la pared de su habitación. Observa la figura.



Observa como Marina pintó la misma figura día tras día.



Primer día



Segundo día

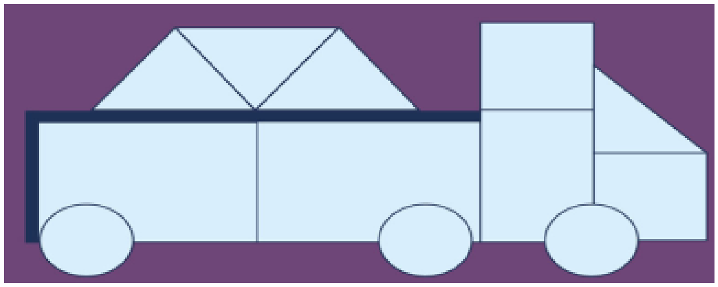
Siguiendo la misma secuencia en este orden, ¿cuántas y cuá(les) figura(s) geométrica(s) pintó Marina al tercer día?

A. Un triángulo.
B. Un cuadrado.
C. Dos triángulos.
D. Dos cuadrados.

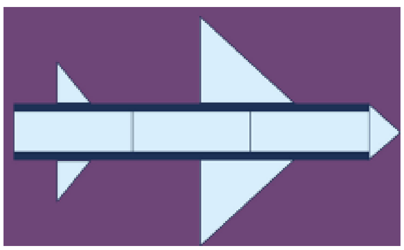
Respuesta: D

Competencia: visualización y razonamiento.

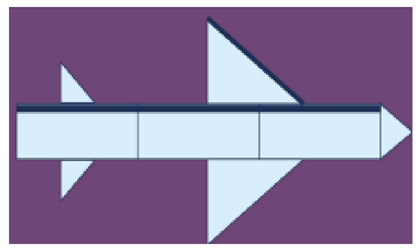
9. Carlos dibujó un camión con figuras geométricas y resaltó dos líneas perpendiculares.



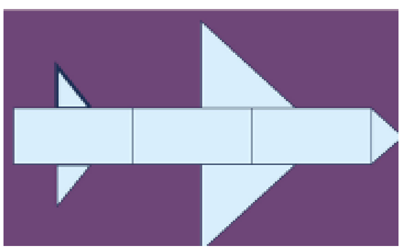
Luego, Carlos dibujó cuatro aviones con figuras geométricas y solo en uno resaltó dos líneas perpendiculares, ¿Cuál es de estos es el avión que muestra las líneas que resaltó Carlos?



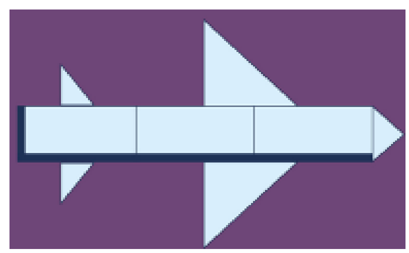
A



C



B

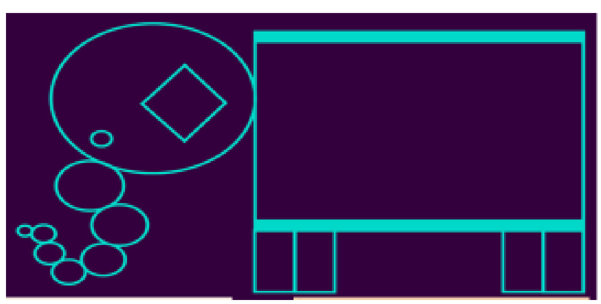


D

Respuesta: D

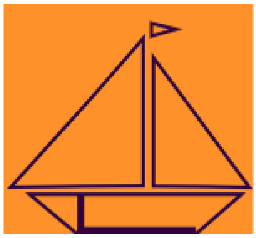
Competencia: visualización

10. Marina dibujó un elefante con figuras geométricas y resaltó dos líneas paralelas.



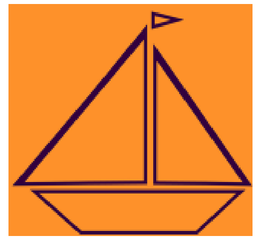
Luego, Marina dibujó cuatro barcos con figuras geométricas y solo en uno resaltó dos líneas paralelas, ¿Cuál es de estos es el barco que muestra las líneas que resaltó Marina?

A

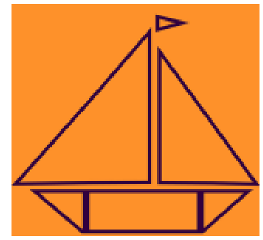


B

C



D

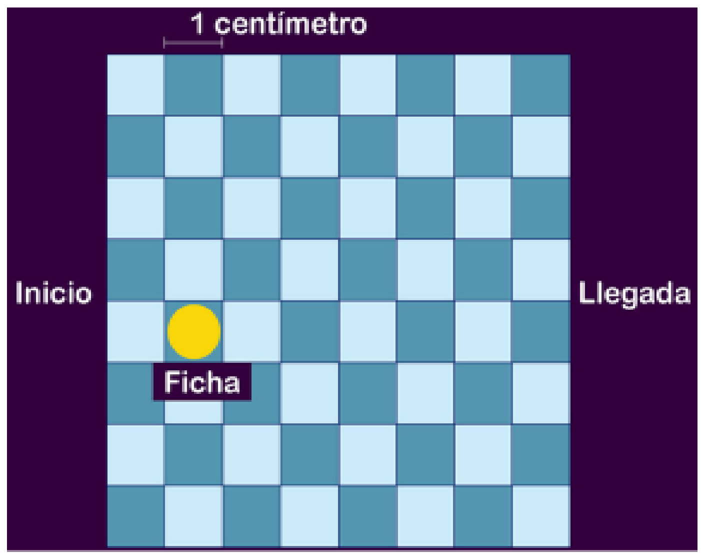


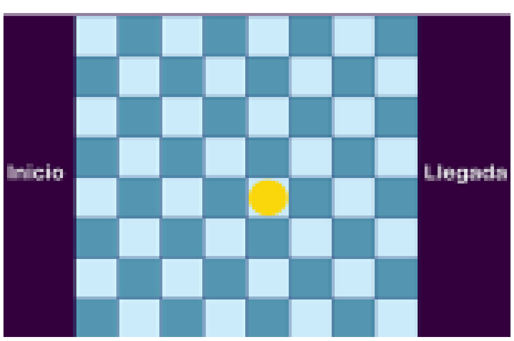
Respuesta: D

Competencia: visualización

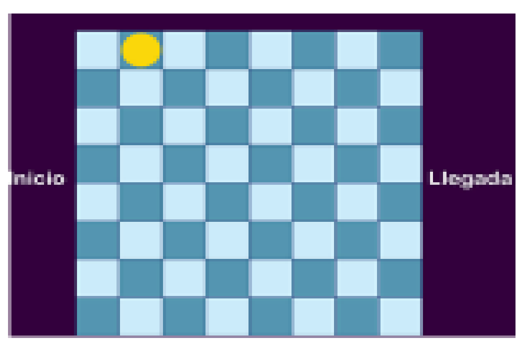
11. Daniela está jugando con un tablero y fichas, el inicio se encuentra a la izquierda y la llegada a la derecha del tablero, cada uno de los cuadritos del tablero tiene 1 cm de lado. Observa la ficha amarilla que le quedó.

    Daniela movió horizontalmente 4 cm la ficha hacia la llegada. Teniendo en cuenta la medida de cada cuadrito, ¿dónde quedó la ficha en el tablero?

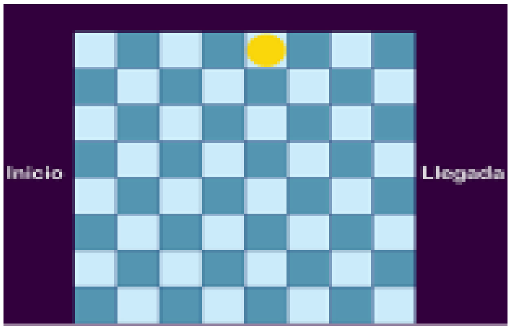




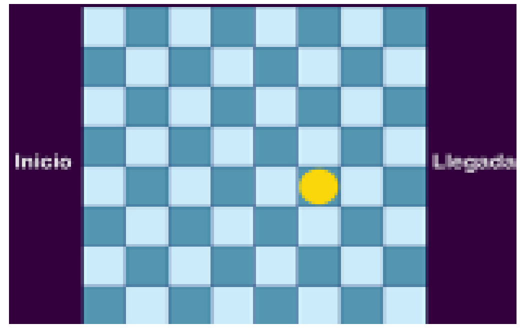
A



B



C



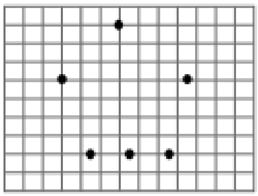
D

Respuesta: D

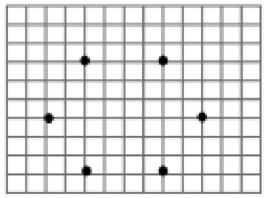
Competencia: visualización y razonamiento.

A. 2 Grados: Cuarto - Quinto

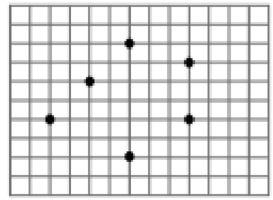
1. ¿Con cuál de los siguientes conjuntos de puntos se puede formar un polígono de seis lados?



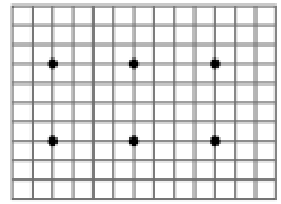
A



B



C



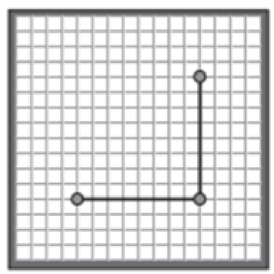
D

Respuesta: B

Competencia: visualización

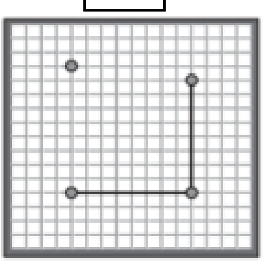
2.

Marina ubica tres fichas en un tablero y las une con líneas rectas. Observa la ubicación de las fichas.

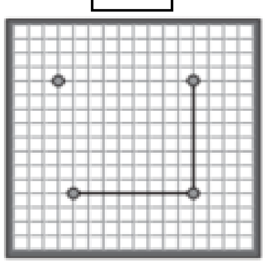


Marina desea construir un cuadrado y ubicó correctamente la cuarta ficha, ¿qué tablero muestra la ubicación de esta ficha?

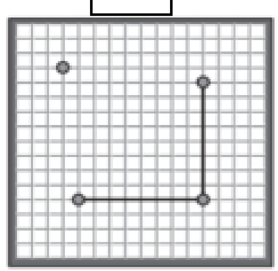
A



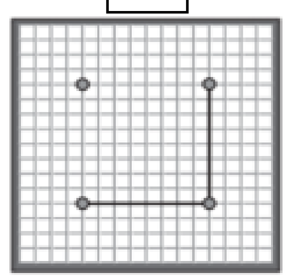
B



C



D



Respuesta: D

Competencia: visualización.

3. Carlos hizo un mapa de su tesoro. En el mapa se observan algunos elementos que rodean el tesoro.

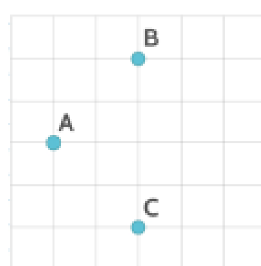
Selecciona la opción que describe correctamente la ubicación de uno de los elementos dibujados en el mapa.

A. El mapa de la isla se encuentra dos unidades a la derecha del tesoro.
B. El loro se encuentra dos unidades a la derecha y dos unidades abajo del tesoro.
C. El barco se encuentra dos unidades a la izquierda y dos unidades hacia abajo del tesoro.
D. El pirata se encuentra dos unidades arriba y tres unidades a la izquierda del tesoro.

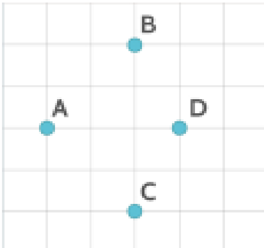
Respuesta: A

Competencia: razonamiento.

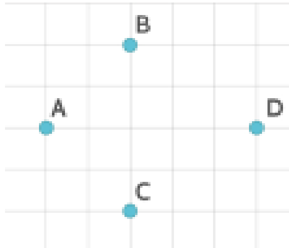
4. Daniela está dibujando una cometa, para esto utiliza la cuadrícula de su cuaderno. Hasta ahora ha ubicado los puntos A, B y C como se muestra a continuación.



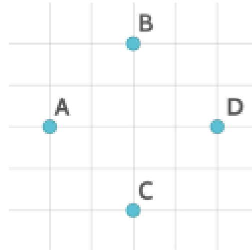
¿En dónde debe ubicar Daniela el punto D para que la cometa quede en forma de cuadrado?



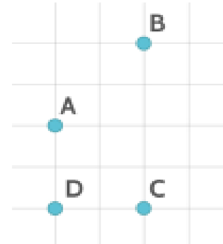
A



B



C

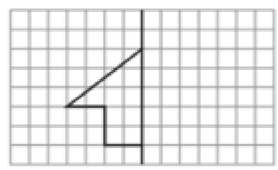


D

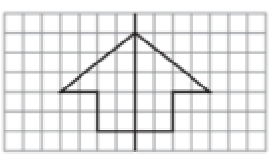
Respuesta: C

Competencia: visualización.

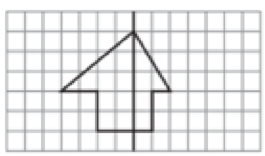
5. Marina dibujó una flecha en la cuadrícula de su cuaderno y la dividió en dos partes iguales, tal como se muestra.



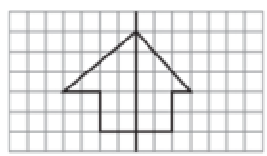
¿Cuál de las siguientes figuras muestra la flecha completa?



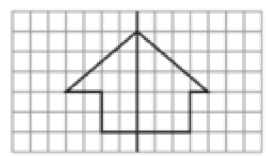
A



B



C



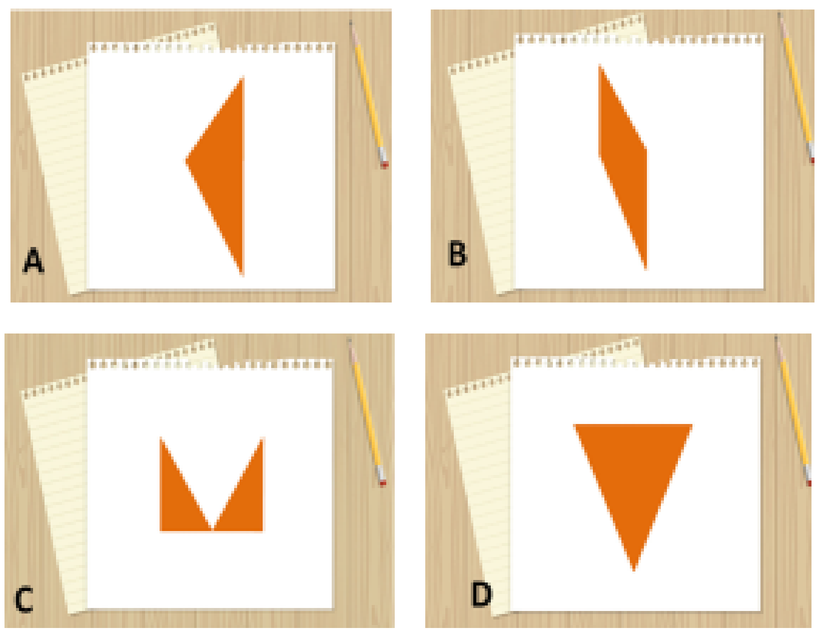
D

Respuesta: A

Competencia: visualización y razonamiento.

6. Carlos dibujó una figura y trazó su eje de simetría.

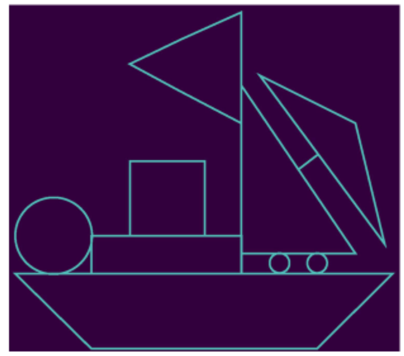
¿Cuál figura se obtiene al doblarla por la línea punteada?



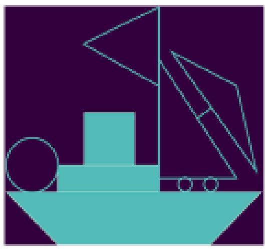
Respuesta: B

Competencia: visualización

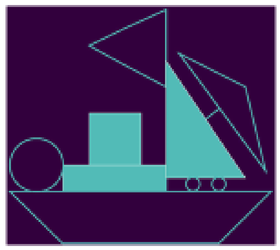
7. En la siguiente figura, observa un barco formado con figuras geométricas



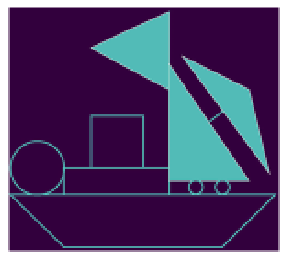
¿En cuál de las opciones todas las figuras sombreadas del barco tienen uno o más ángulos rectos?



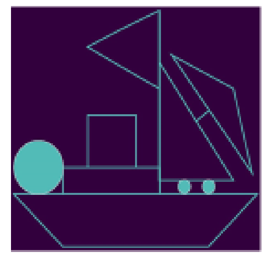
A



B



C



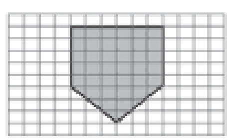
D

i. A y B.
ii. C y D
iii. B y D
iv. Ningunas de las anteriores.

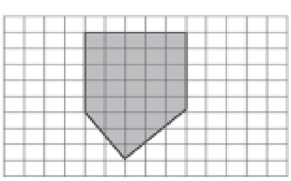
Respuesta: A y B.

Competencia: Visualización.

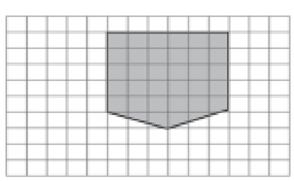
8. Marina dibujó la siguiente figura.



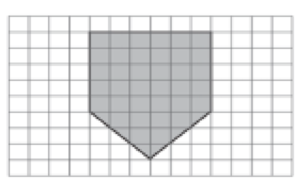
Luego, tomó una lupa y la observó ampliada. ¿Cuál de las siguientes figuras observó Marina?



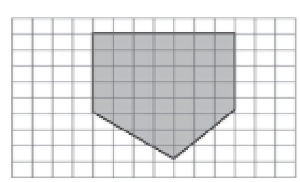
A



B



C



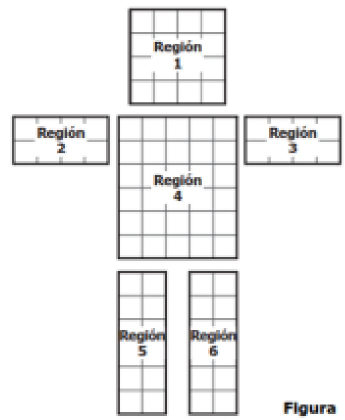
D

Respuesta: C

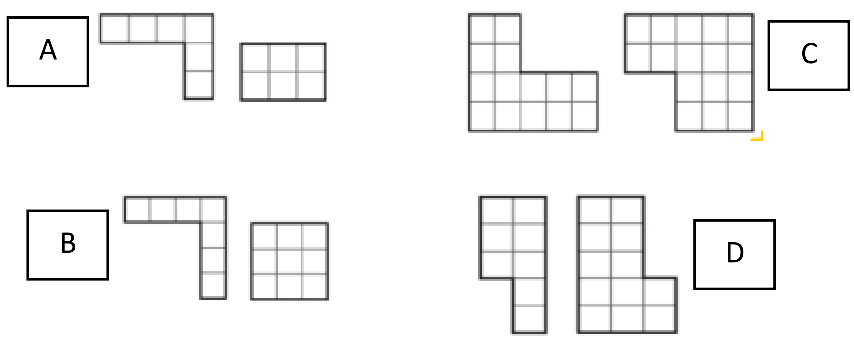
Competencia: Visualización.

9.

Carlos quiere armar la figura usando fichas. La figura se divide en seis regiones.



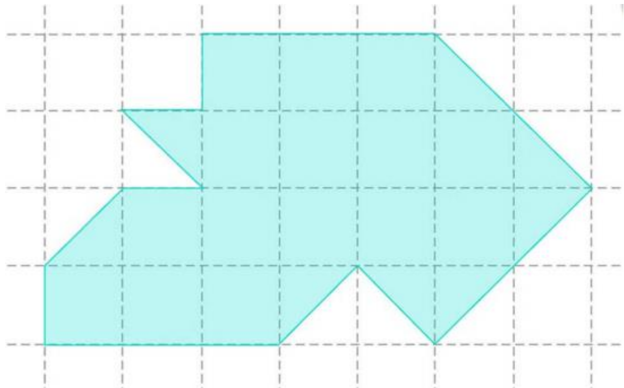
¿Con cuál de los siguientes pares de fichas Carlos puede armar la región 1?



Respuesta: B

Competencia: Visualización.

10. Daniela usó varias piezas como esta  y construyó la siguiente figura.



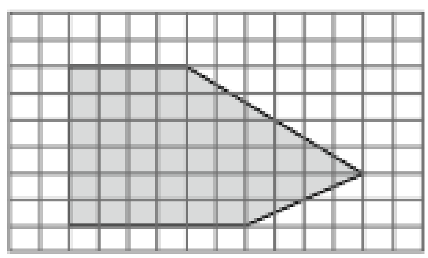
¿Cuántas piezas fueron utilizadas?

A. 38
B. 19
C. 23
D. 46

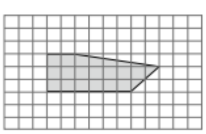
Respuesta: A

Competencia: Visualización y razonamiento

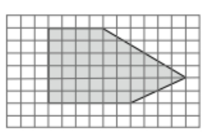
11. Observa la figura.



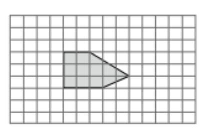
Si cada uno de sus lados se reduce a la mitad, ¿cuál de las siguientes opciones representa la figura reducida?



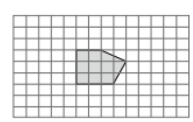
A



B



C



D

Respuesta: C

Competencia: visualización y razonamiento.

Anexo B: Situación didáctica ARTEmbera

Esta sección del anexo comprende el diseño ARTEmbera, en la primera parte se encuentra la Situación 1 con las cinco tareas y en la segunda parte, la Situación 2 con las seis tareas.

B.1. Situación 1 Coordenadas cartesianas de las mostacillas

Tarea 1. Exploración

Tiempo: 60 minutos.

Conformar grupos de trabajo colaborativo en los cuales haya estudiantes de diferentes grados. De manera estratégica, la profesora da unos roles a los estudiantes de acuerdo a sus habilidades.

L: líder. Es la persona encargada de leer frente a la clase la respuesta del grupo.
S: secretario(a). Es quien escribe de manera clara la respuesta que el grupo decidió.
F: facilitador(a). Es la persona que recibe y entrega el material a la profesora, además toma el tiempo de la actividad.

Luego se llama a los facilitadores y se entrega a cada grupo una pulsera, una imagen de pulsera y la ficha de trabajo de la tarea 1, a continuación, se inicia un conversatorio dirigido alrededor de las siguientes preguntas.

- ✓ ¿Qué figuras se observan? Dar paso a la caracterización de las figuras nombradas.
- ✓ ¿Qué propiedades geométricas se observan?, ¿cómo se pueden formular? Pedir explicaciones a los estudiantes.
- ✓ ¿Qué relaciones geométricas se pueden establecer?, ¿proponer contra ejemplos?

Finalmente, en Asamblea de aula se realiza la socialización de la actividad en la que los líderes de cada grupo, por turnos manifiestan sus respuestas a los interrogantes anteriores; luego de la intervención de cada líder, se da un espacio para que los demás estudiantes puedan apoyar o refutar las posturas; la profesora en esta sección de la actividad tendrá un rol de mediadora.

Tarea 2. Exploración - Estructuración

Tiempo: 45 minutos

Previamente se descarga GeoGebra en las tabletas disponibles que hay en la sede, se les dice a los estudiantes que se organicen en parejas y que estén atentos para recibir las instrucciones. La profesora dirige la actividad desde un computador al cual se le reproduce la imagen en un televisor.

La actividad consiste en que los estudiantes conozcan el plano cartesiano y se apropien de sus elementos (ejes y unidades) e interactúen con el software ampliando y reduciendo la imagen, esto con la finalidad de que los estudiantes comprendan la relación entre los ejes y sus unidades.

Se solicita a los estudiantes que, por medio de la opción A punto de la caja de herramientas, realicen puntos en diferentes partes del plano en la interfaz de GeoGebra, más adelante que identifiquen las coordenadas de nuevos puntos hechos con ayuda de la profesora y finalmente que grafiquen puntos de coordenadas dadas, le cambien color, forma y tamaño.

Tarea 3. Estructuración

Tiempo: 60 minutos

Observa el patrón de esta pulsera.

Lo hicimos en un plano cartesiano, completa los números que faltan del eje X y del eje Y.

Vamos a llamar cada línea horizontal del tendido por su número correspondiente en el eje Y.

¿Puedes señalar la línea 5?

¿Puedes señalar la línea7?

¿Puedes señalar la línea 0?

Señala estas coordenadas: (3,4), (4,1), (5, 10)

¿Podrías decir las coordenadas en las que se ubican algunas mostacillas? Por ejemplo, escribe la coordenada de:

Una mostacilla roja: ___________

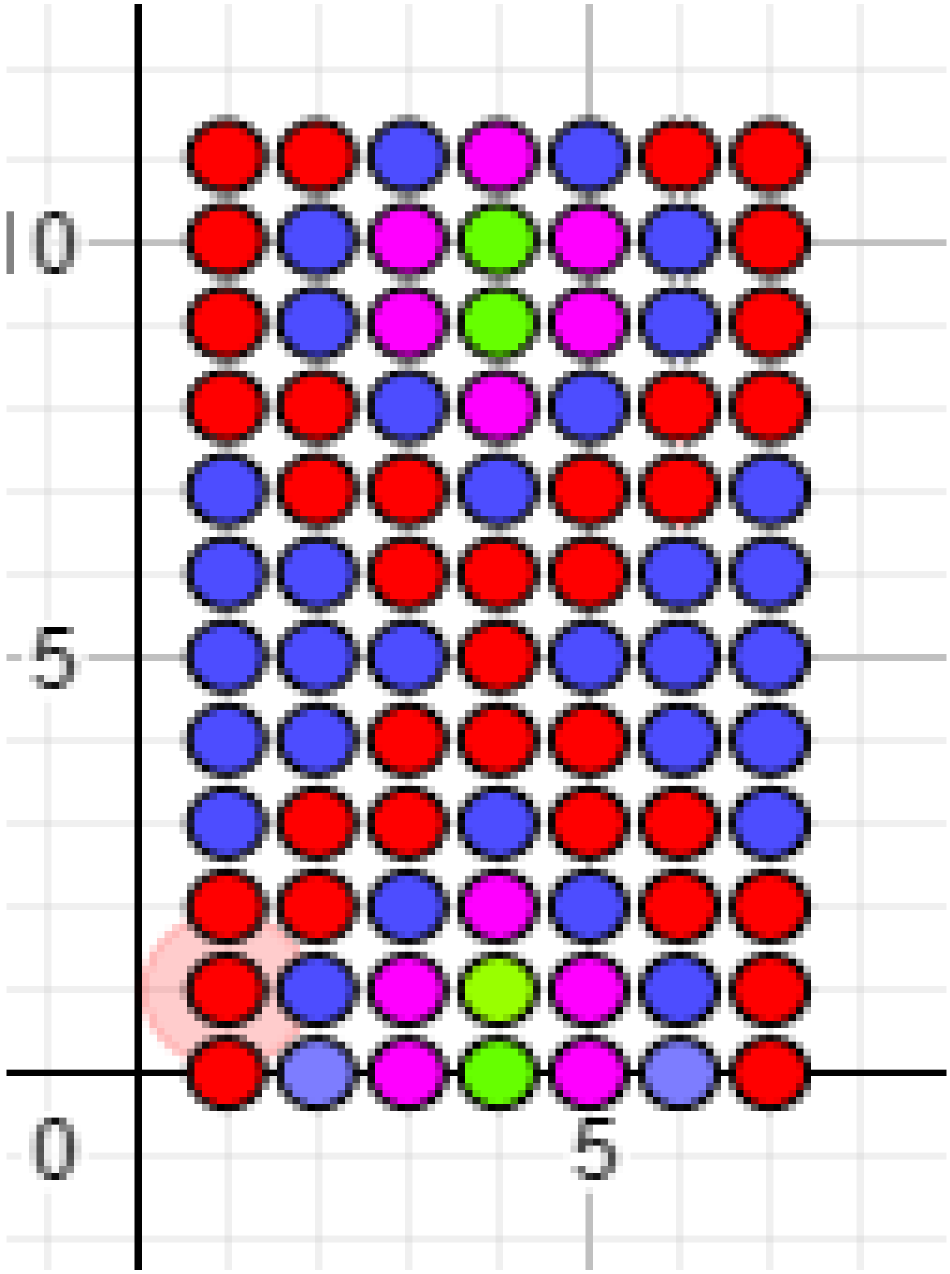
Una fucsia: ___________

Una verde: __________

Una azul: __________.

Ahora, dile a tu compañero que te diga cinco coordenadas: _________________________ y señálalas.

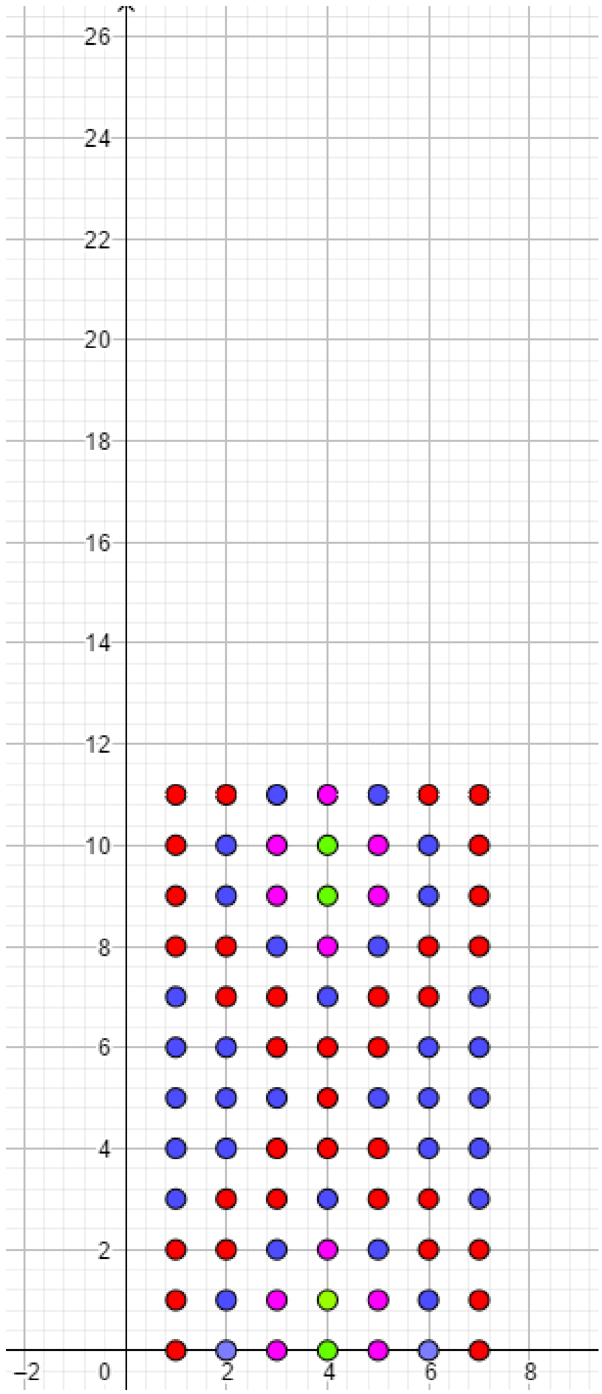
¿Cuántos aciertos tuviste? ________________ ¿Cuántos desaciertos? ___________________


10
5
0
5

Tarea 4. Estructuración

Tiempo: 45 minutos

Observa el patrón, está incompleto, colorea los puntos que corresponden a las mostacillas que faltan y completa el patrón. Evaluar de manera individual la ubicación de cada punto nuevo y observa si el nuevo patrón “el completo”, presenta un diseño coherente.



Tarea 5. Transferencia - Validación

Tiempo: 60 minutos

Ahora vamos a jugar Espejo. Cada estudiante con la ficha de la tarea 4, está listo para jugar *espejo*, en la primera ronda el estudiante denominado A, le da una coordenada al otro compañero denominado B y este debe responder con el color que tiene la mostacilla (punto), luego el primer estudiante A verifica si la respuesta que dio el compañero B es correcta o no y ambos diligencian la ficha de espejo, si el estudiante B acierta gana 10 puntos y si no acierta obtiene 5 puntos.

Después el estudiante B inicia la segunda ronda y se repite el proceso hasta diligenciar completamente la ficha de espejo la cual tiene cinco casillas de rondas para el juego y una casilla para totalizar los aciertos y los fallos obtenidos.

Jugadores	Juego "Espejo"					
	1 Ronda	2 Ronda	3 Ronda	4 Ronda	5 Ronda	TOTAL
Estudiante A ______________						
Estudiante B ______________						

Responde las siguientes preguntas y socializa las respuestas en *Asamblea de aula* para el cierre de la clase.

¿Qué aprendí el día de hoy?

¿Qué fue lo mejor que hice?

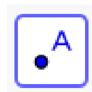
¿Qué podrías mejorar?

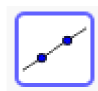
B.2. Situación 2. Construcción de figuras a través de transformaciones

Tarea 1. Exploración

Tiempo: 55 minutos

Ingresa a GeoGebra y sigue las instrucciones para construir una figura desconocida.

1. Selecciona la opción punto  que se encuentra en la parte superior izquierda de la caja de herramientas y realiza tres puntos A, B y C no colineales, con coordenadas cartesianas (3,5), (2,3) y (5,1) respectivamente. Arrástralos y observa el cambio en la coordenada cartesiana.

2. Selecciona la opción segmento  que se encuentra en la parte superior izquierda de la caja de herramientas y realiza los segmentos: $\overline{AB},\ \overline{BC}\ y\ \overline{CA}$.
   ¿Puedes decir qué figura es?, ¿por qué?
   ____
   ____
   ____
   ____

3. Observa atentamente la figura, luego arrastra el punto A hacia otra posición y responde:

a. ¿La figura se mantiene? ________________________________

b. ¿Qué pasó con la figura inicial?
   ____
   ____

c. ¿Qué cambios observas en la figura final respecto la figura inicial?
   ____
   ____
   ____
   ____

4. Observa atentamente la figura, luego arrastra el punto B hacia otra posición y responde:

a. ¿Qué pasó con la figura inicial?

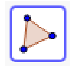
b. ¿Qué cambios observas en la figura final respecto a la figura inicial?

c. Si arrastraras el punto C, ¿podrías mencionar qué cambios hay entre la figura inicial y la final?

d. Construye un triángulo DEF igual al anterior. Relata la estrategia que usarás.

e. ¿Los triángulos construidos siempre son iguales? ¿los triángulos son iguales bajo una condición específica?

f. Abrir un nuevo documento de GeoGebra, para hacerlo dirígete a la parte superior derecha utilizando la opción ☰ nuevo.

g. Selecciona la opción  y da clic en polígono regular, ubicada en el quinto lugar de la caja de herramientas y construye un triángulo ABC de coordenadas (8, 5), (7, 2) y (11, 3) respectivamente.

h. Observa atentamente el triángulo, luego arrastra el punto A, B y C hacia una posición diferente. Describe lo que observas. ____

____

____

____

i. Escoge un(a) compañero(a) para escribirle un mensaje en el *correo de la amistad*, en el que respondas ¿Qué diferencias observas entre la construcción del triángulo por medio de punto/segmento y la construcción por polígono regular? Deposita el mensaje.

____

____

____

____

j. Dirígete al *correo de la amistad* y lee el mensaje que te escribió tu compañero(a). Escribe las ideas que valoras e indica por qué lo haces. ____________________________________

____

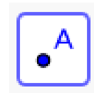
____

____

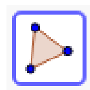
Guarda el archivo de GeoGebra con tu nombre. Luego lo usaremos de nuevo.

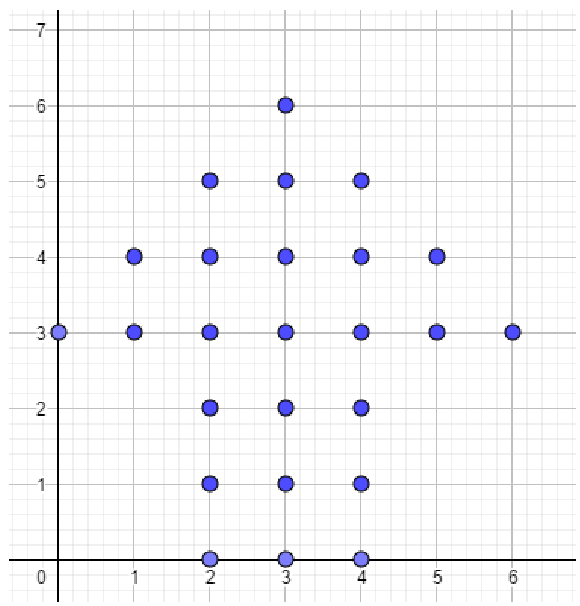
Tarea 2. Exploración - Estructuración

Tiempo: 60 minutos

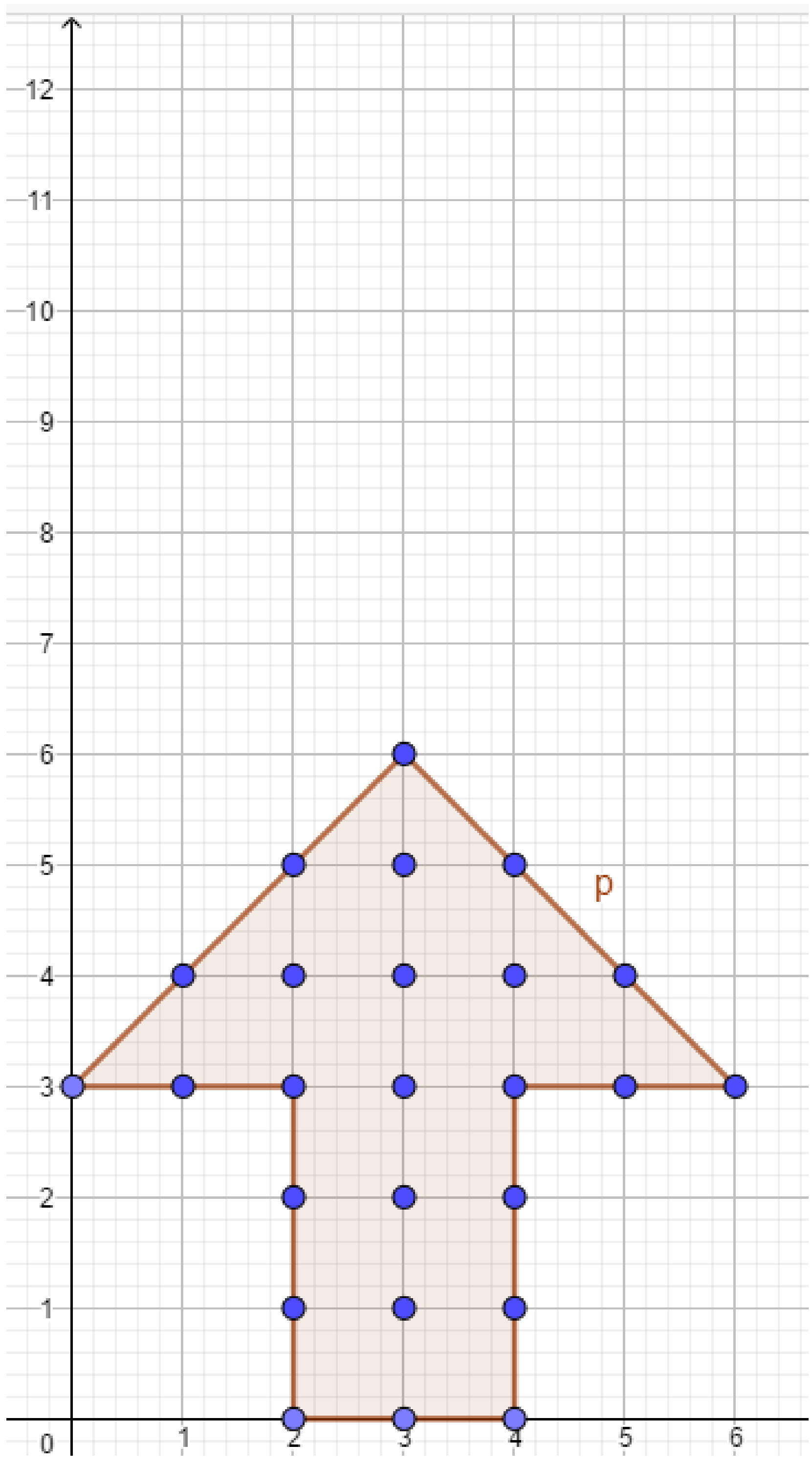
1. Ingresa a GeoGebra y selecciona la opción punto 

para construir la flecha de la imagen. Recuerda que tu construcción debe conservar las mismas coordenadas cartesianas de la muestra.

2. Utiliza la opción polígono  y ubica los vértices en las siguientes coordenadas (3,6), (0,3), (2,3), (2,0), (4, 0), (4, 3) y (6, 3). Completa la figura como la flecha de muestra. Por último, no cierres el archivo.



3. La siguiente ilustración es el patrón de una pulsera de siete mostacillas sobre un plano cartesiano, el polígono *p* debe ser replicado para completar el patrón físico, ninguna parte de la figura puede quedar por fuera del patrón. ¿Cómo lo harás?



4. Vamos a comprobar si moviste la flecha correctamente y si ambas figuras son iguales.
   a. Los puntos homólogos son aquellos que ocupan la misma posición en dos figuras iguales. Si tu construcción es correcta, el punto (2, 6) es homólogo del punto (2, 0),

el punto (0, 9) es el homólogo del punto (0, 3) y el punto (6, 9) es el homólogo de (6, 3). ¿Qué otros puntos faltan? ____

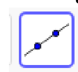
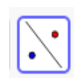
____

____

b. Mide las distancias de todos los pares de puntos homólogos. ¿Cómo explicas este resultado? ____

____

____

5. Abre el archivo de GeoGebra del punto 2, vamos a mover el patrón imagen, es decir el polígono *p* trasladándolo de un lugar a otro. Selecciona la opción  y escoge vector. Luego, para mover el polígono selecciona la opción  y escoge traslación. Clic sobre el polígono y después sobre el vector.

Hagamos *Plan padrinos* para contestar y socializar las preguntas 6, 7, y 8.

6. Imagina que se va a hacer una nueva traslación y que el vector es menor que la medida de la figura del patrón imagen, es decir que el vector es menor de 6 unidades. ¿Dónde se ubicaría la figura trasladada? ____

____

____

7. Si el vector es mayor a 6 unidades, ¿Dónde se ubicaría la figura trasladada? ____________

____

____

8. ¿Qué función cumple el vector en un movimiento de traslación? ____________________

____

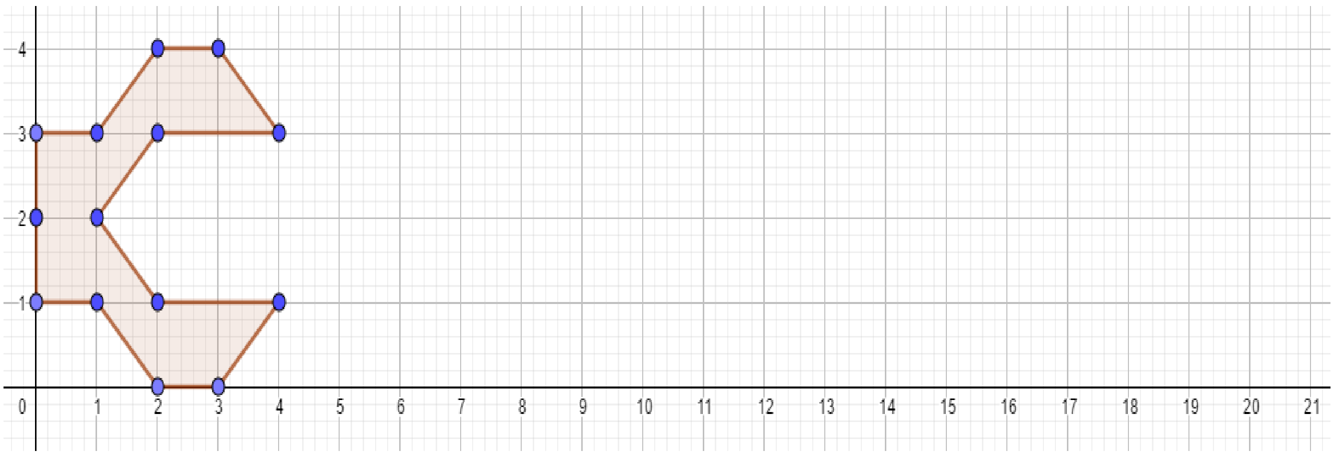
____

9. Prueba la opción traslación  con vectores de diferentes tamaños.

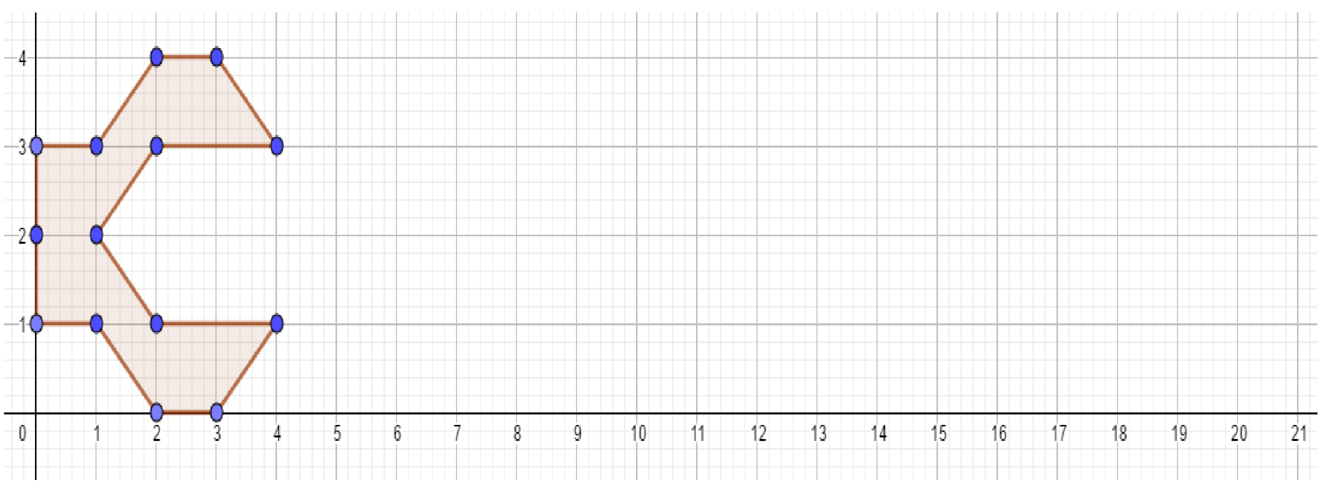
Tarea 3. Exploración - Estructuración

Tiempo 45 minutos

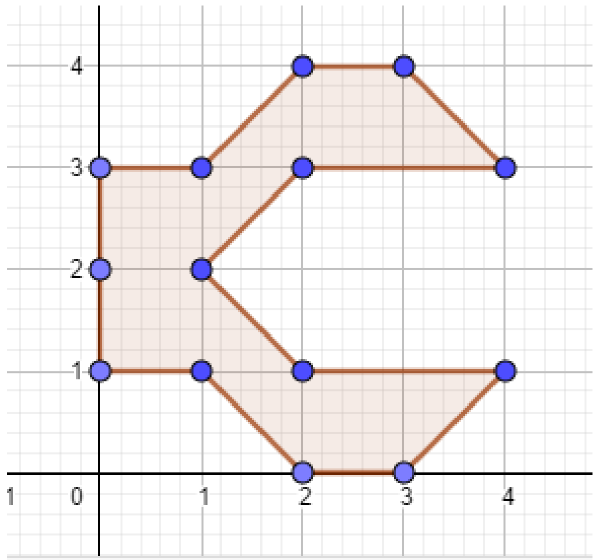
1. Observa el patrón imagen. Realiza movimientos de traslación para completar el diseño.

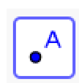


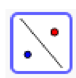
2. Con el mismo patrón imagen, completa el diseño sin utilizar traslaciones. ¿Qué movimientos le puedes hacer a la figura? ______________________________________



3. Abre un nuevo archivo en GeoGebra y construye la figura de la muestra conservando las coordenadas cartesianas. Vamos a girar la figura, necesitaremos un punto de rotación, grados y sentido.



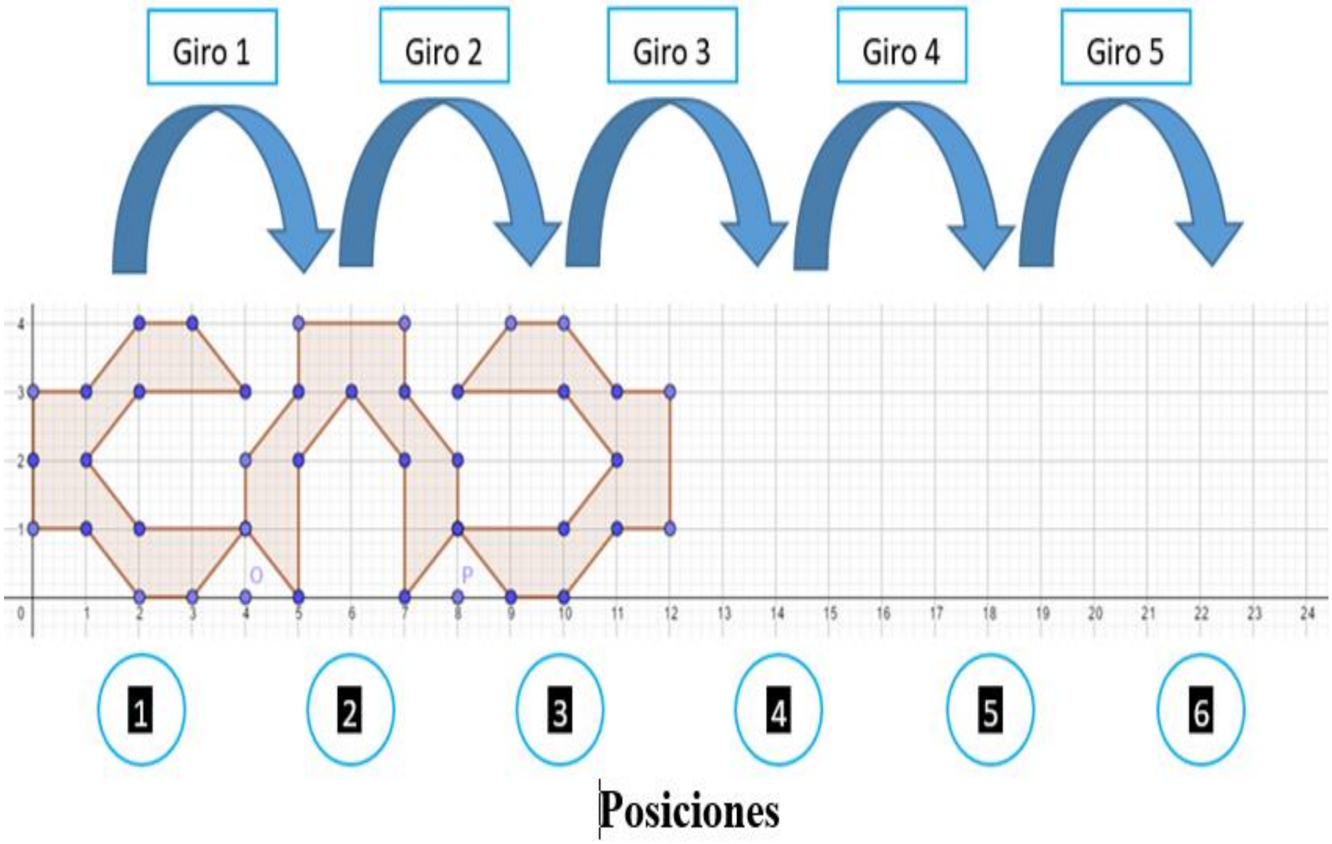
4. Selecciona la opción  para hacer un punto en la coordenada (4, 0). Este punto será el centro de rotación.

5. Escoge la herramienta  y selecciona la opción rotación. Luego, de clic sobre el polígono, después de clic en el punto de rotación, más adelante en la ventana auxiliar escribir 90° de rotación en sentido horario. En una nueva rotación o giro, ¿se usa el mismo punto de rotación? ____

6. Explora en qué coordenada se ubicaría el nuevo punto de rotación y gira la figura. Completa el diseño con rotaciones de la figura imagen.

Tarea 4. Transferencia

1. En la imagen se observa las figuras que resultan luego de una secuencia de giros de 90°.



a. Visualiza las figuras de las posiciones 4, 5 y 6 que resultan de tres giros sucesivos.
b. Dibuja las figuras que resultan de los giros 3, 4 y 5.

2. Responde las preguntas explorando en GeoGebra.

a. ¿Cuántos giros se le debe dar a la figura para que regrese a la posición inicial? ¿Por qué? ____

____

____

b. ¿La figura ubicada en la posición 12 se asemeja a las figuras 1, 2, 3 o 4? ¿Por qué?
____
____
____

c. Explica tu estrategia para predecir la figura de acuerdo a los giros y la posición.
____
____
____

d. Escribe tu explicación como un mensaje para el *Correo de la amistad*. Al cabo de un rato, la profesora indica a los estudiantes leer los mensajes y socializar.
____
____
____

3. Practica el movimiento de rotación con la flecha que realizaste en un archivo de GeoGebra en la tarea 3.

Tarea 5. Transferencia - Validación

Tiempo: 50 minutos.

1. Organízate en mesa redonda.
2. Escoge un(a) compañero(a).
3. Observa con atención la pulsera que se te entregó, realiza una descripción detallada acerca de las transformaciones geométricas (rotaciones y traslaciones) que se encuentren.

4. En *Asamblea de aula* se socializan las apreciaciones del grupo. Escribe las observaciones más importantes.

Tarea 6. Transferencia - Valoración

Primera parte: A crear se dijo

Tiempo: 50 minutos

Vamos a organizar una Muestra Empresarial con los productos que se han elaborado en ARTEmbera, especialmente las pulseras en mostacilla. Anímate a construir un patrón en GeoGebra utilizando la traslación y rotación. Puedes utilizar las diferentes herramientas del software, ¡tu creatividad no tiene límites!

Recuerda guardar tu archivo con tu nombre en la carpeta de la actividad.

Segunda Parte: Manos a la obra

Tiempo: 3 clases de 50 minutos.

Materiales: mostacillas de colores, aguja de pelo, hilo aptan, base de tabla, tijeras y candela.

Elabora tu pulsera realizando el tejido del patrón que construiste, si quieres puedes hacer varias.