

LAS RAZONES Y PROPORCIONES EN UN ESTUDIO SOBRE EL CONSUMO DE
AGUA EN NUESTRO COLEGIO: UNA ESTRATEGIA ABP DE ENFOQUE
FORMATIVO QUE FAVORECE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA
PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

JULIÁN ALEXIS BALANTA MERA



UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2020

LAS RAZONES Y PROPORCIONES EN UN ESTUDIO SOBRE EL CONSUMO DE
AGUA EN NUESTRO COLEGIO: UNA ESTRATEGIA ABP DE ENFOQUE
FORMATIVO QUE FAVORECE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA
PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

JULIÁN ALEXIS BALANTA MERA

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Educación

Henry Arley Taquez
Director de Tesis

UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2020

Nota de Aceptación

Firma del jurado

Firma del jurado

Santiago de Cali, junio 20 de 2020

Dedicatoria

A mi madre Yolanda Balanta Mera

Agradecimientos

Gracias a Dios y a la vida. Doy infinitas gracias a mi madre por ser siempre incondicional, a mi familia por creer en mí y a mis amigos por su gran apoyo.

Al coordinador de la institución IE José María Carbonell, Lic. Henry Ruiz Gómez, por brindarme los tiempos para asistir a la universidad.

Al profesor Henry Táquez Quenguan por los aprendizajes que logré durante su curso de Tecnologías aplicadas a la enseñanza. Por su gran apoyo, comprensión y acompañamiento durante mi proceso de investigación.

A los profesores José Hernando Bahamón y John Anaya por sus grandes orientaciones en los cursos de Diseño curricular y Evaluación del aprendizaje respectivamente. Al profesor Freddy Asprilla por sus observaciones en didáctica de la matemática y el material bibliográfico compartido. De igual manera agradezco al equipo de colaboradores de la Escuela de Ciencias de la Educación de la Universidad Icesi, demás profesores y compañeros y compañeras de la maestría y de la Institución Educativa José María Carbonell por su gran apoyo y voces de aliento.

A mis estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Carbonell, en especial a: Nicole Sanheli Carabalí Camacho, Luisa María Díaz Lasso, Ana Sofía Arango Beltrán, Juan David Gutiérrez Chavarro, Valeria León Gaviria, Sebastián Delgado Ortega y Yoselin Carolina Olave Chacón.

Tabla de contenido

	Pág.
Introducción	14
1. Problema de investigación.....	17
1.1 Planteamiento del problema.....	17
1.2. Formulación del problema	19
1.3. Objetivos	19
1.3.1 <i>Objetivo General</i>	19
1.3.2 <i>Objetivos Específicos</i>	19
1.4 Justificación	20
2. Marco teórico.....	25
2.1 Dimensión cognitiva	25
2.1.1 <i>Concepción del aprendizaje desde la perspectiva constructivista sociocultural</i>	25
2.1.2 <i>Aprendizaje basado en proyectos (ABP): conceptualización y fines</i>	29
2.1.3 <i>Bases teóricas en los que se apoya el aprendizaje basado en proyectos</i>	36
2.1.4 <i>Características del ABP</i>	42
2.1.5 <i>Fases para la implementación del ABP</i>	44
2.1.5 <i>Uso de las TIC en procesos de enseñanza y aprendizaje</i>	47
2.2 Dimensión didáctica.....	49
2.2.1 <i>Competencia matemática</i>	49
2.2.2 <i>Competencia matemática plantear y resolver problemas</i>	53
2.2.3 <i>Estructura de la competencia matemática</i>	58
2.2.4 <i>Resolución de problemas en matemáticas</i>	67
2.2.5 <i>Modelos desde la didáctica para la resolución de problemas matemáticos</i>	107
2.3 Dimensión curricular y matemática	116
2.3.1 <i>Objeto matemático de la investigación: razones y proporciones</i>	116
3. Metodología de la investigación	124
3.1 Tipo de investigación.....	124
3.2 Diseño metodológico	127
3.3 Población y muestra.....	128
3.4 Técnicas para la recolección de la información	130
3.4.1 <i>Categorías y subcategorías de análisis</i>	130
3.4.2 <i>Instrumentos</i>	131
4. Análisis de resultados.....	139

4.1 Identificación de las necesidades formativas	139
4.1.1 <i>Resultados generales de la prueba diagnóstica</i>	142
4.1.2 <i>Análisis cualitativo por cada una de las tareas</i>	151
4.1.3 <i>Consideraciones finales de la identificación de necesidades formativas</i>	160
4.2 Diseño e implementación de la estrategia ABP	161
4.2.1 <i>Rol del alumno en el ABP</i>	164
4.2.2 <i>Rol del docente en el ABP</i>	166
4.2.3 <i>Uso de las TIC en el aula: creación de ambientes de aprendizaje enriquecidos</i>	168
4.3 Movilización de la competencia planteamiento y resolución de problemas.....	169
4.3.1. <i>Caracterización de la competencia matemática planteamiento y resolución de problemas</i>	175
5. Conclusiones	205
6. Recomendaciones	210
Bibliografía	211
Anexos	217

Lista de figuras

	Pág.
Figura 1. Esquema básico del proceso escolar de enseñanza y aprendizaje.....	26
Figura 2. Noción de proyecto formativo	35
Figura 3. Características de un proyecto formativo.....	44
Figura 4. Componentes esenciales del proyecto formativo.....	47
Figura 5 Competencia desde el enfoque socioformativo	50
Figura 6 Modelo de Competencia Matemática (MCM).....	61
Figura 7 Modelo Teórico a Priori (MTAP) para la caracterización de le competencias matemáticas en el estudiante	63
Figura 8. Categorización de tareas según las capacidades demandadas a los alumnos	67
Figura 9. Plan de clasificación para los tipos de problemas matemáticos.....	80
Figura 10. Dimensiones que constituyen el significado del objeto matemático razón y proporción.....	116
Figura 11. Fases del diseño de la investigación	127
Figura 12. Distribución de los estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas grado quinto - sede Honorio Villegas.....	140
Figura 13. Distribución de los estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas grado quinto - sede Isabel de Castilla.....	140
Figura 14. Tarea 6b de la prueba diagnóstica.....	145
Figura 15. Tarea 9a de la prueba diagnóstica	145
Figura 16. Producción de estudiante E7	146
Figura 17. Tarea T9a y T9b resuelta por E31	147
Figura 18. Tarea 2 de la prueba diagnóstica.....	147
Figura 19. Tarea 5a/b de la prueba diagnóstica	148
Figura 20. Tarea T3 de la prueba diagnóstica	149
Figura 21. Tarea 4 de la prueba diagnóstica.....	151
Figura 22. Plan de tareas para el desarrollo del proyecto.....	163
Figura 23 Producción G1: sección su sitio publicado	169
Figura 24 Adaptación del modelo teórico a priori.....	171
Figura 25. Producción proceso P1: comprender el problema Pb1_E2.....	180
Figura 26. Producción proceso P1: comprender el problema Pb1_E4.....	181
Figura 27. Producción proceso P1: comprender el problema Pb12_G1	183
Figura 28. Fragmento producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb1_E2.....	186
Figura 29. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb1_E4.....	187
Figura 30. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb4_E24_G1 (Fragmento 1)	188
Figura 31. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb4_E24_G1 (Fragmento 2)	189
Figura 32. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb4_E24_G1 (Fragmento 3)	191

Figura 33. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb4_E12_G2	191
Figura 34. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E39_G3 (Fragmento 1)	192
Figura 35. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E6_G1 (Fragmento 1)	192
Figura 36. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E39_G3 (Fragmento 2)	193
Figura 37- Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E6_G1 (Fragmento 2)	194
Figura 38. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E10_G1	195
Figura 39. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb12_G2 (fragmento 1)	196
Figura 40. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb12_G2 (fragmento 2)	196
Figura 41. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb9_E10_G1	200
Figura 42. Producción proceso P3: revisar la tarea Pb9_E10_G1	200
Figura 43. Producción proceso P3: revisar la tarea Pb10_E10	201

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1. Las razones y proporciones en documentos curriculares del MEN.....	21
Tabla 2. Resultados por competencia Pruebas Saber 5° Matemáticas	22
Tabla 3. Definiciones de ABP	32
Tabla 4. Descripción de la estructura de un proyecto formativo	46
Tabla 5. Competencias matemáticas propuestas Proyecto KOM y Grupo OCDE/PISA	51
Tabla 6. Competencias organizadoras del currículo.....	55
Tabla 7 Indicadores que caracterizan las tareas según niveles de complejidad (Rico Romero, 2006).....	64
Tabla 8. Tipos de problemas según Abrantes (1989)	74
Tabla 9. Factores influyentes en la resolución de problemas	81
Tabla 10. Finalidad de la evaluación de la resolución de problemas en función del agente evaluador (Callejo, 1996).....	93
Tabla 11. Caracterización de instrumentos de evaluación para la resolución de problemas (Callejo, 1996)	95
Tabla 12. Instrumento de evaluación global para evaluar la resolución de problemas propuesto por Carrillo y Guevara (1996)	99
Tabla 13. Niveles de dominio de las competencias	104
Tabla 14. Resumen del modelo Mayer	112
Tabla 15. Fases de resolución de problemas	115
Tabla 16. Categorías y subcategorías de análisis.....	130
Tabla 17. Instrumentos de recolección de la información	131
Tabla 18. Ficha de caracterización de problemas aplicados	134
Tabla 19. Porcentaje de respuestas incorrectas por competencia matemática en pruebas Saber 5 (Pensamiento numérico variacional)	141
Tabla 20. Resultado grupal de la prueba diagnóstica	143
Tabla 21. Análisis de la prueba diagnóstica por tarea propuesta.....	152
Tabla 22. Conformación de grupos focales para el ABP.....	162
Tabla 23. Ejemplo de actividades del docente y estudiante	164
Tabla 24. Ejemplos actividades del docente durante una sesión de trabajo en ABP...	167
Tabla 25. Estructura de la rúbrica de desempeño	173
Tabla 26. Fragmento de la matriz de registro y análisis de desempeño de la competencia	176
Tabla 27. Ficha de caracterización del problema 1 (Pb1)	180
Tabla 28. Niveles de dominio proceso “comprender el problema” Pb1.....	182
Tabla 29. Ficha caracterización del problema 12 (Pb12)	182
Tabla 30. Niveles de dominio proceso "comprender el problema" Pb12.....	183
Tabla 31. Ficha de caracterización del problema 4 (Pb4)	187
Tabla 32. Ficha de caracterización del problema 7 (Pb7)	193
Tabla 33. Niveles de dominio proceso "diseñar y ejecutar un plan de acción" Pb12..	197

Tabla 34. Ficha de caracterización del problema 9 (Pb9)	199
Tabla 35. Niveles de dominio proceso "revisar la tarea" Pb12	201
Tabla 36. Niveles de dominio proceso "disposición" Pb12.....	202
Tabla 37. Niveles de dominio proceso "persistencia" Pb12	204

Resumen

Este estudio tiene como propósito evaluar la estrategia metodológica de aprendizaje basado en un proyecto (ABP) de enfoque formativo, con mediación de las TIC, que favorece la competencia planteamiento y resolución de problemas en torno al objeto matemático razones y proporciones, en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Carbonell de Cali.

Para llevar a cabo el propósito anterior, se realizó un estudio cualitativo orientado al estudio de caso, en donde se implementaron diversos instrumentos como: prueba diagnóstica, rúbrica para la valoración de la competencia, diarios de aprendizaje, observaciones de aula, entrevistas semiestructuradas, entre otros.

Como parte del diseño metodológico, se implementó una estrategia ABP denominada “Las razones y proporciones en un estudio sobre el consumo de agua en nuestro colegio”, con el cual se pretendía movilizar la competencia planteamiento y resolución de problemas, resolviendo problemas con niveles de complejidad crecientes y en diversos contextos, entre ellos, el reto central, como era calcular el consumo de agua en el colegio.

Palabras clave: aprendizaje basado en proyectos (ABP), competencia matemática, planteamiento y resolución de problemas, razones, proporciones.

Abstract

The purpose of this study is to evaluate the project-based learning (PBL) methodological strategy of a formative approach with ICT mediation, which favors the problem-solving literacy about proportions in students of seventh grade at José María Carbonell Educational Institution of Cali (Colombia).

To carry out the above purpose, a qualitative study oriented to the case study was carried out, where various instruments were implemented such as: diagnostic test, rubric for assessing competence, learning journals, classroom observations, semi-structured interviews, among others.

As part of the methodological design, an ABP strategy called “The reasons and proportions in a study on water consumption in our school” was designed and implemented, with which it was intended to mobilize the problem-solving literacy, solving problems with levels of increasing complexity and in various contexts, including the central challenge, such as calculating water consumption at school.

Keywords: project-based learning (PBL), mathematical literacy, problem solving, proportions.

Introducción

El presente informe es el resultado del proyecto de investigación titulado “Las razones y proporciones en un estudio sobre el consumo de agua en nuestro colegio: una estrategia ABP de enfoque formativo que favorece la competencia matemática planteamiento y resolución de problemas”, iniciado formalmente en el segundo semestre del año 2019.

Como elemento clave de esta investigación está el término competencia. El uso de este término ha penetrado fuertemente en el discurso de la matemática, sin embargo, es complejo determinar cómo trabajarlas de manera consecuente en las aulas, así como evaluar el efecto de sus intenciones en la comunidad educativa, por lo que a pesar que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, define que una persona es competente cuando utiliza conocimientos, habilidades y actitudes en contextos diferentes, la noción de competencia no se agota en dicha aproximación conceptual.

La naturaleza polisémica del término competencia y la clásica discusión sobre su aparente origen en las necesidades del mercado, ha impedido que desde la educación escolar, se miren las competencias con un sentido más amplio. Incluso ya siendo conocido que las competencias aparecen integradas al discurso académico a partir de la Chomsky a finales de la década de 1950, hoy, a la gran mayoría de los actores educativos nos cuesta integrarlas críticamente a un currículo que tradicionalmente se ha basado en la transmisión de conocimiento y no en su uso social.

Bajo esta mirada, esta investigación busca promover la movilización de la competencia matemática, concretamente, la de planteamiento y resolución de problemas a partir de una metodología que permita que los estudiantes se enfrenten a problemas en situaciones reales y escenarios auténticos, como es el caso del aprendizaje basado en proyectos (ABP).

Las referencias consultadas coinciden en que la resolución de problemas es un caracterizador del quehacer matemático. Con ella se ponen de manifiesto y toman significado prácticamente todos los aspectos trabajados en la educación matemática y por ello es considerada el eje articulador y central de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Kilpatrick, 1978; Lester, 1994; Schoenfeld, 1992; NCTM, 2003; Santos-Trigo, 2007). Se entiende entonces, que la resolución de problemas, sea considerada una competencia matemática fundamental a desarrollar y el eje articulador del currículo de matemáticas.

En este sentido, este trabajo intenta aportar evidencias sobre la estrategia metodológica del ABP desde el enfoque de proyectos formativos, en la movilización de la competencia matemática planteamiento y resolución de problemas, utilizando como objeto matemático movilizador, las razones y proporciones, de manera tal que a partir de los resultados generados, esta estrategia pueda ser usada en la prácticas docentes habituales, adaptándose según los contextos particulares.

Finalmente, para dar cuenta del impacto del aprendizaje basado en proyectos (ABP) en la competencia planteamiento y resolución de problemas, en torno al objeto matemático razones y proporciones, este informe se ha organizado en seis capítulos.

El **primer capítulo** presenta el problema y los objetivos que direccionaron y animaron la investigación. En el **segundo capítulo** se desarrolla el marco teórico que sustenta los planteamientos de esta investigación. Este apartado aborda tres dimensiones: la *dimensión cognitiva* en donde me adhiero al paradigma socioconstructivista del aprendizaje, y finalmente, se hace una aproximación conceptual al aprendizaje basado en proyectos y sus características. La *dimensión didáctica* presenta la noción de competencia desde la visión socioformativa de Tobón (2010) y específicamente la competencia matemática, desde Rico y Lupiañez (2008) y D'amore, Godino y Fandiño (2008), quienes

a pesar la polisemia y el carácter dinámico y complejo que la caracteriza, reconocen tres aspectos, desde los cuales fue posible analizar la movilización de la competencia matemática: el cognitivo, el afectivo y de tendencia de acción. En esta dimensión también se incluye lo que para propósitos de este estudio, se concibe por problema matemático desde los aportes de Mason (1988) y Polya (1965). Una tercera y última, es la *dimensión curricular y matemática*; en donde se describe la perspectiva curricular de esta investigación y el análisis del objeto matemático razones y proporciones.

Un **tercer capítulo** describe la metodología y el enfoque de la investigación (cualitativo, orientado al estudio de caso). El **cuarto capítulo** presenta la interpretación y análisis de los resultados de la intervención en el aula a través del ABP. El **quinto capítulo** sustenta las conclusiones generales a las que se ha llegado a través de este estudio y finalmente, en el **sexto capítulo** se exponen algunas recomendaciones de tipo pedagógico y de didáctica específica de la matemática.

1. Problema de investigación

1.1 Planteamiento del problema

La preocupación constante en el ámbito de la educación matemática en lo referido al currículo y la práctica del docente en el aula, aun cuando desde el discurso asumimos el trabajo por competencias, tiene dos caras: por un lado, la *cognitiva*, que se evidencia en las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones complejas y se requiere hacer uso de la competencia matemática, y por otro, la *afectiva*, reflejado en su rechazo casi que generalizado hacia las matemáticas.

Frente a esto, en muchas ocasiones se tiende a buscar la causa del problema en múltiples factores exógenos, que aunque condicionan e influyen decisivamente, no nos permiten, como docentes, aportar a la solución del problema desde el lugar que nos corresponde. Hoy, seguimos desarrollando una educación matemática desde una visión casi que totalmente instructiva, heredada de las llamadas matemáticas modernas, enfocadas en la mera transmisión de datos, procedimientos de cálculo y algoritmos obsoletos que los avances tecnológicos los convierten en innecesarios.

En este sentido, se hace necesario pensar en una didáctica para el desarrollo de la competencia matemática, es decir, una didáctica que alrededor de un contexto, establezca un nexo comunicativo, entre el docente que propone tareas ricas desde el punto de vista de exigencias cognitivas, al tiempo que éstas inducen el desarrollo de la actividad matemática de aprendizaje por parte del estudiante.

No obstante, aunque las pruebas masivas nacionales e internacionales, tipo PISA, SABER, TIMSS, etc., solo pueden mirar un aspecto de la competencia, se convierten en insumos importantes para evidenciar cuán efectivo es dicho nexo comunicativo o triángulo didáctico. Luego, es preciso hacer referencia a los resultados en las pruebas Saber 2014 a 2017, alcanzados por la Institución Educativa José María Carbonell de Cali,

que aunque en los últimos años ha hecho parte de las únicas tres instituciones educativas oficiales en Cali, que figuran en el nivel de clasificación A+ según el ISCE¹, demuestra que en el nivel de básica primaria, particularmente en grado quinto, los estudiantes presentan debilidades importantes en el componente numérico - variacional, pero sobre todo en la competencia de planteamiento y resolución de problemas.

Lo anterior se pone de manifiesto al indicar que en la prueba Saber 5 de matemáticas del año 2017², un 74.5% de los estudiantes evaluados no respondieron correctamente las preguntas correspondientes a la competencia de resolución de problemas y que en promedio sólo la mitad pudieron responder correctamente las situaciones relativas al pensamiento numérico-variacional, en cualquiera de las tres competencias evaluadas. Esto conlleva a establecer que se presenta un desempeño débil en los grados que anteceden a la educación básica secundaria, pues en las sedes, Honorio Villegas e Isabel de Castilla, el 48% y el 86% respectivamente de los estudiantes, se encuentran entre los niveles de desempeño mínimo e insuficiente.

De los componentes o pensamientos matemáticos que son evaluados: numérico, variacional, métrico, espacial y aleatorio, uno de los que mayor deficiencia refleja es el pensamiento numérico-variacional. En el grado quinto, el 74.5% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón. Un 46.8% no resuelve ni formula problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa, y casi la mitad de los estudiantes, tampoco resuelve ni formula problemas multiplicativos de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano.

¹ Índice Sintético de Calidad de la Educación -ISCE- es un indicador numérico que se mide en la escala de 1 a 10. Este se entregó por cada nivel educativo a todos los establecimientos educativos -EE- del país desde el año 2015. El ISCE es calculado por el ICFES a partir de los resultados de las pruebas Saber y la eficiencia interna de los E.E. (MEN, 2020)

² Por disposición del Gobierno Nacional, en el año 2018 se aplicaron únicamente pruebas Saber 11.

Es así como esta investigación, busca evaluar la implementación de la estrategia basado en un proyecto de enfoque formativo con mediación de las TIC que favorece la movilización de la competencia planteamiento y resolución de problemas en torno a las razones y proporciones.

1.2. Formulación del problema

Por lo descrito anteriormente, surge la necesidad de dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cómo la estrategia de aprendizaje basado en un proyecto de enfoque formativo con mediación de las TIC, favorece la movilización de la competencia planteamiento y resolución de problemas en torno al objeto matemático razones y proporciones, en los estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali, año 2019?

1.3. Objetivos

1.3.1 *Objetivo General*

Evaluar la implementación de la estrategia de aprendizaje basado en un proyecto de enfoque formativo con mediación de las TIC, que favorece la movilización de la competencia planteamiento y resolución de problemas en torno al objeto matemático razones y proporciones, en los estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali.

1.3.2 *Objetivos Específicos*

Identificar las necesidades formativas relacionadas con las razones y proporciones de los estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali

Diseñar e implementar la estrategia de aprendizaje basado en un proyecto de enfoque formativo con mediación de las TIC, que favorece la movilización de la competencia planteamiento y resolución de problemas en torno a las razones y proporciones en estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali.

Identificar los aspectos a mejorar y a consolidar en la implementación de la estrategia de aprendizaje basado en un proyecto de enfoque formativo con mediación de las TIC, que favorece la movilización de la competencia planteamiento y resolución de problemas en torno a las razones y proporciones en estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali.

1.4 Justificación

A pesar que la mayoría de autores y la experiencia propia como docente, demuestran que para implementar el aprendizaje basado en proyectos, se requiere una gran inversión de tiempo y dedicación por parte de los actores implicados, también coinciden en que son amplias las ventajas y oportunidades que ofrece esta estrategia metodológica para que docentes y estudiantes trabajen e interactúen en un ambiente de aprendizaje enriquecido, en el que el estudiante deja de asumir su papel de repetidor pasivo de lo que le ha sido enseñado y acepta el papel de actor protagonista de la construcción de su aprendizaje.

Los aportes que brinde este estudio serán de gran importancia para la educación matemática, en la medida que han sido pocas las investigaciones que abordan el enfoque de evaluación competencial de la matemática desde una mirada completa, es decir, evidenciando aspectos cognitivos, afectivos y de tendencia a la acción (D'Amore, Díaz Godino, & Fandiño Pinilla, 2008).

Respecto a la perspectiva disciplinar, esta investigación se enfocó en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, tomando como objeto matemático movilizador de la competencia, las razones y proporciones, y su gran relación con la vida cultural de la comunidad al interactuar con actividades como precios de mercancías, producción de cultivos, recetas de cocina, descuentos e IVA, por ejemplo. Igualmente la interacción con hechos y objetos materiales, dibujos ampliados, semejanzas de aspectos

arquitectónicos y en el arte, lo cual conlleva a reconocer que este objeto perdura y vive en el seno cultural de la sociedad.

Por otro lado, desde el currículo también se reconoce la importancia de trabajar la resolución de problemas en torno a las razones y proporciones. En ese sentido, en la tabla 1 se muestra la relación de los aprendizajes del diseño de esta investigación con la coherencia vertical de los estándares básicos de competencia y los derechos básicos de aprendizaje en matemáticas de grado primero a grado séptimo, con lo cual se justifica la necesidad de realizar propuestas como esta en los primeros años de la educación básica secundaria.

Tabla 1. Las razones y proporciones en documentos curriculares del MEN

Grados	Estándares básicos de competencia EBC	Grado	Derechos básicos de aprendiz DBA
1° a 3°	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.	1°	Describe cualitativamente situaciones para identificar el cambio y la variación usando gestos, dibujos, diagramas, medios gráficos y simbólicos.
		2°	
		3°	
4° a 5°	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas.	4°	Interpreta las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos.
	Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.		
4° a 5°	Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	5°	Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.
	Anализo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.		

6° a 7°	Justifico el uso de representaciones y procedimientos Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.	6°	Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).
	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.	7°	Utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades.

Fuente: MEN (2006; 2016)

Como se puede evidenciar en la tabla 1, el MEN en sus lineamientos y documentos oficiales, incluye aprendizajes que guardan una estrecha relación con las necesidades de formación que se pretenden abarcar en este estudio.

Tal como se expuso anteriormente, las pruebas masivas externas, ejemplo: Saber, TIMSS, PISA, a pesar que tienen en cuenta únicamente el aspecto cognitivo de la competencia o una mirada restringida de la misma, sirven como un referente que arroja información importante sobre el estado de la competencia en los estudiantes y en consecuencia, de la prácticas del docente, aunque, claramente pueden ser muchos los factores que complejizan la realidad escolar.

Bajo esta mirada es válido hacer mención de los resultandos alcanzados en Pruebas Saber por la Institución Educativa José María Carbonell en el área de matemáticas en el grado 5°, en los años 2014 al 2017. Así pues, la tabla 2 hace referencia al porcentaje de respuestas marcadas como incorrectas en las tres competencias evaluadas.

Tabla 2. Resultados por competencia Pruebas Saber 5° Matemáticas

Competencia	Porcentaje de respuestas marcadas como incorrectas			
	2014	2015	2016	2017

Resolución	40.9	43.9	37.4	51.0
Razonamiento	40.9	39.4	38.4	56.6
Comunicación	34.7	32.9	31.1	53.4

Fuente: informe por colegio del cuatrienio (Análisis histórico y comparativo) MEN – Siempre Día E

Como se desprende del informe anterior, en general existe una marcada debilidad en las tres competencias matemáticas evaluadas, no obstante, de acuerdo con los intereses de esta investigación, llama la atención que en la competencia de planteamiento y resolución de problemas, ha habido un aumento de 10 puntos porcentuales en las respuestas marcadas de forma incorrecta entre los años 2014 a 2017.

Dentro de los resultados relacionados con la identificación de necesidades formativas, que estarán más adelante (capítulo 4), también se hará un poco más de énfasis en el desmejoramiento de los desempeños analizados por aprendizajes relativos a los contenidos alrededor del objeto matemático razones y proporciones.

De acuerdo con esto, hay una marcada debilidad en la competencia matemática, demostrada en las etapas previas a la educación secundaria que evidentemente redundará en los desempeños posteriores. En ese sentido, cabe establecer que la enseñanza de las matemáticas deben estar al servicio del desarrollo de la competencia matemática, por lo que si no hay desarrollo de ésta, definiéndola de manera sencilla, como la puesta en marcha de recursos (conocimientos, habilidades y actitudes) (Perrenoud, 2004), en contextos de uso³, entonces, evidentemente, hay deficiencias en su enseñanza, o en una mirada más amplia, en las prácticas del docente.

³El proyecto PISA cita cinco contextos de uso de las matemáticas: personal, educativo, profesional, público y científico.

Para Goñi (2008), no es claro hablar de contexto educativo porque si se habla de currículo escolar, lo educativo es precisamente el contexto que engloba a todos los demás, pues desde la escuela es que se trabajan competencias que pueden aplicarse en el resto de contextos: personal, profesional, público y científico (académico).

Partiendo del hecho de que la competencia matemática hay que trabajarla a lo largo de toda la vida, y pensarse como expectativas de aprendizaje a largo plazo, es necesario, ir la desarrollando a partir de tareas, vistas como expectativas a corto plazo que le apuntan a los objetivos de largo plazo (las competencias). Dichas tareas serán pues las que posibilitan el nexo comunicativo e interactivo, entre el docente que las diseña y propone (enseñanza propuesta), y el estudiante que desarrolla actividad de aprendizaje (aprendizaje). Es decir una tarea matemática se convierte en actividad de manera que induce conocimiento en la otra persona. Así las cosas, es necesario establecer el tipo de tareas y el nivel de complejidad que implica.

En consecuencia, los problemas, son el tipo de tarea por predilección en la educación matemática, pues en el sentido más general, integra a las demás. Los problemas se convierten entonces en ejes articuladores del currículo capaces de desarrollar competencia, siempre y cuando tengan un grado de apertura y complejidad variable. En otras palabras, que permitan tener al estudiante en un margen de elección que va desde el uso de estrategias de resolución rutinarias (problemas-ejercicios) hasta aquellas en las que se requieren estrategias creativas y auténticas y sobre todo, en contextos cercanos y realistas.

Por lo tanto, al pensar en una estrategia metodológica que posibilite la resolución de problemas de contexto y cercanos a la realidad inmediata del estudiante, hace que emerja el aprendizaje basado en proyectos, como oportunidad para facilitar que los estudiantes aprendan ejecutando acciones con sentido y significado, en las que articulan contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, mientras resuelven problemas con los que cuales desarrollan competencia matemática.

De los argumentos expuestos hasta aquí, radica la importancia de este estudio como aporte a la educación matemática, que a partir del trabajo con un objeto matemático

de gran uso social en la vida de los estudiantes como son las razones y proporciones y una estrategia de evaluación auténtica como el aprendizaje basado en proyectos, permitan movilizar aspectos cognitivos y afectivos de la competencia matemática y el desarrollo de otras habilidades, con las cuales se podrá integrar a una ciudadanía global.

2. Marco teórico

En el presente capítulo se desarrolla el marco teórico que fundamenta el problema de investigación y sirve como referente para la intervención didáctica, así como para el diseño de los instrumentos de recolección y análisis de los datos. Este marco teórico se aborda a partir de tres dimensiones teóricas, a saber: dimensión cognitiva; dimensión didáctica; y dimensión curricular y matemática.

2.1 Dimensión cognitiva

2.1.1 *Concepción del aprendizaje desde la perspectiva constructivista sociocultural*

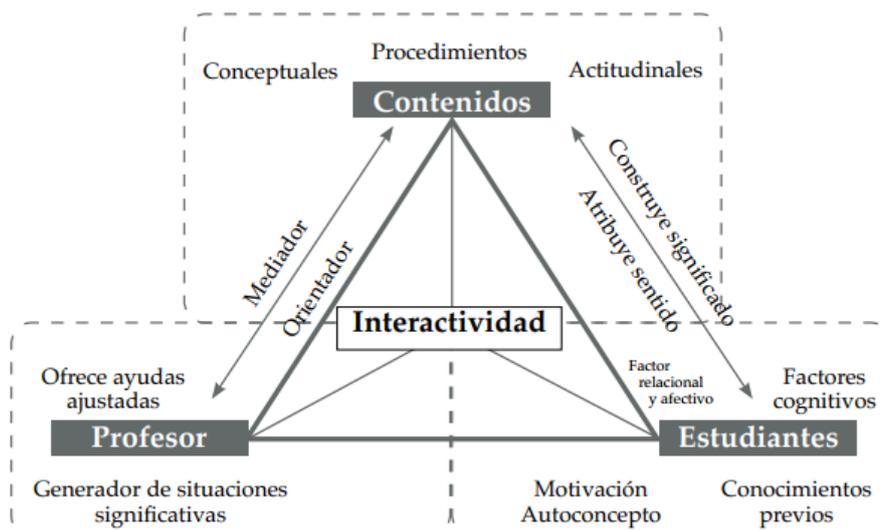
Cuando se plantean propuestas de intervención didáctica es importante conocer la naturaleza de las funciones de la educación y de las características propias y específicas de los procesos escolares de enseñanza y aprendizaje. En ese sentido, ésta investigación se circunscribe en la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje escolar, más específicamente desde el constructivismo sociocultural o socioconstructivismo, inspirado en los planteamientos de Vygotsky.

Desde esta perspectiva el aprendizaje se analiza en el marco de la relación interactiva entre profesor, estudiante y contenidos, los cuales conforman el triángulo interactivo (Coll C. , 2001). Dicha relación de complejidad tiene en cuenta la interrelación de los tres elementos: el estudiante, que aprende desarrollando su actividad mental de carácter constructivo, el contenido de objeto de enseñanza y aprendizaje como un producto social y cultural, y el profesor, que ayuda al alumno en el proceso de

construcción de significados y de atribución de sentido a los contenidos de aprendizaje.

Figura 1.

Figura 1. Esquema básico del proceso escolar de enseñanza y aprendizaje



Fuente: adaptada de Coll C., 2001

En el marco de la interactividad, el aprendizaje escolar se caracteriza especialmente por tres aspectos:

En primer lugar, el principio de la actividad mental constructivista de los estudiantes como elemento mediador de la enseñanza y de su incidencia sobre el aprendizaje.

En segundo lugar, el hecho de que esta actividad mental constructiva se aplica a formar y saberes culturales –los contenidos escolares– que poseen un grado considerable de elaboración; es decir, a contenidos que profesores y estudiantes encuentran ya en buena medida, elaborados y definidos en el momento que se aproximan a ellos. Para la concepción constructivista, ésta es una característica fundamental del proceso de construcción del conocimiento en la escuela por una parte, los alumnos sólo pueden aprender los contenidos en la medida en que despliegan entre ellos una actividad mental

constructiva generadora de significados y de sentido. Por otra parte, el desencantamiento de esta actividad mental constructiva no es suficiente para que la educación escolar alcance los objetivos propuestos: que el sentido y los significados construidos por los alumnos sean acordes y compatibles con lo que significan y representan los contenidos escolares como saberes culturales ya elaborados.

Y en tercer lugar, y como consecuencia de lo anterior, el papel destacado del profesor en el proceso de construcción de significados y de atribución del sentido que llevan a cabo los estudiantes. En efecto, además de favorecer la aparición y el despliegue de una actividad mental constructiva en los estudiantes, el profesor tiene la misión y la responsabilidad de orientarla y guiarla en la dirección que marcan los saberes y formas culturales incluidas en el currículo como contenidos de aprendizaje. En otras palabras, la función del profesor consiste en asegurar una conexión adecuada entre la actividad mental constructiva de los alumnos y los significados sociales y culturales que reflejan los contenidos escolares.

En esta perspectiva, el aprendizaje escolar implica un proceso de construcción de significados o representaciones de la realidad, así como también de atribución de sentido a lo aprendido por parte de los estudiantes (contenidos escolares), aspecto en los que profundiza a continuación.

Definir el aprendizaje como “proceso de construcción” implica considerar que “aprender” tiene que ver con la elaboración y reelaboración de significados sobre aspectos o parcelas de la realidad y no simplemente con la repetición memorística de conceptos, datos o hechos para, luego reproducirlos. Según Mauri (2007) “aprender es algo equivale a elaborar una representación personal del contenido objeto de aprendizaje” (p27); e implica también considerar al estudiante como un ser que piensa, poseedor de esquemas mentales que sirven de base y punto de partida para las nuevas construcciones. Los

esquemas o conocimientos previos, se entiende, desde la concepción constructivista, en términos de “esquemas de conocimiento”, y son la “la representación que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad”. (Mauri, 2007).

Los conocimientos previos le permiten al estudiante enganchar los nuevos contenidos y atribuirles significado. Esta vinculación entre lo previo y lo nuevo es el resultado de un proceso activo de los estudiantes que permite reorganizar el conocimiento y enriquecerlo. En este proceso, el profesor se convierte en un participante activo en la construcción de conocimiento en torno a esos contenidos que son objeto de enseñanza y aprendizaje y es el responsable de proporcionar andamiaje y ayuda ajustada a las necesidades del alumno.

La atribución de sentido es el proceso que moviliza lo cognitivo, y que conduce a revisar y a aportar los esquemas propios de conocimiento para dar cuenta de una nueva situación, tarea o contenido de aprendizaje (Mauri, 2007). Esa movilización no finaliza aquí, sino que, como resultado del contraste entre lo previo y lo nuevo, los esquemas aportados pueden sufrir modificaciones, con el establecimiento de nuevos esquemas, conexiones y relaciones en la estructura cognoscitiva. La movilización debe ser desencadenada por un interés, por una necesidad de saber, lo que demuestra que, en el aprendizaje, además de factores cognitivos relacionados con la existencia de conocimientos previos que se ponen en juego y que permiten el puente hacia la nueva construcción, está presentes también factores de tipo afectivo y relacional.

Para Onrubia (1996), el “sentido” remite, al conjunto de intenciones, propósitos y expectativas con las que los estudiantes se aproximan al aprendizaje de determinado contenido escolar, y da lugar a la adopción de cierta disposición, más o menos favorable, a aprenderlo de manera significativa. Sentido y disposición, desde esta perspectiva,

refleja, entre otros elementos, la manera en que los estudiantes se sitúan frente al doble carácter de dificultad y de oportunidad que, en tanto proceso de cambio, conlleva el aprendizaje escolar: “aprender supone siempre un cierto reto o desafío, un cierto interrogante de apertura a lo nuevo, que puede experimentarse como algo estimulante o como algo difícil de soportar, como algo que vale la pena o que, por el contrario, debe rechazarse”.

2.1.2 Aprendizaje basado en proyectos (ABP): conceptualización y fines

El Aprendizaje basado en proyectos, en adelante ABP⁴, es un modelo de aprendizaje que se organiza en torno a proyectos (Thomas, 2000). Este aparece por primera vez en el artículo *The Project Method*, de William Kilpatrick en 1918, apoyándose en las teorías de Dewey.

En ABP los alumnos trabajan de manera activa, y son quienes planean, implementan y evalúan diferentes proyectos, cuya aplicación va más allá del aula, vinculando el aprendizaje con el mundo real. (Harwell, 1997). El ABP implica completar tareas complejas que típicamente dan lugar a un producto, acontecimiento o presentación realista a una audiencia.

Este método en donde se considera al estudiante como centro del aprendizaje, se caracteriza según Thomas (2000) por: 1) ser central al currículo, 2) organizado alrededor de la formulación de preguntas que conduzcan a los estudiantes a los conceptos o principios centrales de una disciplina, 3) centrada en una investigación constructiva que

⁴ En la literatura revisada existe cierto debate sobre la distinción entre aprendizaje basado en proyectos y el basado en problemas. Los académicos del PBL (por sus siglas en inglés), distinguen entre los dos (Ertmer y Simons, 2006) y reconocen que los dos conceptos tienen historias diferentes, pero también argumentan que el aprendizaje basado en problemas es un tipo de aprendizaje basado en proyectos (Larmer, 2014). De manera similar (Thomas, 2000) observó que, aunque el aprendizaje basado en problemas típicamente incluye más componentes “tutoriales” para promover el razonamiento deductivo, los componentes esenciales del aprendizaje basado en problemas se alinean con los cinco criterios PBL. Otros han argumentado que es importante aclarar las diferencias entre los dos conceptos, ya que algunos enfoques del aprendizaje basado en proyectos, a diferencia del aprendizaje basado en problemas, exige que los profesores especifiquen el producto final y proporcionen orientación sobre el enfoque de los alumnos para la creación del producto (Savery, 2006).

implique indagación y producción de conocimiento, 4) impulsado por los estudiantes, donde los estudiantes son responsables de hacer elecciones así como de diseñar y controlar su trabajo, y 5) auténtico, plantea problemas que ocurren en el mundo real.

Generalmente, la investigación sobre las ventajas del aprendizaje basado en proyectos concluye que los estudiantes que participan en este enfoque obtienen beneficios relacionados con el aprendizaje factual y que estos beneficios son equivalentes o superiores a los que obtienen los estudiantes que participan en formas de instrucción tradicionales. (Thomas, 2000). Sin embargo, las metas del ABP son más amplias. Este enfoque tiene por objeto permitir a los estudiantes transferir mejor su aprendizaje a nuevos tipos de situaciones y problemas, así como usar el conocimiento con más destreza en situaciones de desempeño.

El ABP persigue alcanzar ciertas metas más allá de los objetivos curriculares y favorece la formación integral de los alumnos, por lo que se fundamenta principalmente en las teorías constructivistas (Pellegrino & Hilton, 2012), que surgieron a partir de los trabajos de Vygotsky, Piaget, Bruner, Ausubel y Dewey. El ABP vincula a los estudiantes con una actividad, en la que estos tienen que aplicar conocimientos y estrategias, desarrollar pensamiento crítico y creativo, promoviendo así el aprendizaje activo.

Entre los fines del aprendizaje basado en proyectos que se recogen en Coria (2005), se destacan:

- Hacer partícipes a los alumnos a su propio aprendizaje, de manera que cada uno de ellos construya su propio conocimiento.
- Potenciar el trabajo colaborativo, fomentar la participación, la toma de decisiones de manera autónoma y el pensamiento crítico.
- Afrontar el aprendizaje de manera interdisciplinar, en el que el conjunto de áreas se relacionan y no son tratadas de manera aislada.

- Desarrollar competencias y habilidades y aplicar conocimientos.
- Aumentar la motivación de los alumnos.

El ABP es un método pedagógico importante y “parece no emplearse mucho en la educación matemática” (Bishop, 1999), el cual permite la participación personal profundizando en una situación dada, otorga a la enseñanza un rasgo individualizado y personalizado. En el mismo sentido, Ramírez (2012) citado por Arreguí, Alfaro, y Ramírez (2012) menciona que el ABP consiste en enfocar actividades individuales y en equipo, relacionadas con el “aprender a aprender juntos”; resolver problemas educativos reales, poniendo en práctica los conocimientos recién adquiridos y el buscar solucionar o desarrollar proyectos de forma integrada.

Los productos presentes en el ABP se caracterizan porque el resultado puede ser usado o visto por otros (Moursund, 1999). En consecuencia, los productos resultantes en el desarrollo del proyecto deben ser diferentes a los tradicionales, por ejemplo, una obra de teatro, una exposición abierta a toda una comunidad educativa, un libro, una revista, un vídeo, etc. Por otro lado, los productos resultantes pueden ser de larga duración, crecer y quedar establecidos en toda una comunidad, como lo sería una emisora de radio, un programa de televisión, campañas de salud o cuidado del medio ambiente.

Moursund (1999) afirma que a pesar que el ABP permite incorporar conocimientos de diferentes disciplinas, esto no significa que un proyecto desarrollado no deban cumplir con los objetivos de aprendizaje de un área específica. Lo anterior sugiere que las actividades propuestas por los docentes deben ser planeadas, de forma tal, en que el desarrollo de las diferentes etapas del ABP los alumnos aprovechen los conocimientos de diferentes áreas, pero que a la vez, el eje principal de conocimiento este enfocado en los saberes propios del área donde se está desarrollando el proyecto.

A continuación se sintetiza los aspectos comunes y más relevantes en parte de la literatura encontrada acerca del ABP.

Tabla 3. Definiciones de ABP

Autor(es)	Definiciones
(Blumenfeld, Soloway, & Marx, 1991)	En el ABP los alumnos persiguen soluciones a problemas no triviales, generando y refinando preguntas, debatiendo ideas, realizando predicciones, diseñando planes y/o experimentos, recolectando y analizando datos, estableciendo conclusiones, comunicando sus ideas y resultados a otros, realizando nuevas preguntas y creando o mejorando productos y procesos.
(Harwell, 1997) (Dickinson, y otros, 1998) (Blanck, 1997)	Esta estrategia de enseñanza constituye un modelo de instrucción auténtico en el que los estudiantes planean, implementan y evalúan proyectos que tienen aplicación en el mundo real más allá del aula de clase.
(Thomas, 2000)	Los proyectos son tareas complejas, basadas en preguntas desafiantes o problemas, que involucran a los estudiantes en el diseño, resolución de problemas, toma de decisiones, o actividades de investigación, ofreciéndoles la oportunidad de trabajar de forma relativamente autónoma durante extensos períodos de tiempo, y que culminan en productos reales o presentaciones.
(Hernández, 1998)	Los proyectos de trabajo [...] implican que los alumnos participen en un proceso de investigación, que tienen sentido para ellos y ellas (no porque sea fácil o les gusta) y en el que utilizan diferentes estrategias de estudio; pueden participar en el proceso de planificación del propio aprendizaje, y les ayuda a ser flexibles, reconocer al “otro” y comprender su propio entorno personal y cultural. Esta actitud favorece la interpretación de la realidad. Los proyectos así entendidos, [...] favorecen el desarrollo de estrategias de indagación, interpretación y presentación del proceso seguido al estudiar un tema o un problema, que por su complejidad favorece el mejor conocimiento de los alumnos y los docentes de sí mismo y del mundo en el que viven.
(Moursund, 1999)	El aprendizaje por proyectos se enfoca en un problema que hay que solucionar o en una tarea que se debe realizar. La idea fundamental en la solución de problemas o la realización de tareas, es la de que estas se constituyen sobre el trabajo que hayan realizado anteriormente, usted u otro. Cuando se enfrenta a un problema o tarea que constituye un desafío, se utiliza el conocimiento, las habilidades, y las ayudas que otras personas han desarrollado, así como su propio conocimiento, habilidades y la experiencia adquirida en trabajos anteriores.
(Tobón Tobón, Pimienta Prieto, & García Fraile, 2010)	Para Tobón los proyectos formativos (PF) tienen su origen en el ABP y se definen como procesos planeados que reemplazan las asignaturas y se orientan a la formación de una o varias competencias teniendo como base un determinado nodo

	problematizador al cual se articulan mediante el análisis y la resolución de un problema específico contextualizado en el entorno. Los PF se basan en problemas reales de la vida en integran saberes, mientras que las asignaturas son espacios parceladores del conocimiento.
(Mettas & Constantinou, 2007)	Con la aplicación de esta estrategia, los estudiantes definen el propósito de la creación de un producto final, identifican su mercado, investigan la temática, crean un plan para la gestión del proyecto y diseñan y elaboran un producto. Ellos comienzan el proyecto solucionando problemas, hasta llegar a su producto. El proceso completo es auténtico, referido a la producción en forma real, utilizando las propias ideas de los estudiantes y completando las tareas en la práctica.
(Kilpatrick, 1978)	El método de proyectos es un procedimiento dinámico que consiste en organizar la enseñanza mediante actividades con verdadero sentido vital para los estudiantes. Kilpatrick (1978) entiende un proyecto como un plan de trabajo integrado y libremente elegido cuyo objetivo es realizar un conjunto de acciones enmarcadas en la vida real que interesan tanto a los estudiantes como al docente, por lo cual despiertan entusiasmo en torno a su ejecución.

Al recoger las definiciones anteriores, el ABP se puede definir como un método sistemático de enseñanza que involucra a los estudiantes en un proceso de investigación e indagación, planificación, implementación y evaluación, orientado hacia un diseño o producto final. El proceso se desarrolla a través del planteamiento de problemas reales y auténticos, cada vez más complejos, que permitan a los alumnos adquirir y poner en práctica los conocimientos y habilidades necesarias, desarrollar sus estrategias y comunicar sus resultados.

Thomas (2000) por su parte establece cinco criterios básicos que según él no constituyen una definición de ABP, sino que están diseñados para responder a la pregunta ¿qué tiene que tener un proyecto con el fin de ser considerado como ejemplos de ABP?

Estos criterios son:

- En el ABP, el proyecto es la estrategia central de enseñanza. Los estudiantes encuentran y aprenden los conceptos centrales de la disciplina a través del proyecto. Se excluyen, por tanto, aquellos proyectos que sirven para proporcionar

ilustraciones, ejemplos o aplicaciones prácticas del material enseñado inicialmente por otros medios. Tampoco estarían incluidas aquí las actividades extraescolares o aquellas actividades no formales en las que los estudiantes aprenden cosas que están fuera del plan de estudios.

- Los proyectos en el ABP están centrados en cuestiones o problemas que “conducen” a los estudiantes a adquirir los conocimientos y habilidades necesarias en una disciplina. La idea es que ese “foco” principal de atención que dirige y proyecto permita “... establecer una conexión entre las actividades y el conocimiento conceptual subyacente que se pretende asimilen los alumnos”. (Blumenfeld, Soloway, & Marx, 1991).
- Los proyectos involucran a los estudiantes en una investigación constructiva. Dicha investigación es entendida como un proceso dirigido a un objetivo que implica la indagación, la creación de conocimiento y la resolución. Las actividades centrales del proyecto deben implicar la transformación y la construcción del conocimiento, la asimilación de nuevos contenidos y la adquisición de nuevas habilidades por parte de los estudiantes. Si las actividades centrales del proyecto no representan ninguna dificultad para el estudiante o se puede llevar a cabo con la aplicación de la información aprendida o habilidades ya desarrolladas, el proyecto no es considerado adecuado para el ABP.
- Los proyectos en el ABP deben ser impulsados por el estudiante en algún grado significativo, y deben otorgar al estudiante bastante más autonomía, libertad de elección, tiempo de trabajo sin supervisión y responsabilidad que la enseñanza tradicional. No deben estar dirigidos todo el tiempo por el profesor, no con un guion establecido o un resultado predeterminado.

- Los proyectos son realistas y deben incorporar aspectos que transmitan una sensación de autenticidad a los estudiantes: el tema central, las tareas, los roles que los estudiante juegan, el contexto en que se lleva a cabo el trabajo del proyecto, los colaboradores que trabajan con los estudiantes en el proyecto, los productos que se elaboran, o los criterios por los que los resultados serán evaluados. El ABP incorpora retos de la vida real donde la atención se centra en auténticos problemas o preguntas cuyas soluciones necesitan ser implementadas.

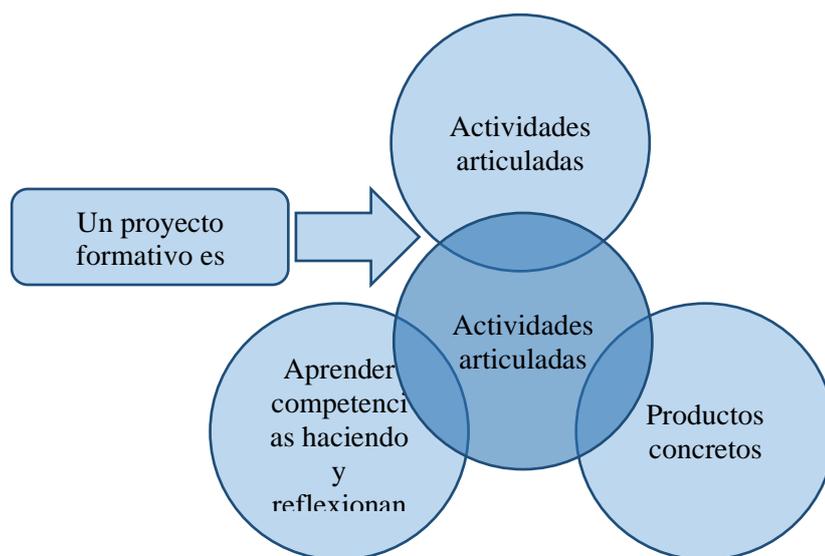
En esta investigación se aborda el ABP desde la mirada de Moursund (1999) con la integración de las TIC, pero el diseño se fundamentará en el paradigma de un proyecto formativo (Tobón Tobón, Pimienta Prieto, & García Fraile, 2010). Los proyectos formativos según Tobón et al (2010), constituyen una forma de trabajo dinámica, interactiva y enfocada a problemas del contexto personal, social, cultural, artístico, ambiental, ecológico, laboral, disciplinar y científico.

Los proyectos formativos son una estrategia didáctica y de evaluación de competencias que abordan aspectos comunes a cualquier proyecto, como la contextualización o diagnóstico, planeación, construcción, del marco de referencia conceptual, ejecución, evaluación y socialización.

Estos autores enfatizan en la importancia del trabajo por proyectos formativos en la medida que a través de estos los estudiantes aprenden a enfocarse en situaciones, problemas y retos de la vida, lo que les lleva al aprendizaje de las competencias con la mediación del docente, abordando de manera articulada los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

La figura 2 muestra un resumen que da una noción de lo que es un proyecto formativo.

Figura 2. Noción de proyecto formativo



Adaptado de Tobón y otros, (2010)

En la vida cotidiana, las personas aprenden realmente cuando realizan actividades prácticas y resuelven problemas, ya que esto implica desarrollar y movilizar conocimientos, habilidades procedimentales y actitudes. De igual forma, se busca lograr que los estudiantes se enfrenten a retos pertinentes y significativos del contexto para ellos y, con base en ello, adquieran y formen las competencias esperadas. (Tobón et al, 2010).

2.1.3 Bases teóricas en los que se apoya el aprendizaje basado en proyectos

2.1.3.1 Bases en el aprendizaje significativo.

En el aprendizaje basado en proyectos se tienen en cuenta las contribuciones del aprendizaje significativo, retomando la perspectiva propuesta por Vygotsky, que tiene raíces en la actividad social y que se preocupa más por el sentido de las palabras que por su significado. Un significado es más una acción mediada e interiorizada (re-presentada) que una idea o representación codificada en palabras.

En ese sentido Ausubel critica la aplicación mecánica del aprendizaje en el aula, manifestando la importancia que tienen el conocimiento y la integración de los nuevos

contenidos en las estructuras cognoscitivas previas del alumno, y su carácter referido a las situaciones socialmente significativas, donde el lenguaje es el sistema básico de comunicación y transmisión de conocimientos.

En correspondencia con esta teoría, las principales variables que afectan el aprendizaje y el material lógicamente significativo son:

- a) La disponibilidad, en la estructura cognoscitiva del alumno, de ideas de afianzamiento específicamente pertinentes en un nivel óptimo de inclusividad, generalidad y abstracción.
- b) El grado en que tales ideas son discriminables de conceptos y principios, tantos similares como diferentes, del material de aprendizaje.
- c) La estabilidad y claridad de las ideas de afianzamiento (Ausubel, 1997 citado por Pimienta, 2007, p.13).

Estas variables, cuando están presentes, afectan positivamente el proceso al mejorar de manera directa y específica la asimilación de significados, influyendo en el mismo (como resultado del cual surgen significaciones nuevas) y aumentando su fuerza de disociabilidad.

En este orden de ideas, se ha planteado que para realizar aprendizajes significativos debemos pasar por cinco dimensiones: establecer percepciones y actitudes adecuadas para aprendizaje, adquirir e integrar el conocimiento, extender y refinar el mismo, para usarlo en forma significativa, y lograr hábitos mentales productivos.

En el aprendizaje significativo importa más el proceso de descubrimiento de conocimientos y habilidades y la adquisición de nuevas experiencias que el almacenamiento pasivo de grandes cantidades de información y teorías ya elaboradas. Hablando de la formación de competencias, se puede plantear que no hay competencia dada, sino construida.

El proceso de asimilación cognoscitiva característico del aprendizaje significativo se realiza mediante la subyunción o el aprendizaje subordinado, el aprendizaje supraordenado y el aprendizaje combinatorio; pero antes de explicar lo que significa cada uno de ellos se hace necesario esclarecer el concepto estructura cognitiva dentro de la concepción de Ausubel.

Este autor utiliza las estructuras cognitivas para designar el conocimiento de un contenido determinado y organización clara y estable, las cuales están en conexión con el tipo de conocimientos, su amplitud y su grado de organización. Ausubel sostiene que la estructura cognitiva de una persona es el factor que decide la significación del materia nuevo y su adquisición y retención. Las ideas nuevas sólo pueden aprenderse y retenerse si se refieren a conceptos o proposiciones ya disponibles, que proporcionan anclas conceptuales.

La potenciación de la estructura cognitiva del alumno facilita la adquisición y retención de los conocimientos nuevos. Si el material nuevo entra en un fuerte conflicto con la estructura cognitiva existente o no se conecta con ella, la información no puede ser incorporada ni retenida. El estudiante debe reflexionar activamente sobre el material nuevo, pensando los enlaces y semejanzas y reconciliando diferencias o discrepancias con la información existente, es decir, implicando competencias en el aprendizaje.

En el *aprendizaje subordinado*, el concepto nuevo se encuentra subordinado jerárquicamente a otro ya existente. Esto se produce cuando las ideas nuevas se relacionan en forma subordinada con las ideas relevantes de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. Se genera, pues, una diferenciación progresiva de los conceptos existentes en varios de nivel de abstracción inferior. La subordinación de los conceptos puede hacerse sin que la información nueva modifique los atributos del concepto incluso (son ejemplificaciones) ni cambie el significado del mismo.

En el *aprendizaje supraordenado* el proceso es inverso: en éste los conceptos relevantes que se encuentran en la estructura cognitiva son de menor grado de abstracción, generalidad e inclusividad que los conceptos nuevos. Con la información adquirida, los conceptos ya existentes se reorganizan y adquieren nuevo significado. Suele ser un proceso que va de abajo a arriba y se produce una reconciliación integradora entre rasgos o atributos de varios conceptos, que dan lugar a otro más general (supraordenado). Cuando se realizan comparaciones (proceso de encontrar semejanzas, diferencias y arribar a conclusiones), se facilita esta reconciliación conceptual. Cuando un concepto se integra bien en otro más general, posee una consonancia cognitiva o reconciliación integradora. Se genera una disonancia cognitiva cuando aparecen dos conceptos contradictorios o no integrados en forma adecuada.

El *aprendizaje combinatorio* consiste en la relación, de un modo general, de conceptos nuevos con la estructura cognitiva existente, pero sin que se produzca la subordinación o supraordenación. Se apoya en la búsqueda de elementos comunes entre las ideas, pero sin establecer relación de supra o subordinación.

Se considera que la estructura cognitiva está organizada jerárquicamente respecto al nivel de abstracción, generalidad e inclusividad de las ideas o conceptos. En los aprendizajes subordinados y supraordenados existe una relación jerárquica, lo no se produce en el aprendizaje combinatorio.

Con el objetivo de que el alumno desarrollo formas activas de construcción, el profesor podría:

1. Presentar las ideas básicas unificadoras antes de los conceptos más periféricos.
2. Observar y atender las limitaciones generales del desarrollo cognitivo de los alumnos.

3. Utilizar definiciones claras y provocar la construcción de las similitudes y diferencias entre conceptos relacionados.
4. Partir de las exigencias de sus alumnos, como criterio de comprensión de la reformulación de los conocimientos nuevos en sus propias palabras.

El aprendizaje significativo se favorece con los “puentes cognitivos” entre lo que el sujeto ya conoce (que es el nivel de desarrollo real vygotskyano) y lo que necesita conocer para asimilar significativamente los conocimientos nuevos (zona de desarrollo próximo que conlleva al nivel de desarrollo potencial). Dichos puentes son los que se denominan *organizadores previos*: conceptos, ideas iniciales y material introductorio, presentados como marco de referencia para introducir los conceptos y relaciones nuevas.

La integración de los conocimientos nuevos y su asimilación en novedosas estructuras cognoscitivas supone, dos condiciones y no sólo una, como se ha planteado tradicionalmente: la disposición activa del alumno para aprender y un trabajo activo del maestro mediador con el fin de lograr en sus estudiantes el proceso de construcción de los aprendizajes. Es decir, implicar al alumno en actividades “situadas” (contextualizadas).

Lo fundamental del aprendizaje significativo consiste en que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes en el sujeto, en un proceso activo y personal (Ausubel, 1976):

Activo, porque depende de la asimilación deliberada de la tarea de aprendizaje por parte del alumno.

Personal, porque la significación de toda tarea de aprendizaje depende de los recursos cognitivos que emplee cada alumno.

2.1.3.2 Bases en el aprendizaje cooperativo.

Los proyectos se pueden realizar como actividad individual, pero en el mundo actual y en la mayoría de los trabajos es importante saber colaborar. En ABP, parte del proyecto debe realizarse en equipo, y esto no significa simplemente dividir las tareas del proyecto, completarlas individualmente y luego ponerlas en común, sin síntesis ni discusión.

Así pues el trabajo cooperativo no sólo constituye un medio sino fin en sí mismo en una sociedad como la de hoy en día, por lo que la cooperación es la condición para la realización de tareas, de manera que no se puede tener éxito si los compañeros no lo tienen, al punto que el éxito propio se liga al éxito del resto.

El aprendizaje cooperativo (Díaz-Aguado, 2003) aporta una mejora significativa del aprendizaje de los alumnos que se implican en él, en términos de:

Motivación por la tarea.

Actitudes de implicación y de iniciativa.

Grado de comprensión de lo que se hace y del porqué se hace.

Volumen de trabajo realizado y calidad del mismo.

Grado de dominio de procedimientos y conceptos.

Relación social en el aprendizaje.

Díaz Aguado (2003) señala las siguientes características y componentes del aprendizaje cooperativo:

Características del aprendizaje cooperativo:

Elevado grado de igualdad: debe existir un grado de simetría en los roles que desempeñan los participantes en una actividad grupal.

Grado de mutualidad variable: la mutualidad es el grado de conexión, profundidad y bidireccionalidad de las transacciones comunicativas. Los más altos de niveles de

mutualidad se dará cuando se promueva la planificación y la discusión en conjunto, se favorezca el intercambio de roles y se delimite la división del trabajo entre los miembros.

Componentes del aprendizaje cooperativo:

Interdependencia positiva: ocurre cuando los estudiantes pueden percibir un vínculo con el grupo de forma tal que no pueden lograr el éxito sin los compañeros y viceversa. Deben de coordinar los esfuerzos con los compañeros para poder completar una tarea, compartiendo recursos, proporcionándose apoyo mutuo y celebrando juntos sus éxitos.

Interacción promocional cara a cara: más que una estrella se necesita gente talentosa que no pueda hacer una actividad sola. La interacción cara a cara es muy importante ya que existe un conjunto de actividades cognitivas y dinámicas interpersonales que sólo ocurren cuando los estudiantes interactúan entre sí en relación a los materiales y actividades.

Valoración personal o responsabilidad personal: se requiere la existencia de una evaluación del avance personal, la cual va haciendo tanto el individuo como el grupo. De esta manera, el grupo puede conocer quién necesita más apoyo para completar las actividades, y evitar que unos descansen con el trabajo de los demás.

2.1.4 Características del ABP

“La función del profesor es como “guía a un lado” (“guide on the side”) en vez de un “sabio en el escenario” (“sage on the stage”)
Moursund

A continuación se destaca un listado de características a partir de las cuales puede ser analizado el ABP.

ABP desde el punto de vista de los alumnos (Moursund, 1999):

1. Está centrado en el aprendizaje y es intrínsecamente motivante.
2. Se enfoca en el aprendizaje colaborativo y cooperativo.
3. Permite que los estudiantes incrementen y continúen mejorando sus productos, presentaciones o ejecuciones.

4. Está diseñado para que los estudiantes estén comprometidos activamente en el *hacer cosas más que en aprender acerca de algo*.
5. Requiere que los estudiantes produzcan un producto, presentación o ejecución.
6. Es retador; se enfoca en el desarrollo de habilidades de orden superior.

ABP desde el punto de vista del profesor (Moursund, 1999):

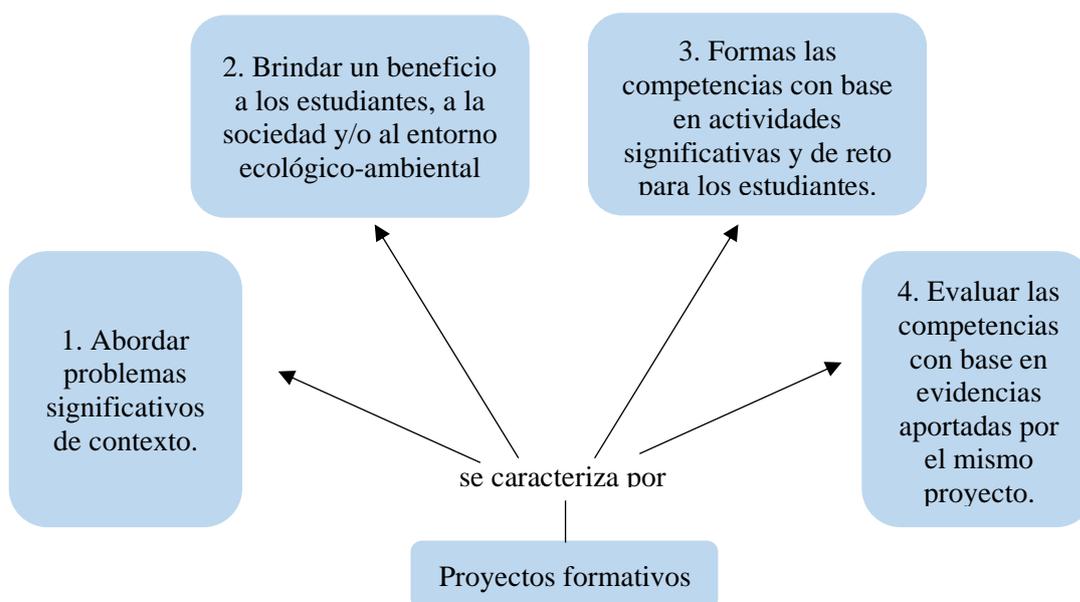
1. Presenta contenidos y propósitos auténticos.
2. Utiliza la evaluación auténtica.
3. El profesor actúa como facilitador.
4. Tiene metas educativas explícitas.
5. Está arraigado en el constructivismo.
6. Está diseñado para la transferencia de aprendizaje.
7. Está diseñado para que el profesor sea un “aprendedor”.

Las características mencionadas de ABP, enfatizan la importancia de la construcción del conocimiento y cómo llegar a él por medio del hacer, promoviendo a partir del aprendizaje cooperativo y significativo, que los alumnos movilicen sus recursos a fin de generar soluciones a los retos planteados. En ese sentido, será pues necesario seguir una serie de fases que al final den cuenta de un producto que evidencie una movilización de saberes.

Entre las características principales del ABP, que hacen posible esta construcción del conocimiento, aparecen: la globalidad de un problema, la necesidad de investigación para resolverlo, el trabajo colaborativo, la unión entre la realidad y la escuela, la conexión entre alumnos, profesores, familia y entorno, el protagonismo de los alumnos o la motivación de los tutores. (Mettas & Constantinou, 2007).

Como el referente teórico que se escogió para el trabajo metodológico con ABP, fue el de proyectos formativos (Tobón et al, 2010), es importante puntualizar en sus características. En ese sentido, mediante el siguiente esquema se describen dichas características.

Figura 3. Características de un proyecto formativo



Los proyectos formativos implican que los estudiantes aprendan a actuar en la realidad con idoneidad y compromiso ético, mediante actividades pertinentes, la reflexión y la conceptualización (Tobón et al, 2010).

2.1.5 Fases para la implementación del ABP

Para la implementación del ABP no existe un único método con fases prefijadas. Sin embargo. De manera genérica las fases que debe tener un proyecto en el ABP son:

Fase 1. Inicio

En esta fase por un lado se encuentra la preparación del proyecto por parte del equipo de profesores y por el otro, la presentación que se realiza a los alumnos. Se debe explicar qué se quiere hacer y qué se quiere obtener, haciendo hincapié en los recursos y objetivos.

Al término de esta fase los equipos de trabajo deben estar conformados. Además, si los alumnos no han trabajado con ABP, es el momento adecuado para que se les explique su funcionamiento.

Fase 2. Análisis

El alumno es ahora el protagonista. En esta fase deben elaborar el plan de acción para solucionar el problema planteado por el profesor.

Una vez que se haya terminado esta etapa, el alumno debe saber qué hacer en el proyecto. Debe disponer de una planeación para distribuir las tareas en el tiempo y entre los distintos integrantes del equipo.

Fase 3. Ejecución

El alumno trabaja de forma colaborativa en el proyecto con el fin de conseguir todas y cada una de las metas fijadas en la etapa anterior. El resultado final de esta fase será un producto, una presentación o una interpretación dirigida a una audiencia específica.

Para que esta fase funcione correctamente, es necesario que el profesor evalúe el progreso de cada equipo.

Fase 4. Conclusiones desde la perspectiva de los alumnos.

Es la etapa de presentación y entrega del proyecto. Aquí el equipo debe ser crítico y descubrir los puntos fuertes y débiles del proyecto realizado y de la estrategia utilizada.

Fase 5. Conclusiones desde la perspectiva del profesor.

En este caso será el profesor el encargado del cierre y la evaluación de cada equipo, reflexionando con los alumnos sobre los productos realizados.

Por su parte Tobón et al (2010) propone una tabla como la siguiente para describir la estructura de un proyecto formativo.

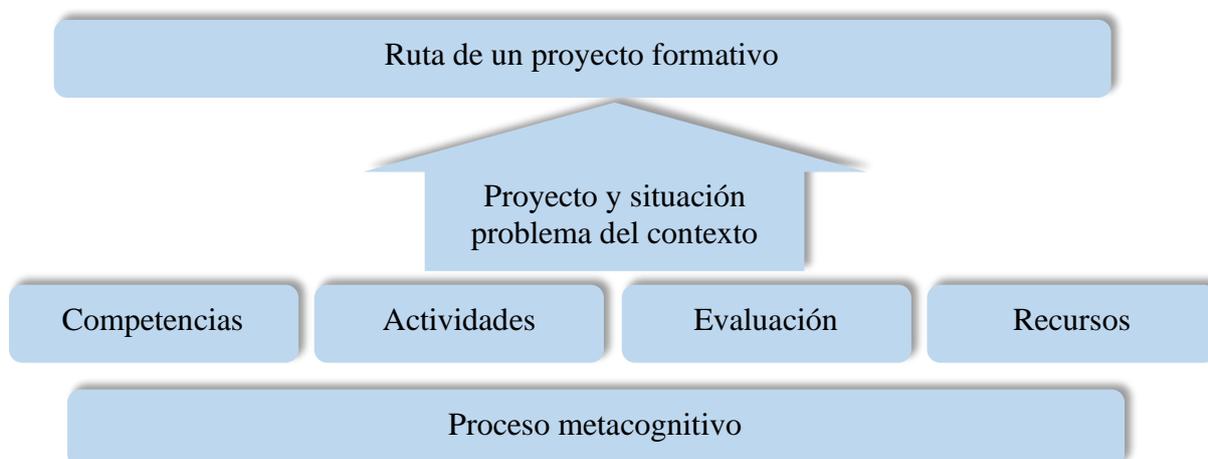
Tabla 4. Descripción de la estructura de un proyecto formativo

Eje clave	Descripción
1. Estructura formal del proyecto	<p>La estructura formal consiste en establecer con claridad los elementos clave para identificar el proyecto formativo a llevar a cabo con los estudiantes, de tal forma que se comprenda sintéticamente qué se va a realizar, con qué duración y el docente o docentes responsables.</p> <p>La estructura formal se compone de:</p> <p>Título del proyecto</p> <p>Espacio o espacios académicos en el cual se realiza (asignatura o módulos)</p> <p>Docente o docentes</p> <p>Duración del proyecto</p> <p>De forma complementaria, se pueden agregar los siguientes aspectos: competencias previas, acreditación y certificación.</p>
2. Competencias a formar	<p>Las competencias se retoman del currículo establecido en la institución educativa, con las adaptaciones necesarias en el contexto.</p>
3. Síntesis del proyecto a realizar	<p>Se describe de forma sintética el proyecto a realizar con los estudiantes buscando que sea práctico, aborde al menos un problema del contexto y considere el ciclo vital de los estudiantes.</p> <p>En esa parte, se sugiere describir:</p> <p>El problema a ser abordado.</p> <p>El o los productos más relevantes.</p>
4. Planeación de las actividades de formación y evaluación.	<p>Se determinan los criterios y evidencias de las competencias a formar, considerando el currículo oficial.</p> <p>Con base en el proyecto a llevar a cabo y considerando los criterios, se planean las actividades de formación y evaluación.</p> <p>Las actividades de formación y evaluación se pueden organizar por fases y/o sesiones.</p> <p>En las actividades de evaluación se sugiere:</p> <p>Evaluación inicial: análisis de saberes previos.</p> <p>Evaluación de procesos: observación y retroalimentación del docente.</p> <p>Evaluación final: análisis de productos y determinación del nivel de dominio alcanzado en las competencias.</p> <p>Luego, se planifican los recursos necesarios para realizar las actividades del proyecto, y se anexan los recursos o se describe cómo obtenerlos.</p> <p>Finalmente, se acuerda con los estudiantes las normas esenciales a tener en cuenta en el proyecto. En ocasiones, se indican actividades para ayudar a los estudiantes y afianzar las normas, con el fin de asegurar el éxito en el trabajo académico.</p>

5. Matrices de evaluación (mapas de aprendizaje)	A partir de los criterios y considerando las actividades del proyecto, se planifican las matrices de evaluación o mapas de aprendizaje. Asimismo, se diseñan instrumentos de evaluación complementarios, si se requieren (pruebas escritas, listas de chequeo, etc.).
6. Competencias docentes.	Se describen competencias que deben tener los docentes y las acciones para desarrollar y/o fortalecerlas.

Tobón (2009a, 2009b, 2010) ayuda a comprender los componentes esenciales de un proyecto formativo mediante el esquema que se muestra en la figura 4.

Figura 4. Componentes esenciales del proyecto formativo



Fuente: (Tobón Tobón, Pimienta Prieto, & García Fraile, 2010)

2.1.5 Uso de las TIC en procesos de enseñanza y aprendizaje

Una de las cuestiones educativas que mayor interés suscita es la de los usos de la tecnología. Este interés tiene un reflejo claro en las inversiones en tecnología realizadas en los últimos años para equipar a las escuelas, pues sin duda tanto el acceso a las tecnologías de la información y de la comunicación como el dominio y el uso adecuado de las mismas resultan fundamentales para el desarrollo económico y social. (Pedró, 2014).

Aunque hoy la investigación tan solo puede apoyar conclusiones más bien limitadas sobre la eficacia global de las inversiones en tecnología para mejorar la educación escolar, los estudios realizados sugieren que ciertos usos pueden mejorar el aprendizaje de los estudiantes a condición de transformar las prácticas de enseñanza y aprendizaje. Es decir, el gran auge de dispositivos y plataformas no es garantía de que los procesos de enseñanza y aprendizaje mejoren, si estos no van acompañados de estrategias didácticas efectivas.

Díaz Barriga (2015) señala que hay que emplear las TIC como herramientas de la mente en el sentido de aprender “con” ellas y no “de” ellas, porque si bien el manejo el manejo de programas tutorías (enfoque de instrucción dirigida), apoyan el aprendizaje eficiente de información o la adquisición de determinadas habilidades, por lo general no satisfacen el ideal pedagógico de las propuestas didácticas centradas en la construcción del conocimiento y el aprendizaje complejo.

En ese sentido, Díaz Barriga (2015) agrega:

Cuando las TIC se emplean como herramientas de la mente pueden aplicarse a una amplia gama de objetivos educativos en aras del fortalecimiento de capacidades intelectuales de orden superior, que implican la creatividad, la comprensión crítica, la habilidad investigadora, la toma de decisiones, el pensamiento crítico, la solución de problemas, entre otros. Hay que enfatizar que el paso a prácticas educativas constructivistas no reside en el uso de las TIC en el aula, sino que implica el *diseño y uso de ambientes de aprendizaje enriquecidos con las TIC*.

Lo anterior indica que en manejo de entornos virtuales o con un fuerte apoyo en TIC del aprendizaje basado en proyectos, basado en problemas y casos, de las diversas técnicas de aprendizaje cooperativo, la realización de WebQuest o la evaluación auténtica

con relación a determinados campos del conocimiento, implican que el docente requiera dominar y a la vez modelar en sus estudiantes.

La introducción de las TIC en la metodología de ABP, aunque no afecta a los principios didácticos que orientan la elaboración del proyecto, transforma en profundidad la realización del mismo en dos aspectos: el acceso y la gestión de la información de contenido, y la comunicación del alumno con el profesor, y entre los alumnos.

2.2 Dimensión didáctica

2.2.1 Competencia matemática

¿Qué sería de una competencia sin el deseo, sin la voluntad y sin el gusto de hacer uso de ella?
(Bruno D'Amore, 2008)

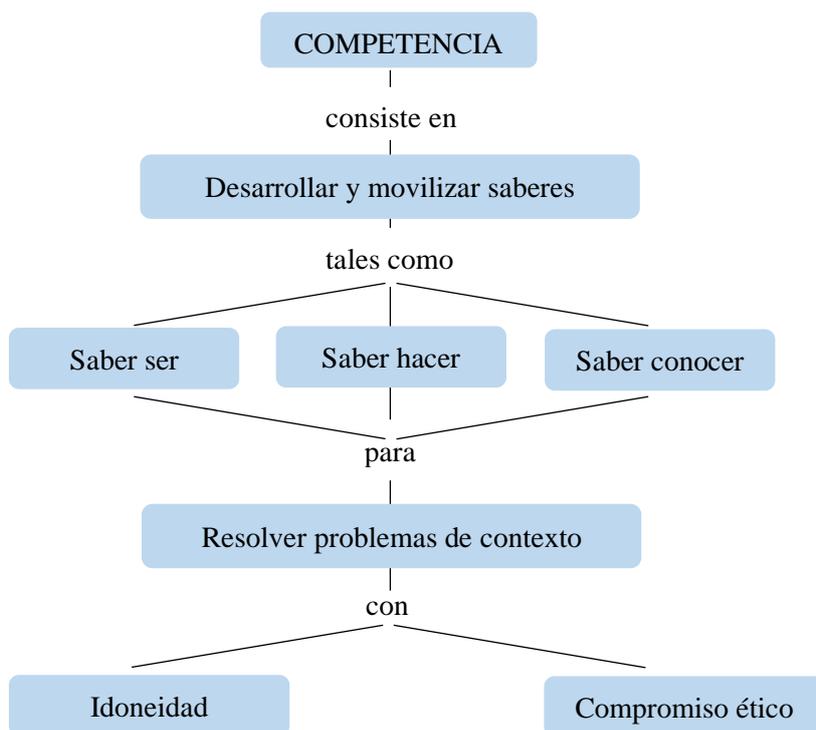
Antes de adentrarse al concepto de competencia matemática, será necesario realizar la definición de lo que son las competencias.

Los significados de competencia son inscritos en dos visiones políticas distintas sobre la educación. Por una parte, la competencia se refiere a la eficacia y las demandas del mercado, en donde cobra relevancia el saber hacer articulado con las tendencias de la economía mundial, la globalizadora y los medios neoliberales. Por otra parte, la competencia se asocia a la formación integral del sujeto, en la que el saber-hacer se instala en contextos socioculturales concretos y locales y en el sentido ético humanístico de las decisiones sobre los usos e impactos del conocimiento en el mejoramiento de las condiciones de vida de las personas y comunidad. En esta investigación me adhiero a esta visión sociocultural, por tanto las competencias se abordarán desde el enfoque socioformativo, en virtud de que ese es sentido formativo que se le demanda a la escuela actual.

Para Tobón, Pimienta, y García (2010) las competencias desde un enfoque socioformativo “son actuaciones integrales ante actividades y problemas del contexto, con idoneidad y compromiso ético, integrando el *saber ser; el saber hacer y el saber*

conocer en una perspectiva de mejora continua”. Lo anterior significa que se pueden formar alumnos con muchos conocimientos; sin embargo, para que sean competentes es necesario que aprendan a aplicarlos en actividades y problemas con calidad, integrando una actuación ética, con base en valores y actitudes.

Figura 5 Competencia desde el enfoque socioformativo



Adaptado de Tobón, 2009a; Tobón, 2009b; Tobón, 2010; Tobón, Pimienta y García Fraile, 2010.

En ese sentido, una competencia, entonces, no es sólo tener un saber hacer, un saber conocer o un saber ser por separado, sino movilizar los diversos saberes (ser, hacer y conocer) hacia el logro de una meta determinada en el contexto.

El concepto de competencia anterior toma distancia de la visión asociada con la educación para la eficacia y las demandas del mercado, en el donde el saber – hacer que se reclama se sintoniza con las tendencia de los modelos neoliberales. Por tanto, esta investigación se adhiere a la asociada con la educación integral y la formación de sujetos críticos, en donde el saber – hacer que se invoca ha de vincularse con los contextos socio

– culturales y el sentido ético humanístico en las decisiones sobre los usos del conocimiento y la cualificación de la vida de las personas.

Existen pues dos propuestas internacionales que además de definir el concepto de competencia, han listado cuáles son las que se consideran deseables en los estudiantes. Por una parte, el Proyecto KOM⁵ definió ocho competencias matemáticas y, por otra parte, el Proyecto OCDE/PISA, centrado en pruebas estandarizadas a estudiantes, ha definido siete competencias clave en su versión más reciente. Ver tabla 5.

Tabla 5. Competencias matemáticas propuestas Proyecto KOM y Grupo OCDE/PISA

Proyecto KOM		Proyecto PISA/OCDE
La competencia matemática se asume como la habilidad de entender, juzgar, hacer y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extramatemáticos en los que las matemáticas desempeñan o podrían desempeñar un papel (Niss y Højgaard, 2011).		La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una de contextos. incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. ayuda a los individuos a reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y a realizar los juicios bien fundados y las decisiones que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos
Competencias relacionadas con la habilidad de preguntar y responder preguntas en y con las matemáticas 1. Pensar matemáticamente 2. Formular y resolver problemas matemáticos 3. Modelar matemáticamente (analizar, decodificar, construir	Competencias referidas a la habilidad para relacionarse y manejar las herramientas y el lenguaje matemático. 1. Representar entidades matemáticas (objetos, situaciones) 2. Manejar símbolos y formalismos matemáticos. 3. Hablar en, con y	Competencias matemáticas consideradas: 1. Razonar y argumentar 2. Matematizar 3. Elaborar estrategias para resolver problemas 4. Representar 5. Comunicar 6. Usar lenguaje formal, técnico, simbólico y las operaciones 7. Usar herramientas matemáticas (OCDE/PISA, 2003)

⁵ El proyecto KOM liderado por el matemático Mogens Niss, consistió en crear un marco para la reforma exhaustiva para la enseñanza de las matemáticas en Dinamarca, desde la escuela hasta la universidad.

modelos) 4. Razonar matemáticamente	acerca de las matemáticas. 4. Hacer uso de ayudas y herramientas (incluye tecnología informática) (Niss y Højgaard, 2011)	
--	--	--

Así, esta investigación se inclina por la postura sociocultural sobre las competencias, asumiendo que es mucho más que un Saber – Hacer y, por tanto, su dimensión teórica se instala más en el concepto de formación que en el de instrucción: involucra aspectos cognitivos, afectivos, volitivos, éticos y de tendencia de acción que implica una pragmática de uso social de la misma competencia. En síntesis, ésta investigación buscará describir el proceso de movilización de la competencia PRP de los estudiantes en su actividad matemática de aprendizaje.

En concordancia con lo anterior, la definición de competencia matemática es retomada de D'Amore, Díaz Godino, y Fandiño Pinilla (2008), Goñi Zabala (2008), Rico y Lupiañez (2008), quienes la conciben como una concepto complejo y dinámico.

Complejo porque aborda dos componentes: a) Uso (exógeno, externo, consciente, intencional y contextualizado) y b) el Dominio (endógeno), requiere elaboración cognitiva y creativa. Hace referencia a los contenidos matemáticos.

Dinámico porque además de los aspectos anteriores, comprende factores metacognitivos: voluntad, deseo de saber y de usar los conocimientos, de aumentar la propia competencia, de valorar la calidad de su aprendizaje. (D'Amore, Díaz Godino, & Fandiño Pinilla, 2008).

Para estos autores, la competencia matemática se asocia a la capacidad de afrontar problemas y actividades matemáticas de aprendizaje significativas y complejas por parte del estudiante. En ese sentido, es la calidad de la actividad matemática de aprendizaje la que determina la calidad de los procesos matemáticos que desarrolla el estudiante y, por tanto, de su nivel de complejidad creciente.

Hasta ahora hemos expuesto lo que se entiende por ser competente en matemáticas, sin embargo, es importante aclarar que las competencias matemáticas son independientes de los contenidos que se trabajen en cada momento en el aula, dado que es evidente que al estudiar cualquier contenido matemático, las competencias se van desarrollando de manera paulatina. Para esta investigación se ha seleccionado la competencia plantear y resolver problemas y como objeto matemático las razones y proporciones.

2.2.2 Competencia matemática plantear y resolver problemas

La competencia matemática plantear y resolver problemas de acuerdo con Rico y Lupiañez, (2008), es cognitiva, instrumental, de carácter básico y transversal, y según el proyecto PISA, permite que los estudiantes enuncien y planteen problemas en diferentes contextos y con diferentes criterios enunciándola como: “Plantear, formular, resolver e interpretar problemas (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados) a través de las matemáticas en diferentes situaciones y contextos” (OCDE/PISA, 2003); cada uno de estos procesos cognitivos se pueden hacer por distintas vías y obtener de los estudiantes respuestas con diferentes niveles de complejidad.

Un principio fundamental, al considerar la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, es aceptar que la actividad de aprender no se reduce a un conjunto de reglas que pueden aplicarse en la solución de problemas. En otras palabras, se considera que el aprendizaje de las matemáticas va más allá del aprendizaje de los conceptos, procedimientos y sus aplicaciones, por lo que incluye desarrollar una

disposición hacia las matemáticas y ver las matemáticas como un poderoso medio de mirar las situaciones.

En esta medida, se considera la resolución de problemas como una forma de pensar donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su aprendizaje de las matemáticas. Es decir, los estudiantes tienen que problematizar el estudio de la disciplina, formulando preguntas al intentar resolver problemas matemáticos.

Polya (1965) define la resolución de problemas como el tratar de encontrar una acción apropiada para alcanzar el punto deseado, pero al no llegar al final esperado la resolución de problemas es un objetivo primordial que debe desarrollarse. En ese sentido, NCTM (1989), dada la importancia de este proceso, llega a considerar las matemáticas como la resolución de problemas.

En consecuencia, la resolución de problemas resultaría ser un tipo de proceso que se utiliza para resolver situaciones no algorítmicas, puesto que incluye la coordinación del conocimiento, el pensamiento intuitivo y crítico, de manera tal que la resolución de problemas no es llegar a una solución de un problema matemático aplicando solo procedimientos o reglas, sino que significa aplicar procesos mucho más complejos, por lo que en la actualidad, la resolución de problemas es considerada la parte esencial de la educación matemática.

Existen diferentes enfoques en la enseñanza de resolución de problemas matemáticos. Según Hatfield (1978) hay tres enfoques básicos para la enseñanza de la resolución de problemas:

1. La enseñanza a través de la resolución de problemas.
2. La enseñanza para la resolución de problemas.
3. Enseñando acerca de la resolución de problemas.

En la enseñanza a través de la resolución de problemas, los contenidos de matemáticas se introducen con un problema. Es decir, los problemas son los vehículos a introducir y estudiar en una tarea matemática. Además, los problemas son valorados como medio principal de hacer matemáticas. En la enseñanza para la resolución de problemas, los estudiantes aplican el conocimiento que se aprende en las clases de matemáticas. En otras palabras, las matemáticas se enseñan con el fin de enseñar problemas. Mientras que al enseñar acerca de la resolución de problemas, a los estudiantes se les enseña las estrategias y los procesos.

Para esta investigación, centrada en la actividad matemática de aprendizaje, se asumieron los procesos matemáticos movilizados por los estudiantes en su actividad matemática a partir de la propuesta de Polya (1965): entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y visión retrospectiva, en complementariedad con lo propuesto por (Espinoza, y otros, 2009), quienes identifican y describen cada uno de los procesos que integran la competencia resolución de problemas (ver tabla 6).

Tabla 6. Competencias organizadoras del currículo

Competencia: Resolución de problemas	
Proceso	Descripción del proceso
Entender el problema	Corresponde a la atribución de significado al enunciado, entender el contexto en el que se sitúa el problema.
Modelizar	Abarca los elementos de la construcción de un modelo: identificar el modelo, construir un modelo, reflexionar sobre el modelo.
Desarrollar y/o adaptar estrategias para resolver problemas	Corresponde a la identificación y/o construcción de una(s) estrategia(s) para abordar el problema: heurística, de razonamientos, casos particulares, etc.
Aplicar la estrategia para resolver el problema	Corresponde a la aplicación de la estrategia adoptada.
Interpretar la respuesta en el contexto del problema	Una vez aplicada la estrategia y obtenida una respuesta, interpretar el resultado en términos del contexto del problema y responder la(s) pregunta(s) planteada en su enunciado.
Formular problemas	Corresponde a la formulación de un problema dadas algunas condiciones. (A partir de unos datos, crear una situación problemática, etc.).

En esta propuesta de Espinoza, y otros, (2009), algunos de los subprocesos de Polya aparecen como procesos principales que se consideran deben movilizar los estudiantes en una actividad matemática concreta de resolver y plantear problemas. A continuación se describen dichos procesos.

- Entender el problema y modelarlo: en esta etapa el estudiante no solo debe entender el significado del enunciado, sino identificar que efectivamente es un problema que está contextualizado, debe ser capaz de crear y construir un modelo y reflexionar sobre él.
- Desarrollar, adoptar y aplicar estrategias para su solución: se espera que una vez construido el modelo del problema, continúe el proceso de actuación y para ello es necesario la elaboración y aplicación de estrategias que permitan encontrar la solución.
- Interpretar la respuesta en el contexto del problema; en esta etapa el estudiante reflexiona sobre el resultado obtenido en relación con la pregunta planteada y si la respuesta cubre todos los aspectos del enunciado de la pregunta y del contexto del problema. Es aquí donde el estudiante recurre a sus conocimientos de los sistemas de representación.
- Formular problemas: se espera que el estudiante genere nuevas propuestas de como plantear nuevos problemas a partir de uno dado, o que sea capaz de formular problemas de acuerdo a un contexto y condiciones específicas, para ello debe modelarlo en su mente recurriendo a los pasos anteriormente dados. En esta

etapa el planteamiento de problemas nos permite observar en el estudiante no solo la comprensión y capacidad matemática, sino la disposición que se tiene hacia ella.

Cada uno de los procesos mencionados, están presentes en el aprendizaje de las matemáticas, por tanto, es necesario promover el desarrollo de competencias en el estudiante a través de situaciones problema cercanas a su realidad, que le permitan movilizar todos los aspectos de la competencia tales como recursos cognitivos, aptitudes, destrezas y valores, para alcanzar expectativas de aprendizaje en el corto plazo (objetivos específicos), mediano y largo plazo (competencias). (Rico & Lupiañez, 2008).

En el desarrollo de la competencia matemática plantear y resolver problema, además de movilizar en los estudiantes procesos matemáticos referidos al uso y dominio de unos conocimientos, también debe hacerlo respecto a sus actitudes, donde los estudiantes muestren la disposición, el deseo y la voluntad por hacer uso de la competencia.

Desde la perspectiva de Tobón, Pimienta, y García (2010), las competencias deben ser actuaciones integrales, para identificar, analizar y resolver problemas del contexto, en distintos escenarios, integrando:

El saber conocer (conceptos y teorías – o lo cognitivo desde D'amore).

El saber hacer (habilidades procedimentales y técnicas – o la tendencia a la acción desde D'amore).

El saber ser (actitudes y valores – o lo afectivo desde D'amore).

De acuerdo con Tobón, en el presente estudio para caracterizar las actuaciones integrales, los niveles de dominio de los procesos matemáticos de la competencia plantear y resolver problemas, se realizará un análisis de los desempeños de los estudiantes de

grado séptimo focalizados en la investigación, al desarrollar las actividades matemáticas de aprendizaje en torno al objeto matemático razones y proporciones, propuestas en el marco de la estrategia metodológica de aprendizaje basado en un proyecto.

2.2.3 Estructura de la competencia matemática

2.2.3.1 Aspectos del desarrollo humano presentes en la competencia matemática.

Como referente teórico para analizar los aspectos del desarrollo humano que están presentes en la competencia matemática se toma a D'Amore, Díaz Godino y Fandiño (2008), quienes evidencian tres aspectos en una competencia:

- El cognitivo: conocimiento de la disciplina.
- El afectivo: disposición, voluntad, deseo de responder a una determinada solicitud (externa o interna).
- La tendencia de acción: persistencia, continuidad, dedicación.

Al considerar que en la competencia matemática se evidencian estos tres aspectos, los autores instalan el desarrollo de competencias en la formación más que en la instrucción del estudiante. Por tanto, es necesario que la evaluación del desarrollo de la competencia matemática del estudiante, no se focalice estrictamente en lo cognitivo, pues se asume que además de este aspecto, es esencial ayudar a generar una inclinación cultural favorable del estudiante hacia las matemáticas (Santos Trigo, 2007), hacia su aprendizaje y uso social. Como lo dicen estos autores, se debe involucrar el gusto y la voluntad en el desarrollo de procesos matemáticos y en la resolución de problemas por muy contextualizados que estos sean.

Lo anterior implica tomar distancia prudente del propósito evaluativo de las pruebas masivas en competencias matemáticas tanto internacionales como nacionales (PISA, TIMSS, SABER, etc). Si bien se reconoce el aporte en los niveles de complejidad

asociados a la evaluación del aspecto cognitivo de la competencia, se considera que en el aula de clase, el docente debe contribuir a generar procesos de interacción entre los sujetos que incentiven el desarrollo de aspectos afectivos, volitivos, éticos y metacognitivos. Ello permitirá no clasificar al estudiante, sino valorar la calidad de su actividad matemática de aprendizaje y caracterizar el desarrollo de sus competencias a partir de la movilización de procesos matemáticos específicos asociados a estas.

En general, puede concluirse entonces, que el desarrollo de la competencia matemática se instala en una concepción integral del desarrollo del sujeto que aprende matemáticas. Por tanto, la actividad matemática de aprendizaje del estudiante, debe movilizar conocimientos, procesos matemáticos, actuaciones que evidencien voluntad, disposición, persistencia e inclinación cultural favorable a usar las matemáticas en contextos escolares, extraescolares y sociales. Esta actuación y uso de las matemáticas debe ceñirse a la ética y la responsabilidad social y cultural propia de un ciudadano que aprende y hace uso de un bien cultura de la humanidad como son las matemáticas.

2.2.3.2 Componentes de la competencia matemática

El referente central con el que se abordan los componentes de la competencia matemática es la tesis doctoral de Horacio Solar (2009). Este autor parte de Abrantes (2001) y de Niss (1999) para formular un modelo en el que las competencias matemáticas son los procesos organizadores del currículo. En este orden de ideas, cada nivel escolar deberá especificar en su propuesta curricular de matemáticas, qué competencias asume desarrollar, asumiendo que las competencias matemáticas, al igual que los procesos matemáticos, son expectativas de aprendizaje a largo plazo y, en general, su desarrollo es transversal a los contenidos de las matemáticas escolares.

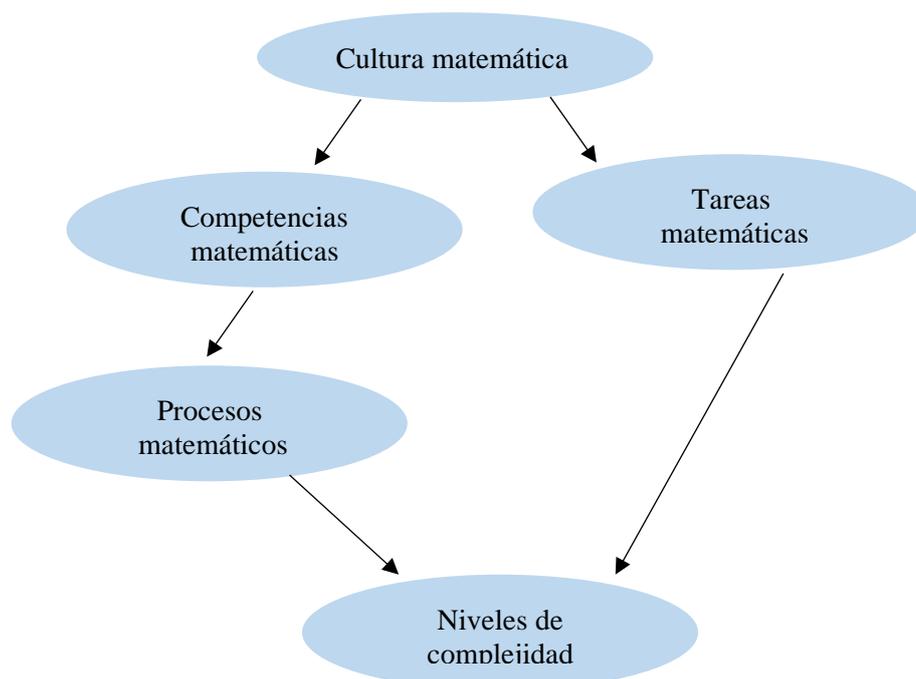
Solar (2009) aporta un elemento esencial en su propuesta de modelo de competencia: los niveles de complejidad asociados a la competencia. Estos niveles de

complejidad son los que el estudiante debe enfrentar cuando resuelve tareas matemáticas. Es decir, es en la actividad matemática de aprendizaje que el estudiante evidencia el progreso de su competencia. Al resolver tareas con creciente nivel de complejidad, el estudiante desarrolla procesos matemáticos, despliega capacidades, usa la competencia matemática para resolver problemas contextualizados cada vez más complejos. Solar lo expresa así:

Nos sentamos sobre la base de que por medio de la actividad matemática se puede estudiar el desarrollo de las competencias; este mismo principio se aplica al progreso de una competencia, con el propósito de poder identificar el progreso según el tipo de actividades que son capaces de resolver los estudiantes. (Solar, 2009)

En ese sentido, la actividad matemática de aprendizaje es propia del estudiante y su progreso está dado por los diferentes niveles de complejidad que se evidencia con el progreso de la competencia del estudiante. Este progreso se expresa cuando es evidente que el estudiante piensa, razona, representa, modeliza, comunica, etc., en su actividad matemática de aprendizaje; cuando moviliza sus capacidades, demuestra voluntad, persistencia, comprensión y una aceptación cultural para hacer uso social de sus competencias matemáticas de forma ética y responsable.

De esta manera se presenta en el siguiente gráfico el Modelo de Competencia Matemática (MCM), aportado por Solar (2009).

Figura 6 Modelo de Competencia Matemática (MCM)

Fuente: (Solar, 2009)

Para el autor chileno Horacio Solar, una competencia matemática se constituye de tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad. El propósito básico de este MCM y sus implicaciones didácticas se centra en articular las expectativas de aprendizaje a corto plazo (objetivos específicos de aprendizaje), con las expectativas de aprendizaje a largo plazo (las competencias).

A continuación se presenta una breve descripción de lo que son cada uno de los componentes de una competencia matemática:

Cultura matemática: el autor asume que la alfabetización matemática (*mathematical literacy*) “se logra mediante el desarrollo de competencias matemáticas”. Entonces, propone como punto de partida para el MCM la noción de alfabetización matemática, pues la asume como sinónimo de la competencia matemática; no obstante, opta por el término del francés “*culture mathématique*”

Competencias matemáticas: las asume como los procesos que articulan el currículo a distintos niveles. Para ello, deben cumplir los siguientes criterios:

- Vincular a una competencia una serie de procesos matemáticos específicos.
- Contribuir a organizar las actividades matemáticas en función de las competencias que se desarrollan.
- Ser significativas para la actividad matemática escolar. Ello contribuye a generar sentido y calidad la actividad matemática de aprendizaje.

Procesos matemáticos: cada competencia se compone de procesos matemáticos como representar, demostrar, argumentar, analizar, resolver, graficar, calcular, modelizar, visualizar, etc. En la concepción tradicional se antepone o se organiza el currículo a partir de los contenidos y se subordinan los procesos matemáticos. En un enfoque por competencias, son los procesos matemáticos los organizadores del currículo.

Niveles de complejidad: el nivel de complejidad de una competencia matemática está asociado tanto a la complejidad de las tareas como a la complejidad de los procesos matemáticos vinculados con esa competencia. En este componente Solar asume los tres niveles de complejidad (Rico y Lupiañez, 2008) trabajados por el proyecto PISA, a saber: reproducción, conexión y reflexión.

Así pues, con el fin de describir la movilización de la competencia matemática plantear y resolver problemas, en esta investigación, se hace uso del Modelo Teórico a priori (MTAP) (García Quiroga, y otros, 2013). Estos autores, se apoyan en el Modelo de Competencia Matemática (MCM) planteado por Solar (2009), para articular no solo los componentes de la competencia matemática, sino también, la actividad matemática de aprendizaje con los componentes, y así formular un Modelo Teórico a priori (MTAP).

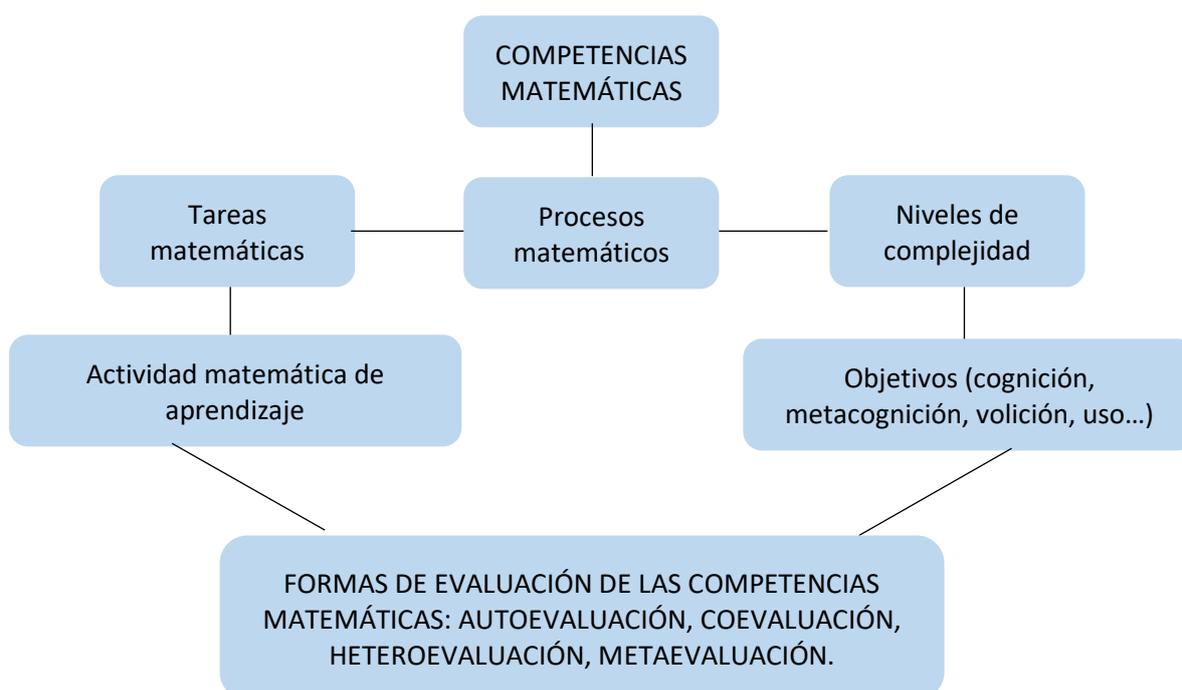
La contribución de García Quiroga et al (2013) a partir de su MTAP, es de suma importancia para mi investigación, pues con este fue posible caracterizar el proceso de articulación de las tareas matemáticas, los procesos matemáticos y los niveles de complejidad con la actividad matemática de aprendizaje del estudiante.

En este modelo los autores definen la actividad matemática de aprendizaje como el elemento que posibilita la valoración y caracterización del proceso de desarrollo de las competencias matemáticas. En la medida que el estudiante resuelve tareas cada vez más complejas, su actividad matemática evidencia el desarrollo de procesos matemáticos complejos que se expresan como *pensar; razonar; argumentar; calcular; demostrar; graficar; representar; matematizar; modelizar*, entre otros. En este desarrollo el estudiante evidencia el despliegue de capacidades, habilidades, sentimientos, voluntad y disposición para hacer uso social de sus competencias matemáticas.

García Quiroga et al (2013) consideran que el avance en el logro de las expectativas de aprendizaje a corto plazo (objetivos planteados para la actividad, unidad o curso escolar), es lo que va a determinar el desarrollo de las expectativas a largo plazo (las competencias matemáticas), por lo que dada la complejidad de estas últimas, se requieren procesos de evaluación más prolongados e integrales.

En la figura a continuación se sintetizan los elementos del MTAP formulado por García Quiroga et al (2013) en su investigación:

Figura 7 Modelo Teórico a Priori (MTAP) para la caracterización de las competencias matemáticas en el estudiante



Fuente: García et al (2013)

García et al (2013) formulan el esquema para MTAP mostrado en la figura 7 con base en los componentes involucrados de las competencias matemáticas propuestos por Solar (2009), sin embargo, incorporan tres elementos adicionales: actividad matemática de aprendizaje, objetivos (expectativas de aprendizaje a corto plazo) y formas de evaluación.

La evaluación de la competencia en esta investigación se aborda desde dos perspectivas articuladas y complementarias: una centrada en los aspectos cognitivos y de tendencia de acción y otra pensada para valorar los aspectos afectivos y metacognitivos.

La evaluación de lo cognitivo, se focaliza en los niveles de complejidad (Niss, 2002; Goñi, 2009; Mora y Rosich, 2011; Rico y Lupiañez, 2008) aplicados por la OCDE en las pruebas PISA: reproducción, conexión y reflexión, mientras que los aspectos afectivos, metacognitivos y de uso social de la competencia, se apoya en el enfoque socioformativo de Tobón (2010), en su propuesta de proyectos formativos.

En ese sentido, en el componente cognitivo de la competencia se asumen los niveles de complejidad adoptados en PISA (2003), asumidos de la siguiente manera:

Tabla 7 Indicadores que caracterizan las tareas según niveles de complejidad (*Rico Romero, 2006*)

Reproducción	Conexión	Reflexión
<ul style="list-style-type: none"> - Contextos familiares - Conocimientos ya practicados. - Aplicación de algoritmos estándar. - Realización de operaciones sencillas - Uso de fórmulas elementales 	<ul style="list-style-type: none"> - Contextos menos familiares. - Interpretar y explicar - Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación. - Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios 	<ul style="list-style-type: none"> - Tareas que requieren comprensión y reflexión - Creatividad - Ejemplificación y uso de conceptos - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos - Generalizar y justificar resultados obtenidos.

Nivel de reproducción.

En este primer nivel de complejidad los alumnos saben responder a preguntas planteadas en contextos familiares, donde está presente toda la información pertinente y las preguntas están definidas claramente. Son de este nivel aquellos ejercicios que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas.

Nivel de conexiones

El nivel de conexiones permite resolver problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución. Las competencias del grupo de conexión se apoyan sobre las del grupo de reproducción, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son mera rutina, pero que aun así incluyen escenarios familiares o casi familiares.

Nivel de reflexión

Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del alumno sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más originales (o inusuales) que los del grupo de conexión.

De este modo, se incluye una nueva variable, útil para caracterizar las tareas mediante las cuales se evalúan las competencias, que han mostrado su adecuación para analizar el

modo en cada una de las competencias son requeridas como respuestas a los distintos tipos y niveles de demandas cognitivas planteados por los diferentes problemas matemáticos. Cada nivel de complejidad se caracteriza por los procesos empleados y por el grado de complejidad con que los estudiantes los ejecutan al abordar tareas de dificultad creciente. Así, es posible entender cada nivel de competencia matemática en relación con la maestría con que el alumno lleva a cabo las tareas matemáticas propuestas, es decir, muestra su competencia matemática. (OCDE, 2004).

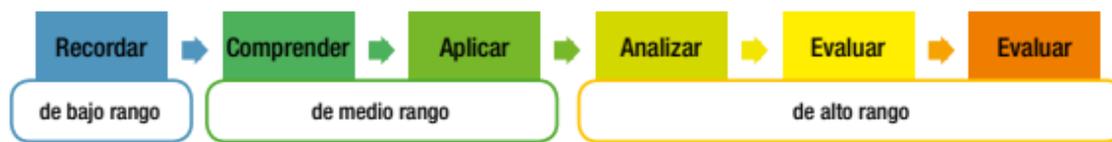
Aunque para esta investigación se decidió clasificar las tareas o problemas de acuerdo con los niveles de complejidad usados por PISA, hay otras propuestas interesantes que valen la pena ser expuestas en este marco teórico.

Blanco Nieto, Cárdenas Lizarazo (2015) plantean las tareas que debieran propiciarse en las actividades de matemáticas: abstraer, analizar, aplicar, argumentar, calcular, clasificar, comparar, completar, conjeturar, contar, convencer, desarrollar modelos, diseñar estrategias, estimar, explicar oralmente y por escrito, formular, generalizar, idear, identificar, inferir, interpretar, inventar, investigar, medir, modelizar, ordenar, organizar, plantear problemas, proveer, proponer, representar, sintetizar, tomar decisiones y validar. Dado que todas estas tareas demandan capacidades diferentes han sido categorizadas de diferentes maneras.

En ese sentido, Fortuny (2000) citado por Blanco Nieto y Cárdenas Lizarazo (2015), se refiere a tareas de bajo rango cognitivo, medio y alto, donde las tareas de alto rango indican un nivel de reflexión cognitiva en el que se sintetizan informaciones, se establecen deducciones, etc., mientras que las tareas de bajo rango, indica capacidades o habilidades que implican acciones inmediatas de tipo reproductivo, donde se requiere que el alumno comprenda la tarea y tenga una idea previa clara.

La figura 8 ilustra las categorías fijadas por Fortuny (2000) y Krathwohl (2002), citados por Blanco Nieto y Cárdenas Lizarazo (2015).

Figura 8. Categorización de tareas según las capacidades demandadas a los alumnos



Fuente: (Blanco Nieto, Cárdenas Lizarazo, & Caballero Carrasco, 2015)

2.2.4 Resolución de problemas en matemáticas

2.2.4.1 La resolución de problemas en la actividad matemática.

La resolución de problemas es un aspecto que caracteriza la actividad matemática. Con ella se ponen de manifiesto y toman significado prácticamente todos los aspectos trabajados en la educación matemática, lo que explica por qué la resolución de problemas se considere como el eje central de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Kilpatrick, 1978; Lester, 1994; Luelmo, 1996; Ponte, 2007; Schoenfeld, 1992).

Los autores anteriores exponen la necesidad de no sólo enseñar matemáticas para resolver problemas, sino también de enseñar matemáticas a partir y a través de la resolución de problemas (Mason, Burton y Stacey, 1982; Schoenfeld, 1985, 1992; Villa y Callejo, 2004).

En el proceso de resolución de problemas intervienen varias etapas, procesos y herramientas que, a su vez, pueden hacer entender mejor el problema como otros, trabajados con anterioridad. En este sentido, la presencia y la importancia de la resolución de problemas en las propuestas curriculares se ha mantenido e, incluso, intensificado. (Schoenfeld, 2007).

A lo largo de estos años se ha trabajado para caracterizar la resolución de problema y la gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje que pueden garantizar a los

estudiantes convertirse en mejores resolutores⁶ (Ponte, 2007), sin embargo, ésta intención se hace complicada si inicialmente no se dispone de una caracterización clara de lo que se debe entender por resolver un problema matemático. Si bien los primeros trabajos se centraron en describir los procesos necesarios para la resolución de problemas, los posteriores se han focalizado en la identificación de aquellas singularidades que de quienes resuelven los problemas con éxito. Los estudios recientes sitúan la planificación y el monitoreo como factores clave en el éxito de la resolución de problemas así como la influencia de dimensiones afectivas como las creencias, actitudes y emociones (De Corte, Verschaffel y Op't Eynde, 2000a; Schoenfeld, 1985, 1992 y 2013; Villa y Callejo, 2004a y 2004b). Sin embargo, a pesar de los numerosos trabajos sobre ello, sigue resultando una tarea compleja de orientar y adquirir, tanto para la mayoría de docentes que trabajan para la creación de un ambiente de aula propicio para la adquisición de habilidades para la resolución de problemas (De Corte y Verschaffel, 2003; Schoenfeld, 2013) como para los estudiantes de todas las edades (Mason et al., 1982; Polya, 1945).

En ese sentido, ante el objetivo de caracterizar la movilización de la resolución de problemas, es necesario establecer qué se entiende por problema matemático, qué se

⁶ Ante la falta de un vocablo reconocido por la lengua española, se ha hecho uso del término *resolutor* con el sentido que la palabra *solver*, en inglés, tomada en las referencias de habla inglesa consultadas.

A lo largo de la presente investigación también se hace uso de los términos solución, resolución, resultado y respuesta, por lo que es importante destacar qué se entiende por cada uno de estos en esta investigación.

Resolución: proceso por el cual se llega a una conclusión sobre una cuestión de la que no se tenía respuesta inmediata. Conlleva todas las acciones desarrolladas, abandonadas, parciales o completas que se han desempeñado para poder dar una respuesta a la cuestión formulada.

Solución: resultado preciso del proceso de resolución. Si para la resolución se han introducido aspectos que finalmente no contribuyen a la explicación de la respuesta, la solución sólo contendría los aspectos que influyen directamente a dar respuesta a la cuestión formulada.

Resultado: lo que se obtiene al final de un procedimiento concreto.

Respuesta: el conjunto de las explicaciones a las cuestiones formuladas de manera argumentada. Debido a una falta de completitud y de síntesis en las respuestas se confunde con la solución, cuando no siempre es así. Se entiende que la respuesta es la manera de clausurar las distintas soluciones encontradas y dar sentido global a las mismas, de manera completa, resaltando los aspectos relevantes detectados y empaquetando el conjunto de lo trabajado para posteriores ocasiones, a la vez que permite al resolutor afianzar lo trabajo y adquirido a lo largo del proceso de resolución.

entiende por resolver un problema y qué factores pueden influir en ellos, pues de lo contrario, será complicado abordar las dificultades observadas en dicha práctica.

2.2.4.2 La noción de un problema matemático.

La palabra problema se utiliza frecuentemente en el lenguaje común y en matemáticas y, en ambos casos, puede tener varios significados.

El diccionario de la Real Academia Española de la Lengua (2019) recoge cinco acepciones para el vocablo ‘problema’:

1. Cuestión que se trata de aclarar.
2. Proposición o dificultad de solución dudosa.
3. Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de un fin.
4. Disgusto, preocupación.
5. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

En un primer acercamiento y según las definiciones dadas, se puede señalar la existencia de problemas cuando hay una tarea a realizar que nos genera dudas en la manera de abordarla y/o solucionar. En la vida cotidiana decimos “tengo un problema” cuando tenemos dudas sobre la manera de proceder ante una situación que nos preocupa.

Sin embargo, en matemáticas existe consenso sobre el carácter polisémico de la palabra problema. Las expresiones ‘problema matemático’ y ‘resolución de problemas de matemáticas’ tienen diferentes significados entre los profesores y para los alumnos, y ello puede enmascarar diferentes puntos de vista sobre lo que constituye un problema.

La noción de problema matemático, a lo largo del tiempo y bajo las influencias de las tendencias de cada momento (Törner, Schoenfeld, & Reiss, 2007), ha sido utilizado de múltiples maneras, desde la realización de ejercicios rutinarios hasta hacer matemáticas como un profesional (Schoenfeld, 1992). La variedad de tareas que se han

identificado como problemas, sin necesariamente serlos, hace que sea necesario indagar las distintas concepciones acerca de lo que se entiende por un problema matemático.

El término “problema” se ha definido según Kilpatrick desde diferentes perspectivas: la psicológica (el sujeto que aborda el problema y los procesos mentales implicados en su resolución), el curricular (el papel que juegan los problemas en la enseñanza de la matemática), el matemático (definición de qué es un problema) y el didáctico (cómo se enseña y aprende a resolver problemas). Por esta razón vale la pena discutir sobre la noción de “problema” y de qué manera se aproximaría en esta investigación una concepción de lo que se considera problema.

Desde el punto de vista psicológico según Agre (1982) citado por Villalonga Pons (2007), son cuatro las condiciones que una situación debe cumplir para poder ser llamada problema:

1. Debe hacer un sujeto que reconozca la situación problemática conscientemente;
2. Deber ser una situación que genere cierta incomodidad, debe ser, por tanto, indeseable, o dicho en términos positivos, el sujeto debe sentir el deseo de liberarse de la situación;
3. Debe ser una situación con cierto nivel de dificultad pero sin dejar por ello de tener solución.

En este sentido, el autor le da importancia al sujeto y a la situación planteada, dejando de lado el contexto.

Por otra parte, para Jonassen (2000) citado por Villalonga Pons (2007), un problema requiere en primer lugar una situación donde algo es desconocido. En segundo lugar, la resolución de esta incógnita debe poseer valor para la persona, ya sea social, cultural o intelectual. Para él la resolución de problemas no es una actividad uniforme

contraponiéndose con lo planteado por Agre, teniendo en cuenta que los problemas no son equivalentes, ya que difieren en forma, contenido o proceso de resolución.

Desde el ámbito de la educación matemática, se encuentran diversas concepciones sobre lo que es un problema, autores como Schoenfeld (1988) y Törner, Schoenfeld, y Reiss, (2007), plantean la definición de problema como: “situación que precisa de una solución pero que, generalmente, no tiene un camino de solución rápido y directo, sino que se debe ir realizando una toma de decisiones (por ende, modificando y comprobando) a lo largo de la propia resolución”: Se puede inferir entonces, que lo que representa un problema para un estudiante, puede no serlo necesariamente para otro.

Para Callejo (1998) un problema se define como:

Una situación que plantea una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o los datos y la conclusión, y debe, por tanto buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, entre otros; para hacer frente a una situación nueva. Es pues un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo y al contexto en que se plantea la cuestión.

La anterior definición, muestra la complejidad de lo que puede ser un problema en el contexto matemático, lo que para efecto de esta investigación, es una definición precisa.

Aquí es necesario realizar una distinción entre lo que representa un problema y un ejercicio en el ámbito de la actividad matemática de aprendizaje escolar. Según Monereo (2002) citado por Villalonga Pons (2007), se pueden distinguir las siguientes diferencias:

1. En primer lugar, el proceso que se sigue en la resolución de un problema está guiado por una reflexión y continua valoración que da cuerpo a la toma de

decisiones características de la actuación estratégica y que, claramente, se contraponen a la dinámica solicitada.

2. Por su lado, el proceso seguido en la solución de un ejercicio es mecánico e inmediato y tiene como función última la consolidación de habilidades instrumentales básicas, constituyéndose como un medio de resolución de verdaderos problemas.

Un ejercicio busca generar en los estudiantes el manejo de algoritmos básicos para ser utilizados en la resolución de problemas; los ejercicios plantean un medio, mientras que la solución de problemas son un fin en sí mismos.

A su vez, Callejo (1998), distingue entre ejercicio y problema atendiendo a diferentes aspectos:

1. El comportamiento que debe seguir el alumno para llegar a la solución: cuando se trata de un ejercicio basta aplicar mecánicamente conocimientos ya adquiridos; en cambio, si se trata de un problema es necesario que se familiarice con la situación, buscar, relacionar, etc., hasta elaborar una estrategia que le conduzca a la solución.
2. El objetivo perseguido por el docente: cuando se propone un ejercicio lo principal es que el estudiante aplique conocimientos de forma rutinaria, mientras que cuando propone un problema la finalidad es que indague, es decir, investigue su solución.
3. El tiempo a emplear: ese es previsible en la resolución de un ejercicio y más difícil de estimar en la resolución de un problema que puede durar un momento, días, semanas o meses.

4. La dimensión afectiva: la resolución de ejercicios no suele suscitar emociones importantes, mientras que la resolución de problemas supone una carga afectiva importante.

Estos cuatro aspectos diferencian pues de manera clara las principales diferencias entre un ejercicio y un problema matemático en el ámbito escolar.

A pesar que Polya fue uno de los precursores en teorizar sobre la resolución de problemas, en sus investigaciones no brindó un concepto sobre lo que es un problema, sin embargo, caracterizó cuatro tipos diferentes de problemas que dan dentro del contexto escolar:

1. Los problemas en que la regla que hay que aplicar salga a la vista porque acaba de ser presentada en clase.
2. Los problemas en que hay que elegir qué se debe aplicar y que se trabajó en clase recientemente.
3. Los problemas en que hay que elegir una combinación de reglas previamente estudiadas.
4. Finalmente, los problemas cuya resolución exige una combinación original de reglas y uso de razonamientos plausibles. (Vila & Callejo, 2004)

Los ítems 1 y 2 (Danielson & Marquez, 2014) hacen referencia a problemas rutinarios o como lo caracteriza Callejo, tienen más fundamentación de ejercicios que problemas en sí mismos, mientras que los ítems 3 y 4, se acerca a la definición de problemas propiamente dichos.

Polya a su vez diferenció entre los problemas “de resolver”, “de demostrar”, “de rutina” y “prácticos”. Los primeros problemas de resolver, son aquellos en los que el individuo busca un objeto o incógnita; en los problemas de demostrar se persigue la verificación o falsación de una afirmación o de un teorema matemático; en los problemas

de rutina, según el autor, son aquellos que se pueden resolver sustituyendo las incógnitas por los datos disponibles, siguiendo paso a paso un procedimiento ya conocido. Por último los problemas prácticos se distinguen de los puramente matemáticos en que los primeros suelen ser vagos e indefinidos, mientras que en los segundos todos los elementos son definibles.

Por su parte Abrantes (1989) citado por Ponte (2007) introduce la idea de “buen problema”. Para Abrantes se trata de un concepto relativo, no sólo porque depende del conocimiento previo que el resolutor tenga, sino también de otras razones de carácter educativo. Por un lado, la necesidad de que el estudiante esté interesado en resolverlo, pues si se elude la dificultad, no existe problema. Por otro lado, la variedad de problemas y la influencia de la experiencia con ellos. En este mismo trabajo Abrantes (1989) distingue siete tipos diferentes de problemas – ejercicio, los cuales se intentan resumir en la tabla 8.

Tabla 8. Tipos de problemas según Abrantes (1989)

Ejercicio	Tarea para la que el estudiante dispone de un determinado procedimiento o algoritmo automático que le permite solucionarlo sin genera dudas de cómo proceder.
Problema de palabras	Ejercicio disfrazado en contexto, cuya declaración resulta de ser irrelevante con lo que una cierta repetición de los mismos hace de un transformación en ejercicio sea automática.
Problema para ecuacionar	Ejercicio disfrazado en contexto que puede ser traducido por una ecuación. En este sentido el enunciado no tiene ningún papel destacado.
Problema para descubrir	Problema que habitualmente se plantea en los concursos u otras iniciativas no curriculares con el fin de despertar la curiosidad y el gusto por las matemáticas. Su resolución requiere casi siempre de una correcta comprensión y una idea brillante. El enunciado contiene toda la información relevante y el contexto rara vez necesita ser explorado. Casi siempre tiene una solución única y bien definida.
Problema de la vida real	Se trata de una situación en la que el contexto es la vida real. Consisten en la matematización de situaciones de la vida real adecuadas a los alumnos. Por su forma de presentarse, el enunciado no tiene formulación matemática directa y puede implicar conocimientos extramatemáticos relacionados con el contexto.

	En general, no hay una solución única y las diversas soluciones aceptables pueden no ser exactas, sino aproximadas.
Situación problemática	Consiste en una situación en la que el contexto es la propia matemática. En contexto, al ser en si mismo problemático, requiere ser explorado. Ello invita a generar preguntas, conjeturas y, por consiguiente, ser probadas. De ellos se desprende otra actividad esencial en los estudiantes la formular situaciones problemáticas.
Situación inicialmente no problemática	Cuando no se formula ningún problema, ni siquiera implícitamente, pero hay una clara invitación a explorar el contexto en que se presenta.

En su estudio Lester (1994) distingue entre problemas rutinarios y no rutinarios. Por problemas rutinarios concibe ejercicios descritos en palabras, que pueden integrar varios pasos, destinados a proporcionar a los alumnos la práctica de traducir los problemas verbales planteados en contextos del mundo real en expresiones matemáticas. En cuanto a problemas no rutinarios, distingue entre tres tipos: problemas de proceso, entendidos como problemas para los que no existe un algoritmo estándar para extraer o representar la información dada, y, por lo tanto, para ser resuelto es necesario hacer algo más que traducir palabras a una expresión matemática, o aplicar un algoritmo, o realizar cálculos; y problemas con información superflua o insuficiente.

Por su parte, Vila y Callejo (2004) usan el término problema para designar una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible a quien pretende resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto, debe buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, etc., para afrontar un situación nueva. De ello coincide con Schoenfeld (1997) al dar una caracterización de la idea de problema entendida como herramienta para pensar matemáticamente. Es decir, utilizar los problemas como medio para poner el énfasis en los alumnos, en sus proceso de pensamiento y en los métodos interrogativos; una herramienta para formar sujetos con

capacidad autónoma de resolver problemas, críticos y reflexivo, capaces de preguntarse por los hechos, sus interpretaciones y explicaciones, de tener sus propios criterios modificándolos si es preciso y de proponer soluciones. (Vila & Callejo, 2004).

Finalmente recojo las ideas de Niss y Højgaard (2011), para quienes un problema matemático es un tipo muy concreto de pregunta matemática que requiere de un proceso de investigación matemática para poderlo resolver. Además, puntualizan que la noción de “problema matemático” no es absoluta, sino que es relativa a la personas que se enfrenta con el problema, ya que lo que para una persona puede ser un problema rutinario para la otra persona puede convertirse en una tarea de investigación, y viceversa. Con ello, concluyen que la competencia del trabajo con problemas es la que conlleva a formular y saber resolver problemas matemáticos, que a su vez describe como: saber presentar (que, a su vez, incluye detectar, formular, delimitar y especificar) diferentes tipos de problemas matemáticos, ya sean matemáticos o extramatemáticos, de respuesta abierta o cerrada.

Estos autores distinguen, además, entre ser capaz de detectar y formular problemas matemáticos y ser capaz de resolver problemas matemáticos ya formulados, ya que es posible formular un problemas matemáticos sin ser capaz de resolverlos. Incluso se puede formular un problema que trabaje con conceptos elementtales, sin que sea posible llegar a la solución usando estas ideas elementales. Del mismo modo, es posible ser bueno resolviendo problemas sin ser bueno encontrándolos o formulándolos.

2.2.4.3 El proceso de resolución de un problema.

Con la intención de que los docentes puedan ayudar a sus alumnos de manera conveniente, Polya (1965) identifica cuatro fases en el proceso de resolución. En primer lugar, entender el problema, en el seentido que se tiene que ver claramente lo que se requiere. En segundo lugar, hay que divisar cómo se conectan los distintos ítemes, cómo

se vincula lo desconocido con los datos para obtener la idea de la solución, y así trazar un plan. Tercero, se debe aplicar el plan. Finalmente, una cuarta fase, consiste en mirar hacia atrás en la resolución para revisarla, y extraer conocimientos para futuras ocasiones.

Desde una perspectiva basada en lo que siente el aprendiz de resolutor al enfrentarse a un problema y con el objetivo de que aprendan a hacerlo con la experiencia y la propia reflexión, Mason, Burton, y Stacey (1988) distinguen entre procesos, fases y estados. Los procesos concretar y generalizar, los que a su vez, se ven relacionados por los de conjeturas y justificar.

Las fases que identifica son tres: abordaje, ataque y revisión. La fase de abordaje es imprescindible en cualquier proceso de resolución porque es cuando uno comienza a enfrentarse a una cuestión. En ella se absorbe la información dada y se averigua lo que la pregunta está preguntando en realidad. El ataque, se inicia cuando uno interioriza la cuestión planteada y se siente en la necesidad de trabajarla y finaliza cuando se resuelve el problema, o se abandona. Finalmente, tanto si se llega a una resolución razonablemente satisfactoria como que se está a punto de renunciar, es esencial revisar el trabajo. Hay que mirar hacia atrás en lo que ha sucedido con el fin de mejorar y ampliar lo desarrollado. Esta es la fase de revisión. Por último los estados, vinculados a cada una de las fases, que se concretan en: introducirse e involucrarse; reflexionar; persistir y profundizar; y ser escéptico y contemplar.

Al examinar lo que los estudiantes saben, y hacen al resolver un problema matemático para intentar entender lo que sucede en el momento en que pretenden resolverlo, Schoenfeld (1985) presenta lo que se entiende por estrategia de resolución de problemas, y que representa el comportamiento más sistemático de los buenos resolutores de problemas. Dado un problema, los principales escenarios que conforman dicha estrategia se concretan en analizar la situación descrita; diseñar una solución pasando por

un estado de exploración; implementar paso a paso, la solución diseñada; y, finalmente, verificar de manera particular como general, la solución obtenida. Además de ello, es necesariaa una lectura inicial de la situación.

Callejo (1996) percibe la resolución de un problema como un acto creativo no puramente cognitivo que, de acuerdo con Polya (1965) comporta diversas fases que define como un trabajo consciente de preparación o familiarización con el problema; la incubación de las ideas con las que se ha trabajado en la etapa anterior; la inspiración o iluminación sobre el camino que lleva a la solución; y la verificación del proceso que lleva al resultado buscado. Enfatiza que no tiene mucho sentido proponer un problema para resolverlo en tiempo limitado, puesto que así no se incuba el problema con el problema; además, dado que la inspiración es algo que se puede favorecer pero nunca asegurar, un fracaso aislado no es significativo mientras que un éxito puede ser bastante revelador.

En su propuesta de cómo atacar un problema matemático de manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia, Mason, Burton, y Stacey (1988) hacen continua referencia al hecho de quedarse atascado, como algo inevitable que sucede a cualquiera que pretende resolver un problema y que, por ello, no debe esconderse. A pesar de ello, la realidad indica que reconocer el error es una situación poco comprendida y aceptada en las aulas, especialmente por los resolutores no expertos, pues a menudo es motivo de frustración y de abandono (Mason, Burton, & Stacey, 1988). De hecho, en la escuela el error, como tradicionalmente se conoce el desacierto o confusión durante el desarrollo de un proceso, se tiende a considerar como algo negativo que los alumnos aprenden rápidamente a ocultar para no ser penalizados (Sanmartí, 2007). De hecho, se ha comprobado que los alumnos que tienen éxito en la escuela se caracterizan por su capacidad para identificar y corregir sus errores. Luego, como no todos los alumnos

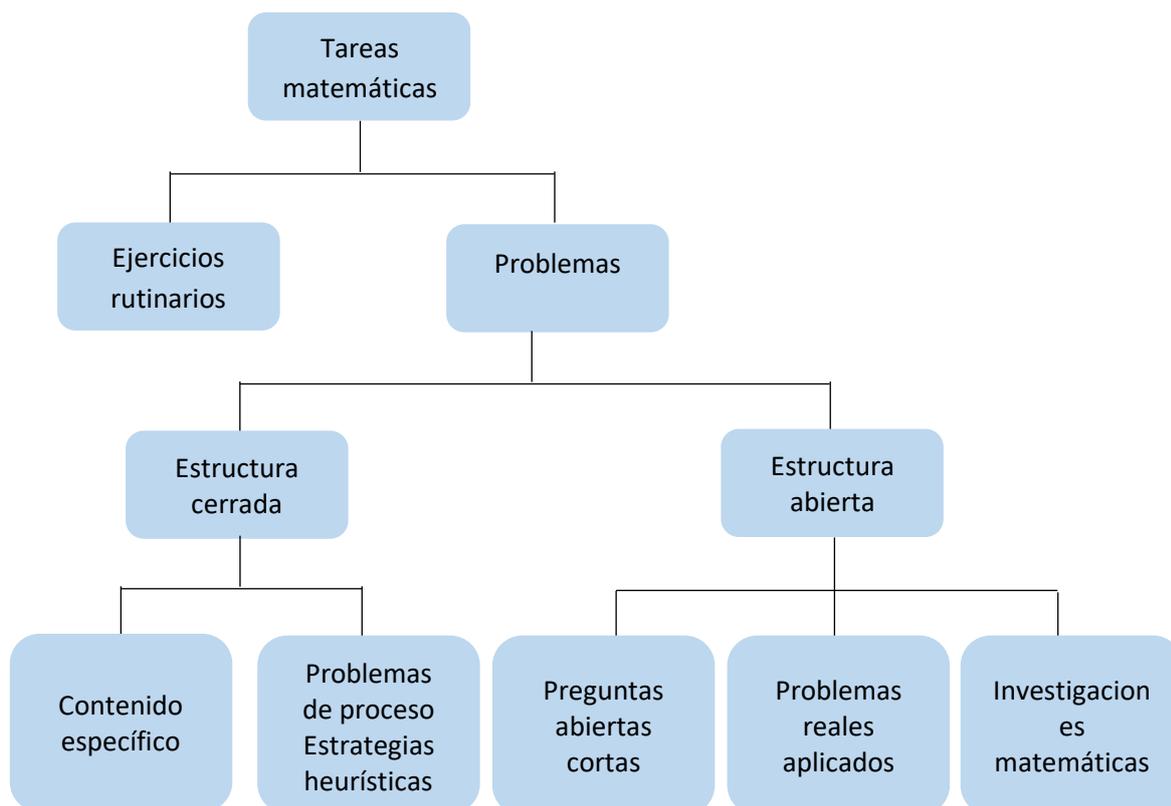
desarrollan por sí solos esta capacidad, el reto del docente es comprender sus causas, porque sólo ayudándoles a reconocerlas será posible aprenderlos a corregir. (Sanmartí, 2007).

De acuerdo con Mason, Burton, y Stacey (1988), la mejor preparación para hacer frente a una situación de atasco es reconocerlo y aceptarlo. Sólo entonces será posible reflexionar sobre las ideas y momentos clave que puedan ser el principio de un nuevo y útil enfoque. Para ello, al intentar resolver un problema, conviene tomar especial nota de los caminos que no lleven a ninguna parte. Así, en cualquier momento de la resolución, será posible comprobar si se ha omitido algo relevante, si se han deslizado errores, o si es necesario dejar el problema por un tiempo, para retomarlo posteriormente sin perder el trabajo realizado. Descubrir un error o algo inadecuado permite retomar cualquier punto de la resolución. El objetivo es descubrirlo, reflexionar y buscar alternativas. (Mason, Burton, & Stacey, 1988).

2.2.4.4 Clasificación de problemas matemáticos.

Una diversidad de autores ha realizado la clasificación de problemas matemáticos desde una variedad de criterios. Una organización muy amplia, desde las tareas que se proponen en una clase de matemáticas es la que proporciona Foong (2013) en la figura 9.

Figura 9. Plan de clasificación para los tipos de problemas matemáticos



Fuente: (Foong, 2013)

2.2.4.5 Factores influyentes en la resolución de un problema.

Como actividad humana, la resolución de problemas puede entenderse como un ejemplo de comportamiento dirigido a lograr unos objetivos (Schoenfeld, 2007). Se trata de una actividad dinámica, no necesariamente lineal, que requiere la organización y activación de múltiples habilidades y estrategias, y en la que la implicación del resolutor es esencial (Mason et al., 1988; Polya, 1945; Schoenfeld, 2007). Sin bien los conocimientos tienen un papel fundamental en el proceso de resolver un problema, este no es el único factor. Como

se desprende de lo anterior y como se expresa a continuación, a pesar de que el conocimiento es la base de todo comportamiento competente, el papel de cómo se organiza y cómo se accede a él no es lo menos relevante. De acuerdo con Callejo (1996) resolver un problema junto a una base de conocimientos (intuiciones y conocimientos informales sobre el dominio del problema, hechos, procedimientos algorítmicos, procedimientos rutinarios no algorítmicos, reglas para trabajar en el dominio del problema, estrategias heurísticas) y al control y regulación de dichos conocimientos, intervienen también los afectos (creencias, actitudes y emociones) y las condiciones socioculturales en que se realiza la tarea.

Lester et al., (1989), Schoenfeld (1985, 1992) y De Corte et al. (2000a), entre otros han trabajado para sintetizar los factores que influyen en la resolución de problemas.

(Tabla 9)

Tabla 9. Factores influyentes en la resolución de problemas

Lester (1989)	Schoenfeld (1985-1992)	De Corte (2000)	Schoenfeld (2013)
			Objetivos
Conocimientos	Conocimientos base que uno posee (recursos) Uso que uno hace de las estrategias de resolución de problemas (estrategias heurísticas)	Conocimientos básicos específicos al dominio Métodos heurísticos	Conocimientos
Control	Autorregulación y control (como un aspecto de la metacognición)	Metaconocimiento Habilidades de autorregulación	Mecanismos de decisión
Afecto Creencias Factores contextuales	Sistema de creencias y sus orígenes en las experiencias matemáticas como estudiantes	Creencias	Creencias y orientaciones

	(creencias, afecto y prácticas)		
--	---------------------------------	--	--

Como se desprende de la tabla 9, las sugerencias de los distintos autores se pueden agrupar en tres grandes bloques que etiqueto como: conocimientos, toma de decisiones y sistema de creencias, aunque en los últimos estudios de Schoenfeld (2013), identificó un cuarto bloque relacionado con objetivos.

Conocimientos.

Lo que uno puede lograr depende fundamentalmente de lo que uno sabe (Schoenfeld, 2013). No es de extrañar, entonces que en la resolución de problemas, donde se ponen de manifiesto y toman significado prácticamente todos los aspectos trabajados en la educación matemática, el papel del conocimiento sea central. La naturaleza de los distintos conocimientos que entran en juego, y con la intención de profundizar en cada uno de ellos, se distinguen dos tipos de conocimientos: los conocimientos base y las heurísticas (Schoenfeld, 1985, 1992; De Corte et al., 2000a).

Los conocimientos base hacen referencia a las estructuras cognitivas del resolutor, a la naturaleza constructiva de la cognición, la arquitectura cognitiva, la memoria y el acceso a ella (Schoenfeld, 1985). En otras palabras, se trata del conocimiento matemático que el resolutor posee y que puede serle útil para trabajar con el problema en cuestión. Ello incluye el conocimiento informal e intuitivo sobre el tema del problema; hechos, símbolos y definiciones; procedimientos algorítmicos y rutinarios; el conocimiento sobre las reglas que constituyen los contenidos de la matemática. Además de ello hay que considerar el conocimiento sobre recursos físicos como herramientas computacionales pues el enfoque que uno puede adoptar frente a un problema puede cambiar sustancialmente dependiendo de ellas. En ese sentido, los conocimientos base son claramente un determinante del éxito o fracaso matemático de uno mismo. (Schoenfeld, 2013).

Por otro lado, se distinguen los conocimientos relativos a las estrategias matemáticas de resolución de problemas. Así, por estrategias heurísticas (Schoenfeld, 1985) o métodos heurísticos (De Corte et al., 2000a) se refiere al conocimiento sobre estrategias y técnicas que permiten avanzar en el proceso de resolución de un problema, a aquellas reglas básicas para la resolución eficaz de un problema que aunque no la puedan garantizar, aumentan significativamente la probabilidad de encontrar la solución correcta, ya que inducen un enfoque sistemático de la tarea (De Corte et al., 2000a). Ejemplos de ello, y siguiendo el trabajo de Polya (1965), son dibujar figuras o introducir una notación adecuada; recurrir a problemas relacionadas; reformular el problema o trabajar hacia atrás; utilizar procedimientos de verificación y prueba.

Toma de decisiones.

La manera en la que los resolutores de problemas gestionan los recursos de que disponen es un factor fundamental en su éxito o fracaso (Schoenfeld, 1985). Esta afirmación es una descripción clave para entender el sentido del segundo bloque de factores identificados como influyentes en la resolución de problemas que, a su vez determinan los mecanismos de decisión (Schoenfeld, 2013). La dificultad de conceptualizar los distintos términos que abarca este bloque, como monitoreo, control, metacognición o autorregulación, por lo que a continuación, intento dar una idea de cada uno de estos términos que entran en juego.

Para Lester et al. (1989), el término control se refiere a la regulación de los procesos cognitivos que uno lleva a cabo durante el proceso de resolución de un problema y por tanto, ligadas a las acciones y toma de decisiones relacionadas con el análisis y exploración de las condiciones del problema, la planificación de los cursos de acción, la selección y organización de las estrategias, el seguimiento de las acciones y el progreso, la comprobación de los resultados y los resultados, la evaluación de los planes y estrategias, la revisión y abandono de los planes y estrategias improductivas, así como

reflexionar sobre todas las decisiones tomadas y las acciones tomadas durante el curso del trabajo de un problema.

Schoenfeld (1985) considera la planificación, el seguimiento y la evaluación, y la toma de decisiones, como actos metacognitivos conscientes. Utiliza los términos monitoreo y control para referirse a la autorregulación, que entiende como uno de los grandes ámbitos que para él abarca la metacognición (Schoenfeld, 1992 y 2013) y que percibe como componente principal de la toma de decisiones. En cuanto a la toma de decisiones, Schoenfeld destaca dos componentes en función de la familiaridad de las circunstancias de la situación. Si las circunstancias son familiares, se pueden utilizar varios mecanismos descritos y prefijados (guiones, marcos, esquemas, etc.) que esencialmente dicen qué hacer a continuación. Si las circunstancias varían repentinamente de lo previsible, entonces es posible ofrecer mecanismos que, de algún modo se percibe que pueden modelar la toma de decisiones.

Por su parte, De Corte et al. (2000a) distingue entre metaconocimiento, que implica, por un lado, el conocimiento sobre el funcionamiento cognitivo (conocimiento metacognitivo), y, por otro, el conocimiento sobre la motivación y las emociones que se pueden utilizar para mejorar deliberadamente la eficiencia volitiva. Por otro lado, las habilidades de autorregulación, que abarcan las habilidades relacionadas con la autorregulación de los procesos cognitivos (habilidades metacognitivas o autorregulación cognitiva), por un lado, y de los procesos volitivos (habilidades metavolicionales o autorregulación volitiva), por otro.

Sistema de creencias.

Además de lo anterior, no se puede obviar cómo la visión matemática de un individuo, el conjunto de particularidades que caracterizan (aunque no necesariamente conscientes) el comportamiento de un individuo sobre sí mismo, sobre el medio en que se encuentra, sobre el tema y sobre las matemáticas, también afecta la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985). De esta observación surge el tercer bloque de factores influyentes en la resolución de problemas, que comprende las creencias, sobre uno mismo en relación con el aprendizaje matemático y la resolución de problemas, sobre el contexto social en el que se desarrollan las actividades matemáticas y sobre matemáticas y aprendizaje matemático y resolución de problemas (De Corte et al., 2000a). Para abarcar tanto las creencias como las orientaciones (incluyendo preferencias, valores, gustos, etc.) que las originan Schoenfeld se refiere a ellas como sistema de creencias.

Schoenfeld (1992) describe las creencias como los entendimientos y sentimientos de un individuo que configuran las formas en que la persona conceptualiza y se involucra en el comportamiento matemático. Las relaciones de las personas con las situaciones matemáticas en las que se encuentran y los efectos de las perspectivas individuales sobre el comportamiento y el rendimiento matemáticos determinan ciertas creencias y afectos en los resolutores (Schoenfeld, 1993). En este sentido, Vila y Callejo (2004) puntualizan que las creencias se van construyendo y transformando a lo largo de la vida. Estos autores definen las creencias como un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto sobre el que se tratan, está ligados a situaciones y presentan un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo. Afirman que aunque tiene un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar ante la confrontación experiencias que las pueden desestabilizar.

En sus estudios más recientes, Schoenfeld (2013) hace una distinción entre creencias y orientaciones, entendiendo las orientaciones como un término más amplio que las creencias que incluyen las preferencias, valores, gustos que toma parte en el modelaje de las propias creencias. En definitiva, del sistema de creencias de una persona (Vila y Callejo, 2004). En relación a ello, estos autores observan y destacan que la estructura de la forma en cómo están organizadas las creencias de cada persona puede explicar el hecho que dos personas con las mismas creencias aborden y desarrollen de manera diferente la actividad matemática.

Por todo ello, las prácticas, entendidas como intentos de instrucción para fomentar el pensamiento matemático mediante la creación de pequeños ambientes del trabajo matemático tienen un papel fundamental en la interpretación de los alumnos (Schoenfeld, 1992). Por ello, es importante considerar las creencias de los estudiantes, las creencias de los maestros, y las creencias generales de la sociedad sobre hacer matemáticas. En este sentido, se observa que las creencias y las prácticas forman un binomio difícil de romper (Vila y Callejo, 2004). Por consiguiente, cabe reflexionar sobre la gestión de la clase, para que las actividades de aprendizaje sean diseñadas de acuerdo con las expectativas de la comunidad matemática, hacer que los estudiantes interactúen (entre sí y con las matemáticas) promoviendo la adquisición del pensamiento matemático.

2.2.4.6 Características de resolutores de problemas matemáticos.

Al resolver un problema el resolutor debe seleccionar determinados procesos y encontrar formas de desarrollarlos. Prever los posibles enfoques, las etapas intermedias así como sus posibles resultados permite no sólo escoger el camino más eficaz a seguir sino también fijar el orden de las acciones necesarias para aplicarlo. (Sanmartí, 2007). Con ello, se evidencia que la resolución de un problema recae no sólo en los conocimientos de quien lo resuelve sino también de sus objetivos, orientaciones y toma de decisiones

(Schoenfeld, 2007). En este sentido, las habilidades metacognitivas, especialmente, resultan agentes autorreguladores de su aprendizaje. Sin embargo, las evidencias muestran que dichas habilidades con frecuencia se encuentran ausentes, especialmente en los resolutores menos eficientes (De Corte y Verschaffel, 2003).

Se ha observado que una gran mayoría de estudiantes manifiestan gran inseguridad al resolver un problema, y que, una vez iniciado tienden a no completar los procesos iniciados (Sanmartí, 2002). De acuerdo con lo anterior, el principal motivo, sitúa la causa en la incapacidad de los estudiantes en planificar la tarea propuesta, puesto que se lanzan a realizar las tareas relacionadas aplicando diferentes maneras de hacer o de razonar, sin suficiente coherencia ni orden, siguiendo procesos algorítmicos vacíos. En cambio, cuando dedican más tiempo a pensar y planificar la estructura de la resolución que no en efectuar los cálculos, acostumbran a resolver mejor los problemas (Sanmartí, 2002). Eso responde al perfil de resolutor experto, caracterizado en invertir mayor tiempo en el análisis del problema, con el objetivo de comprender de qué se trata, y en la planificación del proceso de resolución para analizar los distintos caminos de resolución y lo que ellos requieren (Schoenfeld, 2007; De Corte et al. 2000a). Por ello, es necesario ayudar a los estudiantes a aprender a planificar, un proceso que implica la generación de sub-objetivos necesarios para resolver problemas complejos.

Otra de las particularidades del resolutor experto es su capacidad de reflejar continuamente sobre el estado de su proceso de resolución (Schoenfeld, 2007; De Corte et al. 2000a). En este sentido, se ha observado que los resolutores más eficientes hacen un seguimiento efectivo de sus progresos y de manera consecuente mantienen o cambian su dirección de trabajo. En cambio, los resolutores menos eficientes, además de elegir rápidamente un camino de solución, como se ha dicho anteriormente, se mantienen en esa idea independientemente de los progresos o no alcanzados (Schoenfeld, 20013).

Así mismo, los alumnos raras veces verbalizan cómo plantean o pretenden resolver un problema (Sanmartí, 2002), lo que complica entender sus elecciones y razonamientos. De hecho, pedir a los alumnos que piensen en voz alta, elaboren informes por escrito de su pensamiento, no siempre resulta exitosos.

De estas observaciones, y de acuerdo con el estudio comparativo de Lester (1994) y de Schoenfeld (2007), se desprende que los buenos resolutores de problemas presentan las siguientes características:

- No sólo tienen más conocimientos, sino que su conocimiento comprende esquemas ricos y está mejor conectado.
- Tienden a concentrar su atención en las características estructurales de los problemas, mientras que los resolutores más débiles se fijan en las características superficiales.
- Tienen más consciencia de sus logros y dificultades.
- Muestran una mejor supervisión y regulación de sus esfuerzos de resolución de problemas.
- Tienen interés en la obtención de soluciones “elegantes” a los problemas

Con ello se puede afirmar que los buenos resolutores de problemas además de poseer una cantidad sustancial de conocimientos especializados, son flexibles e ingeniosos. Disponen de distintas maneras de pensar sobre los problemas: son capaces a encontrar enfoques alternativos si se atascan, distintas maneras de salir adelante cuando se encuentran con un obstáculo, utilizar de manera eficiente lo que saben, además, se caracterizan por una cierta clase de disposición matemática, caracterizada por una voluntad de enfrentarse a desafíos matemáticos difíciles bajo la suposición de que serán capaces de progresar en ellos y la tenacidad de mantener la tarea cuando otros se han dado por vencidos (Schoenfeld, 2007).

Schoenfeld afirma que ser un buen resolutor de problemas no es una habilidad invariante y que con el acompañamiento adecuado, los estudiantes pueden convertirse en resolutores de problemas más efectivos. Para mejorar la destreza de la resolución de problemas, es necesario que los alumnos traten de resolver una variedad de tipos de problema de manera regular y durante

2.2.4.7 La evaluación de la resolución de problemas.

“Dime qué y cómo evalúas y te diré qué y cómo enseñas”. Sanmartí (2007).
“la evaluación es más un proceso ético que instrumental”. Clavijo (2008)

De acuerdo con la visión constructivista que reside en el modelo educativo competencial, cualquier proceso de aprendizaje tiene una fuerte relación entre los conocimientos adquiridos y los que se adquieren. Los conocimientos previos influyen en nuevas experiencias, las que, a su vez, reorganizan la estructura de conocimiento ya adquirido. En este sentido, el papel de los docentes se centra en facilitar a los alumnos que sean conscientes de este hecho, así como las habilidades que pueden ser útiles en cualquiera de los procesos.

Así pues, en el entendido que el conocimiento se construye mediante un proceso en el que las ideas pueden evolucionar gracias a situaciones problemáticas que favorecen la explicitación y el contraste de puntos de vista (Sanmartí, 2002; Callejo, 1996) entendemos que un proceso de enseñanza no cumple sus objetivos si no promueve un proceso de aprendizaje. De ahí, la inseparabilidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, atendiendo a esta concepción constructivista del aprendizaje, en la que aprender consiste en integrar y relacionar nuevas informaciones con los conocimientos preexistentes dando así aplicabilidad y significado a los conocimientos, no se puede concebir un proceso de enseñanza – aprendizaje sin la intervención de un proceso de evaluación. Por ello no tiene sentido hablar de sistemas de enseñanza y

aprendizaje sin aceptar que, vinculados a ellos y con la influencia directa se encuentra algún tipo de evaluación. Se dice algún tipo de evaluación porque la evaluación se puede presentar en distintos modos de los que cabe reconocer sus finalidades por sus distintas repercusiones.

Históricamente, la evaluación como concepto ha tenido diversas acepciones, derivadas de las distintas teorías y modelos pedagógicos. La evaluación va más allá de la visión reduccionista que la confunde con medición y calificación o con una suma de métodos, técnicas e instrumentos, sin una auténtica concepción sobre la praxis educativa, definida a partir de referentes filosóficos y epistemológicos. (Clavijo Clavijo, 2008).

Definamos la evaluación como un proceso caracterizado por: la recogida y el análisis de información, la emisión de un juicio sobre ella, y la toma de decisiones, ya sean de carácter social o pedagógico de acuerdo con el juicio emitido. En este sentido, si el carácter de la evaluación es pedagógico, permitirá mediante un proceso continuo, comprender, ajustar, reorientar y mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje, para desarrollar o alcanzar los objetivos de aprendizaje, es decir, tendrá una función formativa dentro del currículo. Si por el contrario tiene un propósito de carácter social, la información será utilizada para promover, certificar e informar a la sociedad acerca del alcance o grado de cumplimiento de los objetivos educativos, presentado resultados globales al final del curso o ciclo educativo, y en ese sentido, su función será de acreditación.

El sentido restringido, instrumental y aparentemente objetivo, representa una visión que solo revela aspectos parciales del nivel de aprendizaje del estudiante, convirtiéndose la evaluación en un fin, representado en una calificación, que sirve como medida de control o instrumento sancionatorio, que ocasiones es usado para camuflar las deficiencias de la praxis docente. Una visión más amplia y en sentido formativo,

suministra, además del nivel de aprendizaje de los alumnos, indicios acerca de la eficiencia de la enseñanza.

En este sentido, Gómez Yepes (2004), afirma que la evaluación con función formativa debe ser vista como una actividad de reflexión continua, cuyas acciones constituyen en elemento dinamizador fundamental para el estudiante, el maestro, la escuela, la familia y la comunidad. En síntesis, parafraseando a Porlan R. (1999) citado por Clavijo (2008), son las concepciones que tiene el docente de sí mismo, de la educación, de la enseñanza, del aprendizaje, y de la evaluación, las que determinan y condicionan, los tipos de relaciones que tanto docentes como alumnos establecen con el conocimiento y con sus formas de producción.

De acuerdo con todo ello, confirmamos como los procesos evaluativos dan sentido y consistencia a cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje. Observamos como la evaluación sirve de puente de doble sentido entre la enseñanza y el aprendizaje.

Una evaluación de la educación matemática, debe permitir recoger la información necesaria para, al menos, poder tomar decisiones sobre el contenido y los métodos de enseñanza de las matemáticas, tomar decisiones sobre la actividad en el aula, para ayudar a comunicar lo que es importante y calificar (Lester, 1994). Claramente, la parte más difícil de evaluar es cómo evaluar el trabajo matemático que pueden desarrollar los alumnos, atendiendo a los diversos tipos de pensamiento y varios tipos de errores que pueden surgir en sus prácticas.

Si la posesión de una competencia matemática consiste en estar preparado y ser capaz de actuar matemáticamente sobre la base del conocimiento y la perspicacia, siendo las acciones relacionadas de naturaleza diversa (físicas, de conducta, o mentales), una evaluación válida de las competencias matemáticas tiene que estar basada en la identificación de la presencia y el alcance de sus competencias en relación con las

actividades matemáticas en la que uno ha participado. (Niss & Højgaard, 2011). Debido que cualquier actividad matemática requiere de una o varias competencias matemáticas, se convierte en una tarea esencial identificar –a priori, así como a posteriori- las competencias necesarias y suficientes que se ven involucradas en las actividades matemáticas que se desarrollen, como resolver un problema matemático o aplicado, la lectura de un texto matemático, demostrar un teorema, escribir un texto que contiene componentes matemáticos, una charla de tipo matemático, etc. (Niss & Højgaard, 2011) y, por consiguiente, la identificación de las habilidades necesarias para lograr cada una de ellas.

Así las cosas, se analizará concretamente, la evaluación de la competencia en resolución de problemas.

En el proceso de pretender que los alumnos aprendan a resolver problemas matemáticos de manera competente, la evaluación del aprendizaje juega un papel indispensable para la adquisición de la resolución de problemas en sí misma, a la vez que, debido a su papel en la educación matemática, la evaluación de la capacidad para resolver problemas se convierte en un pilar dentro de la evaluación de las matemáticas de los alumnos. De ello deriva la preocupación que con la forma instrumental de evaluación, basada únicamente en la evaluación final y calificadora, no se pueda realmente revelar lo que los alumnos aprenden. Con ello se pone de manifiesto la necesidad de incorporar la finalidad formativa y reguladora de la evaluación de la resolución de problemas.

La complejidad de la evaluación en sí misma, añadida a las dificultades observadas que caracterizan la resolución de problemas, hacen que la evaluación de la resolución de problemas se trate de una tarea aún más complicada de desempeñar. Por ello, más allá de reconocer las características de los alumnos que se pretenden evaluar, del docente que evalúa y del propio sistema educativo, es fundamental tener en cuenta los

factores o aspectos relativos a la tarea que se pretende evaluar. (Callejo, 1996). Al proponer un problema, el profesor persigue ciertos objetivos, por lo que un ingrediente esencial en cualquier proceso de enseñanza es un plan de evaluación bien concebido, que se desarrolla simultáneamente con los objetivos y actividades de enseñanza del docente (Lester y Kroll, 1991). Por consiguiente los propósitos de la evaluación deben ser consecuentes con ellos (Callejo, 1996).

En el proceso de resolución de problemas en un marco educativo donde el profesor promueve el aprendizaje de los alumnos, Callejo (1996) observa la presencia de dos tipos de evaluación según el agente que la conduce. Distingue entre la evaluación que puede realizar el mismo alumno como resolutor de un problema y la evaluación de los aprendizajes de los alumnos por parte del profesor. En el primer caso distingue, a su vez, entre evaluación local, implícita en el proceso de resolución de un problema y que se manifiesta cuando el resolutor reflexiona sobre sus acciones (por ejemplo, respondiente por sí mismo a preguntas como ¿qué estoy haciendo?, ¿para qué lo estoy haciendo?, ¿a dónde me puede llevar?, (Pifarré & Sanuy, 2001) y una evaluación global correspondiente a una revisión general del propio proceso. En cuanto a la evaluación por parte del profesor Callejo (1996) distingue entre un enfoque del aprendizaje por fases, estrategias, modos de razonamiento, métodos de desbloqueo, etc., independientemente del contenido matemático de los problemas. De manera resumida se trata de lo que, de acuerdo con la autora, se recoge en la tabla 10.

Tabla 10. Finalidad de la evaluación de la resolución de problemas en función del agente evaluador (Callejo, 1996).

Agente evaluador	Finalidad
El docente	Enseñar para un aprendizaje de la resolución de problemas en sí misma. Enseñar para aprender matemáticas a través de la resolución de problemas.
El alumno como resolutor	Gestionar el propio proceso de resolución. Revisar el propio proceso de resolución.

Entendiendo que la resolución de problemas es un acto creativo no puramente cognitivo que comporta diversas fases, Callejo (1996) concluye que la evaluación de los aprendizajes de los alumnos en la resolución de problemas no se deben limitar a la valoración de los resultados ni a la valoración del punto de llegada de los alumnos, pues debe considerar también los procesos de búsqueda e investigación que se ponen en juego durante el desarrollo de la tarea y los progresos realizados por cada alumno durante un período de instrucción más o menos largo. Al mismo tiempo, de acuerdo con Sanmartí (2010) la evaluación debe permitir identificar tanto las competencias de los alumnos como sus dificultades y motivaciones.

Así, para una evaluación centrada en los procesos (y no sólo en los resultados) y en los progresos de los alumnos, es decir, si después de un período de instrucción resuelven más problemas y los resuelven mejor, de acuerdo con Lester y Kroll (1991), es necesario determinar de antemano qué aspectos se van a valorar y utilizar, así como disponer de instrumentos de valoración adecuados.

Bajo la premisa que el proceso de resolver un problema conlleva aspectos cognitivos, procedimentales y actitudinales, para una evaluación de los proceso por parte del profesor presenta dos tipologías de instrumentos de evaluación (Callejo, 1996), unos basados en la propuesta de pruebas escritas a los alumnos por parte del profesor, entre las que distingue proponer problemas para resolver (PR); proponer cuestiones para reflexionar acerca delos problemas (CR); y cuestionarios sobre actitudes y creencias (CA); y los otros basados en la observación directa del profesor. Aquello recalca pues, la importancia de evaluar los sistemas de comunicación, que tanto que, atendiendo que la comunicación es la base del proceso de construcción, las ideas se expresan tanto de manera oral, escrita como gestual.

En la tabla 11 se resumen las sugerencias de Callejo (1996) atendiendo el tipo de actividad, su finalidad y los requisitos e inconvenientes que pueden presentar.

Tabla 11. Caracterización de instrumentos de evaluación para la resolución de problemas (Callejo, 1996)

Tipo	Actividad	Finalidad	Requisitos	Inconvenientes
Proponer pruebas escritas PR	Proponer a los alumnos la resolución de varios problemas.	PR1. Problemas con uno o más apartados que pueden estar asociados a preguntas que ayudan a contestar la siguiente; diversas cuestiones que se pueden conocer gracias a los datos de la situación; o la consideración de casos particulares y generales sobre la misma.	Valorar no sólo el resultado sino también el proceso. Analizar las producciones atendiendo diferentes indicadores. Estos indicadores pueden referirse a las etapas del proceso de resolución o a otros aspectos como la claridad, la elegancia, la originalidad o la potencia. Los indicadores deben relacionarse estrechamente con aquellos aspectos en los que se ha puesto énfasis en la enseñanza.	La repercusión de presentar uno o más apartados: si el enunciado sólo tiene una pregunta no crea en algunos alumnos ansiedad de querer responderlo todo. Sin embargo, el profesor no sabrá en algunos casos en qué medida el alumno es capaz de dar una respuesta parcial a la cuestión propuesta.
	Proponer a los alumnos la resolución de varios problemas.	PR2. Problemas particulares, atendiendo a sus características concretas.	Saber en qué medida los alumnos son capaces de concebir y aplicar estrategias de resolución.	Pedir a los alumnos que entreguen las hojas de borrador o que mientras que resuelven el problema vayan registrando sus propias decisiones para poderlas analizar y estudiar. A menudo las hojas que entregan los alumnos al profesor no permiten conocer hasta qué punto han pensado un plan aunque no hayan sabido llevarlo hasta el final.

	CR	<p>Proponer a los alumnos preguntas sobre un problema pidiendo que elaboren un informe retrospectivo.</p>	<p>Conocer mejor el proceso seguido por el alumno desde su propio punto de vista y valor las capacidades de argumentar y de justificar los resultados; tomar conciencia, valorar y expresar los propios procesos de pensamiento; para generalizar un resultado o transformar un problema y resolverlo aprovechando un resultado anterior.</p>	<p>Se puede especificar en: 1. La justificación de la solución en forma deductiva; 2. el camino que se ha seguido (atascos, cambios de rumbo, dificultades, ideas). 3. la resolución de otros problemas semejantes y los sentimientos experimentados</p>	<p>Hay que especificar muy claramente qué se espera que sea contestado. Las justificaciones pueden ser parciales. Exige a los alumnos una gran capacidad de observación de sus propios procesos de pensamiento y de expresión.</p>
		<p>Proponer a los alumnos que elaboren un plan de resolución después de haber pensado durante unos cinco minutos sobre un problema.</p>	<p>Evaluar la capacidad de los alumnos para identificar y seleccionar estrategias plausibles para resolver problemas.</p>	<p>Precisar bien que no se pide una resolución concreta y completa sino una explicación de lo que se haría. Como ejemplos, las instrucciones que Schoenfeld (1982) dio a sus alumnos: <i>[...] dime lo que harías si tuvieses dos o tres horas para poder trabajar el problema: lo que verías, los procedimientos que considerarías razonables para resolverlo; cómo comenzarías a resolverlo y cómo podrías justificarlo.</i></p>	
	CA	<p>Pedir a los alumnos que respondan a cuestionarios y escalas sobre creencias y actitudes.</p>	<p>Dar un papel a las creencias y actitudes de los alumnos en el proceso de evaluación.</p>	<p>El formato puede ser diverso: escalas para situarse en una gradación, ítems para pronunciarse sobre el acuerdo o desacuerdo sobre el mismo...</p>	<p>La información que se recoge es poco fiable porque los alumnos no siempre son sinceros en sus respuestas, o creen serlo, pero la falta de conocimiento propio se lo impide.</p>

Registros de observación	Observar de la manera informal o sistemática las conductas de los alumnos, con ayuda de un registro.	Conocer actitudes y hábitos de trabajo de los alumnos que no quedan registrados en el papel, como pueden ser de apertura de enfoque, la flexibilidad o la perseverancia en el proceso.	Lleva tiempo, requiere experiencia en evaluación de procesos y hay que planificarla cuidadosamente y en conjunción con otras técnicas.	Es difícil evitar la subjetividad del observador. Las actitudes de los alumnos no estables y pueden variar de un día a otro o según el tipo de problema.
--------------------------	--	--	--	--

De acuerdo a esta caracterización, Callejo (1996) destaca algunos comentarios, que son importante considerar.

- En relación al PR1, una propuesta de pautas de análisis del proceso de resolución basadas en la comprensión del enunciado, la comprensión del problema o transformación del enunciado; la búsqueda de varias estrategias de resolución; la selección de una de las estrategias tratando de llegar hasta el final; y la revisión del proceso seguido, permite los dos fines apuntados anteriormente sobre la evaluación: como diagnóstico, si se una para analizar la resolución de problemas de un determinado alumno durante un intervalo de tiempo más o menos largo, pues permitirá diagnosticar cuáles son sus logros, dificultades y evolución en los aspectos señalados; y como calificación, al dar cierto peso a cada ítem y, si conviene, dentro del mismo dar cierta calificación según el grado de aplicación, pudiendo con ello tanto una calificación multidimensional y unidimensional.
- Con el modo de evaluación PR2 es posible, en cierta medida, objetivar la valoración de un problema. Esto es hacerla fiable y no dejarla a la mera impresión del profesor corrector.
- En cuanto al modo CR, destaca que la visión retrospectiva o reflexión sobre el proceso es además un elemento formativo que ayuda a mejorar la capacidad de resolver problemas, ya que se saca todo el provecho posible al esfuerzo invertido y al experiencia para resolver problemas.

En cuanto a la valoración de los progresos, (Callejo, 1996) sugiere la realización de pruebas, inicial y final, realizando o no evaluaciones intermedias, cuyo nivel de dificultad sea equivalente. Si la prueba propone la resolución de problemas, los aspectos implicados en la misma deben relacionarse con el diseño de la instrucción. Si se ha tratado de favorecer en los alumnos ciertas actitudes, hay que tener en cuenta que estas se modifican lentamente y que a corto plazo el cambio es casi inapreciable. Esta autora afirma que para que la evaluación sea un elemento constructivo dentro del diseño del proceso educativo es necesario que además de utilizar instrumentos de valoración de los procesos y progresos, ésta vaya acompañada de un clima en el aula que ayude a los alumnos a expresarse con libertad, a desinhibirse, a escribir en sus hojas lo que están pensando, sin miedo a cometer errores o a correr el riesgo de emprender caminos que no saben si les llevarán a la solución.

Callejo (1996) concluye que la evaluación de los procesos y progresos de los estudiantes resulta difícil por la propia recogida de análisis de datos así como por la experiencia y el tiempo que exige al profesor. Si ello supone un cambio en el método de evaluación de los problemas, enfatiza que a la dificultad observada hay que añadirle la influencia de las creencias y concepciones sobre la evaluación tanto de los alumnos como de los profesores son difíciles de cambiar.

En la línea de Callejo (1996), y atendiendo los factores que influyen en el proceso de resolver un problema, Carrillo y Guevara (1996) destacan la necesidad de investigar sobre aspectos como la actitud ante los problemas, la confianza en sí mismos, la organización el conocimiento, las características tácticas del proceso (eficacia de la acción) y las características reguladoras del propio proceso de resolución de problemas (control de la acción). Por ello, sugiere el desarrollo de un instrumento global para evaluar la resolución de problemas basado en las características personales de los alumnos, la

eficacia de las acciones que desarrollan los alumnos (a las que se refiere como características tácticas del proceso) así como al control que toman sobre sus acciones (que recogen como características reguladoras del proceso) que describen de acuerdo con los ítemes que se recogen en la tabla 12. Esos ítemes deben de ser adecuados en función de lo que se pretende evaluar, las características de los alumnos y del profesor en cuestión, así como la gestión del aula que se pretende o la clase que lleva a cabo.

Tabla 12. Instrumento de evaluación global para evaluar la resolución de problemas propuesto por Carrillo y Guevara (1996)

<p>C1. CARACTERÍSTICAS PERSONALES</p> <p>C.1.1 Repercusión en su comportamiento del hecho de ser observado.</p> <p>C.1.2 Actitud ante los problemas cotidianos.</p> <p>C.1.3 Hábito de enfrentarse a problemas matemáticos.</p> <p>C.1.4 Actitud usual en la resolución de problemas</p> <p> C1.4.1 Predisposición</p> <p> C1.4.2 Confianza en sí mismo.</p> <p>C.1.5 Organización del conocimiento. Capacitación matemática para la resolución de problemas.</p>
<p>C2. CARACTERÍSTICAS TÁCTICAS DEL PROCESO (EFICACIA DE LA ACCIÓN)</p> <p>C2.1. Obtención de una representación significativa.</p> <p>C2.2. Eficacia y adecuación de la planificación.</p> <p>C2.3. Eficacia y adecuación de la ejecución.</p> <p>C.2.4 Eficacia en el empleo de la revisión.</p> <p>C.2.5 Nivel de acabado de la solución.</p>
<p>C3. CARACTERÍSTICAS REGULADORAS DEL PROCESO (CONTROL DE LA ACCIÓN)</p> <p>C3.1. Importancia otorgada a la obtención de una representación significativa.</p> <p>C3.2. Importancia otorgada a la obtención de una buena planificación.</p> <p>C3.3. Importancia otorgada a la explicitación del estado de la ejecución.</p> <p>C3.4. Coherencia y control del proceso. (Incluye el control del progreso hacia las metas establecidas, el tipo de decisiones de control y la importancia otorgada al control del proceso).</p> <p>C3.5. Organización temporal.</p> <p>C3.6. Conocimiento metacognitivo de tipo general (incluye el conocimiento de estrategias de resolución de problemas y las características que se le supone a un experto en la misma).</p>

2.2.4.7 Instrumentos para una evaluación por competencias.

Como ya se ha mencionado, la evaluación tiene una función reguladora de todo el proceso de aprendizaje. Por un lado debe permitir decidir y adaptar las estrategias pedagógicas a

las características de los estudiantes al mismo tiempo que constatar su progreso a medida que avanzan en los aprendizajes. (Sanmartí, 2007). Atendiendo además el objetivo que los alumnos aprendan a aprender por sí mismos, se hace imprescindible buscar modos que permitan constatar dicho progreso al mismo tiempo que permitan compartirlo con los alumnos.

Para alcanzar las dos finalidades de la evaluación reguladora y formativa, es importante contar con información de distinta naturaleza y por ello será necesario y de gran utilidad disponer de diferentes instrumentos de evaluación y técnicas pedagógicas distintas. (Sanmartí, 2010; Lester y Kroll, 1991). Para una evaluación de la educación matemática, Lester y Kroll (1991) identifican la utilidad de algunas de ellas y que se comentan a continuación.

Estos dos autores destacan, entre otros, la utilidad de cuatro estrategias para la evaluación de la educación matemática: (1) observar y cuestionar a los alumnos, (2) valorar el trabajo (de matemáticas) de los alumnos, (3) usar la escritura de los alumnos para la evaluación, y (4) valorar el trabajo de los alumnos a través de portafolios individuales. Para valorar los trabajos por estudio de los estudiantes en matemáticas, distingue dos formas: la analítica, que relacionaría con la formativa, y la holística, con la acreditativa o calificadora. En este sentido, la analítica es la que ofrece ideas sobre el pensamiento de los estudiantes y son más útiles cuando es apropiado dar a los estudiantes retroalimentación sobre su desempeño en categorías claves asociadas con la resolución de problemas matemáticos; cuando es deseable tener información sobre las fortalezas y debilidades de los estudiantes, o cuando es importante identificar aspectos específicos de las matemáticas que pueden requerir un tiempo adicional de instrucción. Por otro lado, los métodos holísticos, a diferencia de la puntuación analítica – que produce varias puntuaciones numéricas para cada problema, cada una de ellas asociada con un aspecto

diferente del trabajo de resolución de problemas –, produce un solo número asignado de acuerdo con criterios específicos relacionados con los procesos de pensamiento involucrados en la resolución de un problema en particular.

Para poder evaluar el grado de desarrollo de una competencia o de alguna de sus componentes, Sanmartí (2007), explica que la tendencia más actual de llevarlo a cabo recae sobre el hecho de explicitar determinados criterios e indicadores referidos a diferentes niveles de realización de las tareas que proponen para evaluar. Para ello, la misma Sanmartí (2007) o el mismo Tobón (2010) afirman que una de las propuestas más actuales y que se ve más adecuada para poder organizar esta valoración se concreta en la planificación de matrices de valoración, conocidas como rúbricas e incluso de manera más específica, rúbricas de desempeño.

Así pues, me referiré a la rúbrica y a la rejilla de orientación como instrumentos de carácter formativo centradas en los objetivos de aprendizaje, por lo que permiten la regulación del aprendizaje:

Rúbricas

En el contexto educativo, una rúbrica (*rubric* en inglés), también llamada matriz de valoración, es un conjunto de criterios o de parámetros desde los cuales se juzgan, valoran, califican y conceptúan determinados componentes del proceso educativo (contenido curricular, trabajo escrito, proyecto, exposición oral, resolución de problemas, etc). (Cano, 2012). Las rúbricas también pueden ser entendidas como pautas que permiten aunar criterios, niveles de logro y descriptores cuando se trata de juzgar o evaluar un aspecto del proceso educativo.

Según Díaz Barriga (2005), las rúbricas son guías, plantillas o escalas de evaluación donde se establecen niveles progresivos de dominio relativo al desempeño que una persona o un colectivo muestran respecto de un proceso de terminado. También se

puede decir que a través de las rúbricas se muestra un amplio rango de criterios que cualifican de modo progresivo el tránsito de un aprendizaje incipiente o insuficiente al grado de suficiencia y de alto nivel.

Para Cano (2012):

Una rúbrica es una descripción de los criterios empleados para valorar o emitir un juicio sobre la trayectoria y ejecución de los estudiantes, en un trabajo o proyecto. También decir que una rúbrica es una matriz que puede explicarse como un listado del conjunto de criterios específicos y fundamentales que permiten valorar el aprendizaje, los conocimientos o las competencias logradas por el estudiante en un trabajo, proyecto o materia particular. (p67).

Existen pues dos tipos de rúbricas: holísticas y analíticas. En la rúbrica holística o también llamada comprensiva, el profesor evalúa la totalidad del proceso o producto sin juzgar por separado las partes que lo componen. En la analítica, el profesor evalúa inicialmente, por separado, las diferentes partes del producto o desempeño y luego suma el puntaje para obtener una valoración total.

En la rúbrica holística lo que interesa es la calidad, dominio o comprensión general tanto del contenido específico como de las habilidades que incluye la evaluación en proceso global, mientras que en las analíticas se solicitan respuestas más concretas y habilidades específicas. Estas últimas pueden ofrecer mucha retroalimentación y posibilidad de mejorar las respuestas, con la ayuda del profesor. En este sentido, las rúbricas analíticas promueven una evaluación continua y por tanto formativa.

De acuerdo con la literatura consultada, toda matriz o tabla de doble entrada que estructura una rúbrica debería incluir y especificar los tres campos siguientes:

Dimensiones: componentes que constituyen el marco de la evaluación del desarrollo de la actividad que se llevará a cabo.

Niveles de desempeño: categorías, en forma de gradación. Definen la calidad del trabajo desarrollado.

Descriptores: breves explicaciones de las evidencias que permiten juzgar o valorar la tarea particular realizada a lo largo de las diferentes dimensiones o criterios establecidos y que están asignados a un nivel de desempeño concreto.

De ahí que, estructuralmente, una rúbrica se conciba como una matriz de doble entrada en la que detalla, por una parte, los criterios de realización relacionados con la evaluación de la competencia (o de alguno de sus componentes) y, por otro, los criterios correspondientes a los diferentes niveles de logro que se concretan en indicadores relacionados de manera específica con la tarea de evaluación (Sanmartí, 2007).

La etiqueta que se adscribe a cada nivel de desempeño, puede variar y su elección depende del contexto del uso de la rúbrica y los objetivos de la evaluación que se pretendan. Pueden ser etiquetados de manera cuantitativa o cualitativa, resultando la clasificación cualitativa más flexible y creativa que la cuantitativa. (Mertler, 2000). En una clasificación de cuatro niveles de adquisición, que es bastante común, nivel 1, nivel 2, nivel 3 y nivel 4 suelen ser las etiquetas a nivel cuantitativo. En el caso cualitativo, suelen referirse al nivel de: máster, experto, aprendiz y novel. Otros conjuntos de etiquetas por niveles, pueden ser (Blanco Blanco, 2008)

3 niveles:

Avanzado, intermedio e inicial

Altamente, parcialmente, no competente

Niveles alto, medio y bajo de dominio

5 niveles: profesional, adecuado, necesita mejorar, insuficiente o inadecuado.

Además, toda rúbrica debe estar identificada por un título, encargado de especificar explícitamente el objetivo que se pretende con su aplicación ella y al mismo tiempo que ir acompañada de una breve descripción de las instrucciones de su uso. (Blanco Blanco, 2008).

En las rúbricas con enfoque socioformativo propuestas por Tobón et al., (2010), a fin de evaluar el proceso de desarrollo de las competencias, se han establecido niveles de desarrollo o de dominio que permiten conocer los logros en el aprendizaje durante un módulo determinado, en la parte intermedia y al final de un ciclo. En la tabla 11 se presenta un modelo de cuatro niveles de dominio, en el cual se enfatiza el paso de un desempeño receptivo a un nivel creativo, innovador y estratégico.

Tabla 13. Niveles de dominio de las competencias

Nivel	Características (una o varias)	Ejemplo: gestión de proyectos de investigación
I. Inicial-receptivo	Recepción de información Desempeño muy básico y operativo. Baja autonomía. Se tienen nociones sobre la realidad.	Recibe y proceso información científica. Tiene algunas nociones de la investigación. Requiere supervisión y asesoría de forma continua. Hace labores muy operativas en proyectos de investigación.
II. Básico	Se resuelven problemas sencillos de contextos. Hay labores de asistencia a otras personas. Se tienen algunos elementos técnicos de os procesos implicados en la competencia. Se poseen algunos conceptos básicos.	Planea, ejecuta y evalúa un proyecto de investigación para abordar un problema sencillo de la realidad, con los elementos más básicos y con asesoría. Tiene el concepto de investigación. Le motiva investigar como parte del ejercicio profesional.
III. Autónomo	Hay autonomía en el desempeño (no se requiere asesoría de otras personas). Se gestionan proyectos y recursos. Hay argumentación científica.	Realiza proyectos de investigación con autonomía. Gestiona recursos para un proyecto de investigación. Argumenta científicamente los recursos de una investigación.

	Se resuelven problemas de diversa índole con los elementos necesarios.	Muestra perseverancia por lograr los resultados importantes en la investigación.
IV. Estratégico	Se plantean estrategias de cambio en la realidad. Hay creatividad e innovación. Hay altos niveles de impacto en la realidad. Se resuelven problemas con análisis prospectivo y/o histórico.	Demuestra un alto compromiso con la investigación científica. Publica artículos en revistas indexadas. Evidencia creatividad e innovación en la investigación científica.

Fuente: (Tobón Tobón, Pimienta Prieto, & García Fraile, 2010)

En cuanto a la educación matemática, encontramos referencias al uso positivo de las rúbricas. Ejemplo son las propuestas de Danielson y Marquez (2014) para la evaluación de actividades matemáticas en distintas etapas de la educación. En particular, se ha observado como el uso de una rúbrica puede ser un instrumento apropiado para examinar la habilidad de los estudiantes para resolver problemas, pues amplía la posibilidad de evaluar el conocimiento y uso por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos que posee, así como los procedimientos y procesos que aplican y su disposición hacia las matemáticas.

Bases de orientación

Tal como ya se ha comentado anteriormente, el enfoque por competencias de la educación persigue que los estudiantes aprendan a aprender. De acuerdo con ello, el objetivo de cualquier proceso de enseñanza basado en competencias es que cada uno de los alumnos sea capaz, cuando se encuentre ante un nuevo problema que exija aplicar los conocimientos aprendidos, de anticipar y planificar las acciones necesarias para resolverlo. (Sanmartí, 2007).

Cada persona tiene un sistema personal de aprender que construye progresivamente a lo largo de los años (Jorba & Sanmartí, 2008). En este trabajo se comenta que es posible enseñar para ayudar a los alumnos en la construcción de este sistema personal de aprender. Para ello es necesario incidir en la autorregulación por parte

de los propios alumnos, entendiendo la autorregulación como la representación de las propias capacidades y formas de aprender. Para ello, tres hechos son fundamentales. (Jorba & Sanmartí, 2008):

- El conocimiento de los objetivos de aprendizaje y la comprobación de la representación que se hace de ellos.
- El dominio de las operaciones de anticipación y planificación de la acción.
- La apropiación de los criterios e instrumentos de evaluación.

Para lograr este objetivo es necesario planificar actividades de carácter simple y concreto, lo que más manipulativas posible y que estén cerca de los intereses y de las vivencias personales de los alumnos. Su objetivo debe ser doble: situar a los alumnos en los contenidos de los que se pretende el estudio y que cada alumno pueda hacerse una primera representación de lo que se quiere conseguir con el ciclo de aprendizaje propuesto. (Jorba & Sanmartí, 2008).

En ese sentido, Sanmartí (2010) propone instrumentos ideados para evaluar y regular la capacidad de anticipar y planificar, como son las bases de orientación, llamadas también “guías de navegación” o “cartas de estudio”, cuyo objetivo es el de orientar a los alumnos en la tarea que pretenden desempeñar. Así pues, una base de orientación se puede entender como aquel instrumento que resume de manera ordenada las acciones a realizar para alcanzar una tarea escolar, con el fin de promover que los alumnos anticipen y planifiquen por sí mismos las acciones que deben llevar a cabo para resolverla con éxito, participando así en una regulación del aprendizaje del alumno por sí mismo. (Sanmartí, 2010).

Sanmartí (2010) recomienda que para que los alumnos puedan interpretarla como algo más que una colección ordenada de instrucciones al mismo tiempo que la puedan percibir como una herramienta útil, es conveniente promover su construcción de manera

que cada alumno elabore su propia, animándolos para que sus bases sean lo más sintéticas posibles, ya que esto favorece su almacenamiento en la memoria, teniendo sentido para ellos.

Las bases de orientación resumen el conocimiento que los estudiantes deberán interiorizar para poderlas activar en otro momento que les puedan ser necesarias. Para ello la evaluación de la calidad de estas bases de orientación se convierte en un objetivo prioritario del proceso de aprendizaje (Sanmartí, 2010). En consecuencia, se puede transferir la estructura de la rúbrica en bases de orientación, convirtiéndolos así en instrumentos reguladores del proceso de enseñanza y del autoaprendizaje por parte de los propios alumnos.

En esta investigación se tienen en cuenta como referencia para la elaboración de la una rejilla de orientación para la resolución de problemas los trabajos propuestos por Villalonga Pons (2017) en su tesis doctoral y el de Iriarte Pupo y Sierra Pineda (2011) en su tesis sobre estrategias metacognitivas en la resolución de problemas. Esta rejilla como asegura Sanmartí (2010) contiene algunos de los elementos de la rúbrica, pero de una manera más intelegible para el alumno.

2.2.5 Modelos desde la didáctica para la resolución de problemas matemáticos

Para efectos de esta investigación la resolución de problemas se toma como competencia, la definida como un proceso que implica la realización de una secuencia o serie de acciones para la obtención de una respuesta adecuada a una dificultad con intención de ser resuelta. En esta situación el sujeto o resolutor pone de manifiesto conocimientos, habilidades, capacidades, motivaciones, afectividades, de tipo cognitivo y metacognitivo. Este proceso, se descompone en diferentes pasos o acciones progresivas que deben ser desarrolladas de manera integral en busca de encontrar dicha solución.

Desde este punto de vista fue necesario repasar algunos modelos que se han desarrollado en busca de mejorar la competencia para resolver problemas matemáticos.

2.2.5.1 Modelo de Polya.

El modelo de (Polya, 1965), consta de cuatro fases o pasos que se consideran fundamentales para cimentar algunos puntos del presente estudio. Esto debido a que la mayor parte, sino todos, los modelos de resolución de problemas se derivan a partir de este trabajo. Los cuatro pasos expuestas por este autor son:

- Comprensión del problema.
- Concepción de un plan.
- Ejecución del plan.
- Visión retrospectiva.

El modelo de Polya se enfoca en la solución de problemas matemáticos en un ámbito donde el estudiante piensa, reflexiona y recorre el camino utilizado muchas veces, antes de dar una posible solución. Según Polya (1965), cuando se resuelven problemas, a la vez se están creando habilidades posteriores para enfrentar y resolver cualquier tipo de problema matemático. A continuación se presenta un resumen de cada uno de los pasos del modelo de Polya.

Paso 1. Comprensión del problema. El estudiante debe comprender el problema y desear resolverlo, para ello debe leer, explorar el texto y entender cada una de las relaciones expuestas en la información proporcionada para separar las partes principales del problema: la incógnita, los datos y la condición. En este sentido, es útil plantearle al estudiantes algunas preguntas, que al responderlas le permitan comprender el problema.

- ¿Entiendes todo lo que dice?
- ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
- ¿Cuál es la incógnita?

- ¿Distingues cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?
- ¿Sabes a qué quieres llegar?
- ¿Hay suficiente información?
- ¿Hay información extraña?
- ¿Es este problema similar a alguno otro que hayas resuelto antes?

Paso 2. Concepción de un plan. De la comprensión del problema a la concepción del plan el camino puede ser largo. El estudiante puede hacer varios ensayos para concebir un plan. Una vez el estudiante haya comprendido el problema es necesario utilizar diversas estrategias para encontrar la respuesta al problema. Se busca entonces, relacionar y encontrar conexiones entre cada uno de los datos del problema y la incógnita. Se elabora un plan o estrategia para resolver el problema, se eligen por ejemplo las operaciones e indica el orden en que se deben realizar. El estudiante podría utilizar diferentes tipos de estrategias, tales como:

- Ensayo y error (conjeturar y probar la conjetura)
- Usar una variable
- Buscar un patrón
- Hacer una lista
- Resolver un problema similar más simple.
- Hacer una figura.
- Hacer un diagrama.
- Usar razonamiento directo o indirecto de cómo se piensa que se podría resolver el problema.
- Trabajar hacia atrás.
- Usar casos.

- Identificar submetas.
- Buscar una fórmula.
- Resolver una ecuación.

Paso 3. Ejecución de un plan. El estudiante ejecuta el plan de elaborado, verifica los pasos y los resultados. Aplica los métodos establecidos en la concepción tales como resolver operaciones en el orden establecido, completar gráficas, tablas, diagramas, entre otros. En caso de no llegar al resultado correcto deberá volver a empezar con iguales o nuevas estrategias que conduzcan a la resolución del problema con éxito. En este paso Polya propone:

- Implementar la o las estrategias escogidas hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción sugiera tomar un nuevo curso.
- Concederse un tiempo razonable para resolver el problema. Si no se tiene éxito, solicitar una sugerencia o hacer el problema a un lado por un momento.
- No tener temor a volver a empezar. Suele suceder que un nuevo comienzo fresco o una nueva estrategia conduzcan al éxito.

Paso 4. Visión retrospectiva. Es el paso de revisión y verificación de los resultados obtenidos como solución del problema por parte del estudiante, no sólo en cuanto a la corrección del resultado sino también con relación a la posibilidad de usar otras estrategias diferentes de la seguida para llegar a la solución. En este paso se debe verificar la respuesta en el contexto del problema original e incluso hacer una generalización del problema. Algunas preguntas que se pueden responder en este paso son:

- ¿Es su solución correcta? ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema?
- ¿Advierte una solución más sencilla?
- ¿La solución se puede extender a un caso general?

La propuesta de Polya (1965) de ha sido adoptada por NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), el cual recomienda la resolución de problemas como base para el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000).

2.2.5.2 Modelo de Mayer

Mayer (2002) propone un modelo de solución de problemas en el que también se distinguen cuatro componentes: traducción del problema, integración del problema, planificación de la solución y supervisión, y ejecución de la solución.

Este modelo se ha generado a partir de la observación de los procedimientos seguidos por los alumnos mientras resuelven problemas, y de la comparación de esos procedimientos en alumnos con alta y baja eficiencia en la resolución de problemas. El modelo se plantea en términos operativos, ofreciéndose descripciones de marcado carácter procedimental en las que cada proceso trata de presentarse como una descripción de los procedimientos o de los procesos operativos que realiza un alumno mientras resuelve un problema.

La traducción del problema se refiere a la habilidad del resolutor para transformar las afirmaciones del enunciado del problema en una representación interna. Para Mayer, esta habilidad requiere de dos tipos de conocimientos: conocimiento lingüístico, y conocimiento semántico (conocimientos sobre los referentes reales a los que se refiere el problema).

El proceso de integración del problema hace referencia a la capacidad para integrar cada una de las afirmaciones del problema en una representación coherente de la información. Según Mayer, este proceso requiere de conocimiento esquemático, que hace referencia a la habilidad de los sujetos para reconocer diferentes tipos de problemas, y clasificarlos en tipologías preestablecidas. Este autor incluye en este proceso, además, la

capacidad para distinguir entre información relevante e información irrelevante para la solución del problema.

El tercer proceso identificado por Mayer, la planificación y supervisión del problema, hace referencia a la habilidad del resolutor para generar un plan mediante el planteamiento de objetivos y subobjetivos dentro del problema, y a la habilidad para supervisar o monitorizar los procedimientos mediante los que se sigue el plan. Mayer propone que el conocimiento necesario para la elaboración de planes es el conocimiento estratégico, que implica la capacidad para crear o aplicar estrategias que ayuden a resolver problemas.

Por último, el cuarto proceso de solución de problemas identificado por Mayer es la ejecución de la solución; la aplicación de las reglas de la aritmética siguiendo el plan anteriormente elaborado. Este proceso requiere de conocimiento procedimental, necesario para hacer efectivos los procedimientos que se han planificado en la fase anterior. La tabla 14 a continuación, trata de resumir el modelo de solución expuesto por Mayer (2002)

Tabla 14. Resumen del modelo Mayer

Componente	Tipo de conocimiento	Procesos realizados por el alumno
Traducción del problema	Conocimiento lingüístico	Comprensión lingüística del enunciado.
	Conocimiento semántico	Conocimiento sobre los referentes del problema
Integración del problema	Conocimiento esquemático	Adscripción del problema a una tipología preestablecida.
Planificación y supervisión del plan	Conocimiento estratégico	Generación de estrategias de solución. Monitoreo de aplicación de las estrategias.
Ejecución de la solución	Conocimiento procedimental.	Aplicación de reglas aritméticas.

Fuente: Tárraga (2008) adaptado de Mayer (2002)

2.2.5.3 Modelo de Schoenfeld.

Schoenfeld (1985) propone un marco de cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: 1) Recursos cognitivos: un conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor; 2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles; 3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles; y 4) Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajarla.

En este modelo se distinguen también cuatro fases: análisis, exploración, ejecución y comprobación. Schoenfeld profundiza en el análisis de la heurística, retomando algunas ideas de Polya.

A continuación se resumen cuatro dimensiones que según Schoenfeld se dan en el proceso de resolución de problemas:

- Dominio de conocimientos y recursos: se expresa a través de lo que el resolutor conoce y la forma de aplicación de sus experiencias y conocimientos ante la resolución de un problema.
- Estrategias cognoscitivas: conjunto de estrategias generales que pueden resultar eficaces a la hora de resolver un problema. Dentro de estas se consideran los recursos heurísticos para problemas en matemática, tales como: analogía, inducción, generalización, entre otros.
- Estrategias metacognitivas: se caracteriza por la toma de conciencia mental de las estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo.
- Sistema de creencias: están conformado por las ideas, concepciones o patrones que se tiene en relación con la matemática y la naturaleza de esta disciplina.

El trabajo de Schoenfeld es uno de los más completos en relación al análisis de la resolución de problemas matemáticos.

2.2.5.4 Modelo de Mason – Burton – Stacey.

El modelo de Jonh Mason, Leone Burton y Kaye Stacey que aparece publicado en el texto pensar matemáticamente (1989), se fundamenta en las siguientes razones:

- El tránsito entre las fases de trabajo con el problema no se realiza de forma lineal.
- La resolución de problemas se concibe como un proceso dialéctico, donde las tareas pueden avanzar o retroceder.
- Las características psicológicas del resolutor son un recurso más en el logro del objetivo.

En comparación con los modelos de resolución anteriores, este modelo no presenta una estructura a seguir.

2.2.5.5 Modelo de Miguel de Guzmán.

El modelo de Miguel de Guzmán (1991), sobre las cuatro fases de Polya, orienta y anima al resolutor en los siguientes aspectos: familiarízate con el problema. Luego, pasa a la búsqueda de estrategias. Seguidamente, el resolutor debe llevar a cabo la estrategia planeada, evaluándola a través de preguntas guía. Finalmente se llega al proceso de revisión y de establecimiento de conclusiones, preguntándose, ¿cómo se ha llegado a la solución? O bien, ¿por qué no se llegó?, tratando de entender no solo que la estrategia seguida funcionó, sino por qué funciona.

De Guzmán retoma completamente el modelo de Polya e intenta dar orientaciones específicas sobre el cómo se lleva a cabo cada una de ellas y para esto propone preguntas orientadoras.

2.2.5.6 Modelo Pifarré Manoli y Sanuy Jaume.

Estos autores plantean cinco fases o estrategias generales para resolver un problema.

Fase 1. Entender el problema.

Fase 2. Planificar un plan de resolución.

Fase 3. Organizar los datos y el plan de resolución en un cuadro de doble entrada.

Fase 4. Resolver el problema.

Fase 5. Evaluar el proceso de resolución del problema y el resultado obtenido.

Citando a Cañadas Santiago, y otros (1999) existen modelos para la resolución de problemas que van más por el lado de lo matemático y las estrategia heurísticas (Polya, 1945; Schoenfel, 1985) y otros se acerca más a modelos psicológicos (Brandsford y Stein, 1986; Mason, Burton y Stacey, 1993). Estos autores resumen estos modelos así:

Tabla 15. Fases de resolución de problemas

Polya	Mason, Burton y Stacey	Brandsford y Stein (1993)	Miguel de Guzmán (1995)
Comprender el problema estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partidad.	Abordaje Comprender el problema Concebir un plan.	Identificación del problema. Definiciión y representación del problema. Exploración de posibles estrategias.	Familiaración con el problema. Búsqueda de estrategias
Idear un plan de actuación que permita conectanado los datos con la meta.	Ataque Llevar a cabo el plan Revisión Reflexión sobre el proceso seguido. Reflexión del plan.	Actuación, fundada en la estrategia. Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.	Llevar adelante la estrategia Revisar el proceso y sacar consecuencias.
Llevar a cabo el plan ideado previamente			
Mirar atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado			

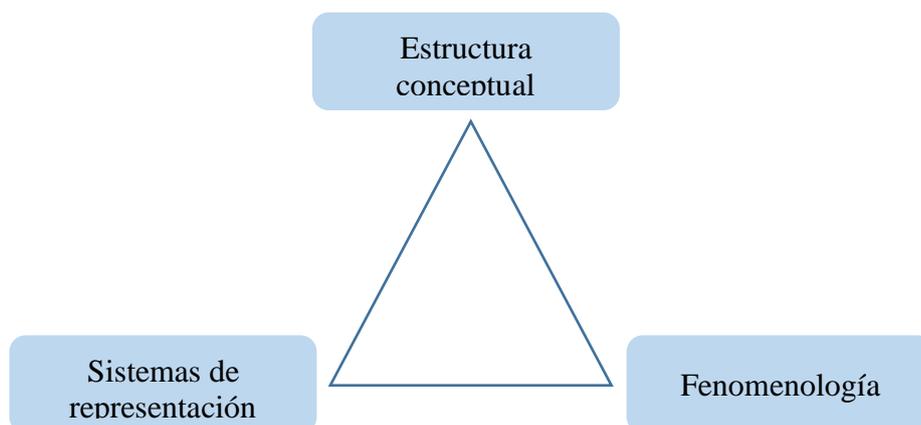
Fuente: (Cañadas Santiago, y otros, 1999)

2.3 Dimensión curricular y matemática

2.3.1 Objeto matemático de la investigación: razones y proporciones

Para realizar el acercamiento al objeto matemático razón y proporción me apoyo en el *análisis didáctico* de Gómez (2007). De esta tesis doctoral se retoma el análisis de contenido, con el fin de identificar, organizar y seleccionar los significados de este tópico dentro del contenido de las matemáticas escolares, analizándolo desde tres dimensiones: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología; tal como se observa en la figura 10.

Figura 10. Dimensiones que constituyen el significado del objeto matemático razón y proporción.



Básicamente las tres dimensiones, se caracterizan por:

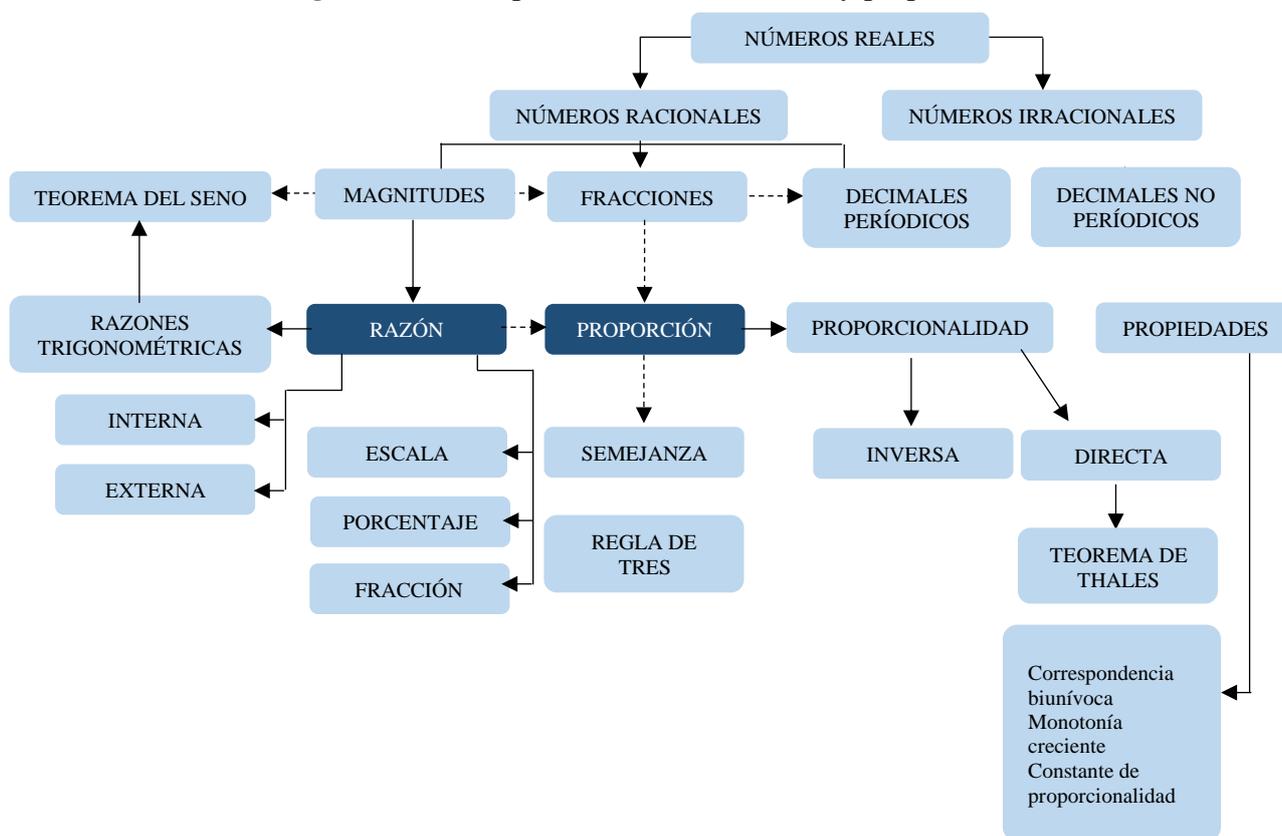
Estructura conceptual: identifica los conceptos y procedimientos que caracterizan la razón y proporción y las relaciones entre ellos.

Sistemas de representación: establece los sistemas de representación asociados a la razón y proporción y las relaciones entre ellos.

Fenomenología: identificar los fenómenos que dan sentido a la razón y proporción y los contextos, las subestructuras y las situaciones que permiten organizar dichos fenómenos.

En cuanto a la estructura conceptual, es de resaltar, que alrededor de un concepto matemático (con el de razón y proporción), se configuran conceptos matemáticos asociados. Esto se pone de manifiesto en la figura 11.

Figura 11. Conceptos asociados a la razón y proporción



Los conceptos, son entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal, entre los cuales tenemos:

- Razón y proporción.
- Magnitudes correlacionadas (directamente proporcionales).
- Obtención de la relación de proporcionalidad entre segmentos.
- Aplicación del teorema de Thales en la resolución de distintos problemas geométricos.
- Utilización de los criterios de semejanza de triángulos en distintos contextos para resolver problemas.
- Razón de dos segmentos.

- Segmentos proporcionales.

Los procedimientos, son técnicas, operaciones y algoritmos.

- Identificación de magnitudes directamente proporcionales.
- Construcción de tablas de proporcionalidad directa.

2.3.1.1 Estructura conceptual.

El concepto matemático de razón.

Una de las situaciones más frecuentes en todos los tiempos ha sido, sin duda, la de relacionar dos cantidades. En particular, al relacionarlas mediante la sustracción y la división, estamos comparándolas.

Hay pues, dos tipos de comparaciones entre magnitudes: las que permiten averiguar cuál es la mayor calculando la diferencia entre ambas, o bien, calculando cuántas veces la mayor contiene a la menor. En la primera situación se habla de comparaciones o relaciones aditivas, mientras que en la segunda, de relaciones multiplicativas. En este último caso se ubica la razón, siendo esta una relación multiplicativa entre dos magnitudes o cantidades de magnitud.

Godino, Bantanero y Roa (2002) presentan las definiciones de magnitud y cantidad de magnitud en el diccionario de M. Molinier:

“Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad, la luminosidad... cantidad de magnitud es el aspecto por el que se diferencia entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar”.

Otra de las acepciones encontradas acerca de magnitud, la interpreta como “un conjunto sobre el cual se puede definir un álgebra. Una magnitud es un conjunto sobre el

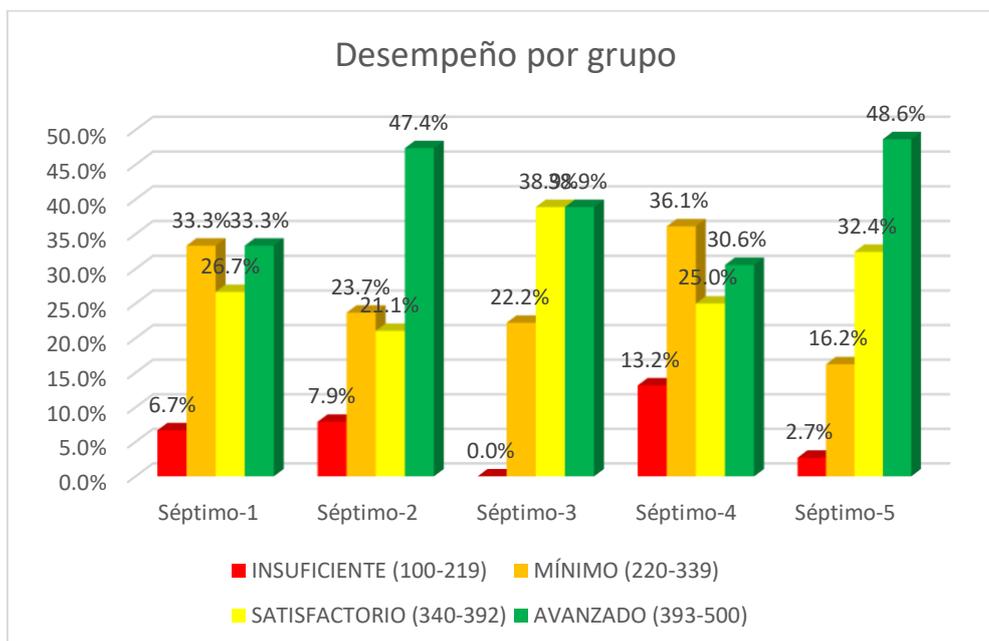
cual, a partir de una relación de equivalencia, se definen clases de equivalencia (cada clase de equivalencia es una cantidad de magnitud), y sobre estas clases de equivalencia se define un orden y una ley de composición interna. Posteriormente, sobre la definición de una métrica (una función medida), se establece una ley de correspondencia que asigna a cada clase de equivalencia un único número real (bajo la respectiva función medida). Por su parte, el concepto de cantidad se toma en un sentido más general que el de magnitud. Si se quiere, se puede asumir una cantidad como una propiedad, característica medible sobre un fenómeno, con respecto a la cual se puede ordenar, contar o medir, y sobre la cual, en general, en el sentido amplio, no se requiere el recurso a los números. En particular, los números y las magnitudes son cantidades”. (Obando, et al 2009).

Freudenthal (1983), designa a las razones como entidades numéricas vinculadas a las proporciones y hace referencia al estatuto lógico de razón como una función de pares ordenados de números o valores de magnitud, marco en el que tienen una relación de equivalencia. Señala que en la enseñanza es preciso tomar en cuenta a las razones internas y a las razones externas, definiendo a las primeras como relaciones establecidas entre distintos valores de la misma magnitud y a las segundas, como relaciones entre valores de diferentes magnitudes.

Razones o fracciones.

En las matemáticas escolares siempre se ha tenido la confusión de si una fracción es una razón y/o si una razón pertenece a la estructura de los números racionales. A propósito de esto Godino y Batanero (2002), mediante los siguientes ejemplos aclaran estas dificultades.

El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes medibles, cada una con sus respectivas unidades, implican las siguientes diferencias con las fracciones:

Gráfico:**2.3.1.3 Fenomenología de la razón y proporción.**

El término fenomenología en el contexto matemático de la didáctica de la matemática se hereda de la contraposición filosófica de los términos *noúmeno* y *fenómeno*. Tal contraposición, propia de la reflexión filosófica, la establece Freudenthal en las matemáticas, entre los objetos matemáticos constituidos en conceptos que serían noúmenos y las situaciones que estos objetos matemáticos organizan, que sería los fenómenos. (Puig, 1997).

En este sentido, Puig interpretando el trabajo de Freudenthal, concibe que los objetos matemáticos son medios de organización de situaciones en diversos contextos y la relación que existe entre ellos, la denomina análisis fenomenológico. También afirma que cuando se presta atención a la relación entre el objeto matemático y los fenómenos que tienen en este como medio de organización en el proceso de enseñanza y aprendizaje se denomina fenomenología didáctica; es decir, cuando los fenómenos que se toman en consideración en la enseñanza y aprendizaje de un tópico matemático son los que están presentes en el mundo y contexto en que viven los alumnos del sistema escolar. Desde

este tópico matemático, una visión fenomenológica de la razón y proporción, desde el punto de vista de didáctico, nos conduce a la diversidad de usos y significados, tanto en el mundo escolar como en el mundo real, manifiesta la potencialidad del concepto en diversos contextos y situaciones y, en consecuencia, nos conduce a diferentes interpretaciones del objeto matemático analizado, como también, nos permite hacer hipótesis sobre determinados objetos mentales precursores en la constitución de la razón, proporción y proporcionalidad. De esta manera el análisis fenomenológico se convierte en una ayuda para la planificación, y organización de secuencias didácticas que conllevan a un aprendizaje significativo.

Desde esta perspectiva, la razón y proporción en su gran riqueza de uso presentan una multiplicidad de fenómenos para los cuales estos son el medio de organización y generalización. Para el caso específico de esta investigación se tomará la fenomenología en la cotidianidad, y en la matemática misma; de una manera muy sintetizada señalaré algunos de estos fenómenos.

En la cotidianidad.

Corresponde a la descripción de los fenómenos de la cotidianidad, entendidos como actividades o prácticas sociales comunes y corrientes, par a los que el concepto de razón es el medio de organización y generalización. Antonio Oller en un estudio de la proporcionalidad aritmética plantea que muestras de la gran importancia práctica cotidiana de la razón y proporción son los vestigios de su uso en los textos matemáticos más antiguos que presentan problemas relacionados con: intercambios (de mercancías, compra-ventas, y cambios de divisas); con repartos; con préstamos; con mezclas y aleaciones.

A continuación se muestra un ejemplo relacionado con mercancías:

Un supermercado utiliza las promociones como estrategias de mercadeo. En una de esas promociones, se presentan ofertas de tipo: pague dos y lleve tres, lo que nos muestra la razón entre el precio y cantidad.

$$\frac{\text{precio}}{\text{cantidad}} = \frac{\$12000}{3 \text{ vasos}}$$

En la matemática

Razón: se le denomina razón al cociente indicado entre dos magnitudes. Ejemplos: por cada 3 tazas de arroz se agregan 2 tazas de agua.

$$\text{Razón} = \frac{2 \text{ tazas de agua}}{3 \text{ tazas de arroz}}$$

Proporción: se denomina así, a la igualdad entre dos razones. Con relación a la razón anterior podemos deducir que si se conserva la misma razón entre el número de tazas de arroz y el número de tazas de agua, cuando se agreguen 9 tazas de arroz, será necesario agregar 6 tazas de agua.

$$\frac{2 \text{ tazas de agua}}{3 \text{ tazas de arroz}} = \frac{6 \text{ tazas de agua}}{9 \text{ tazas de arroz}}$$

Teorema de Thales

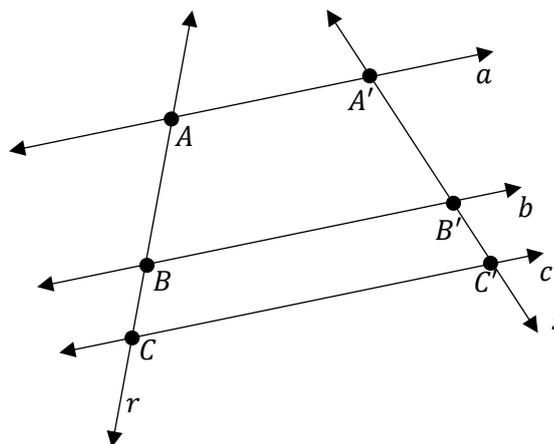
La noción de proporción viene asociada desde la antigüedad con la idea de precisar cuantitativamente la noción de semejanza, la cual bajo la forma del teorema de Thales (636 a 546 a de C.) tiene sus antecedentes en la de comparar cosas de la misma especie, es decir, de hallar sus razones o querer medir sus magnitudes. Es el caso por ejemplo de las longitudes, ya que dan un modelo para un tipo de magnitudes llamadas magnitudes lineales.

La magnitud longitud viene determinada definiendo la superposición, sobre las clases de segmentos iguales, la suma y la ordenación. El teorema de Thales nos permite

demostrar que existe una correspondencia biunívoca que conserva la suma y el orden de dichas magnitudes.

El *teorema de Thales* dice: si se traza un conjunto de rectas paralelas entre sí, a, b, c, \dots que cortan a otras dos rectas r y s , los segmentos que se determinan sobre r y s son proporcionales.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$



3. Metodología de la investigación

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos con los cuales es posible lograr el cumplimiento de los objetivos de la investigación.

3.1 Tipo de investigación

A fin de evaluar la estrategia de aprendizaje basado en un proyecto (ABP) mediado por las TIC, que favorece la movilización de la competencia planteamiento y resolución de problemas en torno al objeto matemático razones y proporciones, en los estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali, se eligió trabajar con el paradigma de investigación cualitativa, ya que se busca indagar por un fenómeno social dentro del contexto educativo.

En este sentido, la investigación cualitativa permite a través del diseño y la implementación de una propuesta didáctica basada en el ABP, hacer un análisis de los hechos vividos tanto por el docente como por el alumno, observando todas las

manifestaciones que se dan este proceso. Lo anterior, con el objetivo de encontrar sentido, conexión y relación entre los datos obtenidos, para así poder caracterizar el desarrollo de la competencia matemática PRP. En relación al paradigma de investigación cualitativo

Rodríguez y Valldeoriola (2008) afirman que la investigación cualitativa es una actividad que localiza al observador en el mundo. Las metodologías de este tipo de investigación, se orientan hacia la comprensión de situaciones únicas y particularidades, se centran en la búsqueda de significados y de sentido que les conceden a los hechos propios agentes, y en cómo viven y experimentan ciertos fenómenos o experiencias los individuos o los grupos sociales que investigamos. Estos autores afirman que tales planteamientos epistemológicos provienen del campo de la fenomenología y de la hermenéutica.

Sherman y Webb, (1988) citados por Hernandez Sampieri (2006) indican que una de las características de la investigación cualitativa es que esta se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados ni predeterminados completamente. Tal recolección consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos más bien subjetivos). También resultan de interés las interacciones entre individuos, grupos y colectividades. El investigador hace preguntas más abiertas, recaba datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, así como visual, los cuales describe, analiza y convierte en temas que vincula, y reconoce sus tendencias personales. Debido a ello, la preocupación directa del investigador se concentra en las vivencias de los participantes tal como fueron (o son) sentidas y experimentadas. (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010).

Como se ha mencionado, la investigación cualitativa responde a la búsqueda de situaciones que no son susceptibles de ser medidas ni comparables por medio de

parámetros numéricos. Como lo expresa Stake (1999), la característica más destacada de la investigación cualitativa es el énfasis en la interpretación; pues a partir de las observaciones y la confrontación con otros datos se obtienen las conclusiones. De ahí que la interpretación de las actuaciones y desempeños, como evidencias de la movilización (del avance) que realizan los estudiantes de sus saberes en procesos de planteamiento y resolución de problemas en el marco de la estrategia ABP con enfoque formativo, hacen parte del foco de interés del estudio.

Así pues, dentro de los diversos métodos de investigación cualitativa, el presente trabajo de investigación está orientado en un estudio de caso, que aunque según Rodríguez Gómez y Valdeoriola Roquet (2008), que aunque no es cualitativo por naturaleza, puede ser abordado desde diferentes perspectivas (analítica u holística, orgánica o cultural, o metodologías mixtas, entre otras), ya que su rasgo distintivo no son los métodos de investigación utilizados, sino su interés en un caso particular, o varios si se trata de casos múltiples. (Stake, 1999).

Rodríguez Gómez y Valdeoriola Roquet (2008) citando a Rodríguez, Gil y García (1999), consideran que “el estudio de caso implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de interés”.

Para el interés de este estudio, se trata de un caso único, por lo que según la clasificación que hace Stake (2005), se condiera un tipo de estudio de casos intrínseco, que aborda de forma intensiva una unidad, en este caso, un grupo de alumnos, que a pesar de sus diferencias constituyen una totalidad única.

3.2 Diseño metodológico

Para llevar a cabo la investigación con el método de estudio de casos, se realizó una serie de acciones organizadas en cuatro fases.

Figura 11. Fases del diseño de la investigación



Fuente: elaboración propia

Fase 1. Fase de diagnóstico: se diseñaron los instrumentos para la recolección de datos. Se implementó la prueba diagnóstico para identificar las necesidades formativas y de manera simultánea, se construyeron las categorías y subcategorías de análisis.

Fase 2. Fase de planificación: se realizó el diseño e implementación de la estrategia ABP con enfoque formativo.

Fase 3. Fase implementación y observación: se implementó la estrategia de ABP con enfoque formativo y se llevó a cabo la implementación de los instrumentos simultáneamente con el desarrollo del proyecto.

Fase 4. Fase de evaluación: de acuerdo con los datos recolectados, se realizó la reducción y análisis de los datos, mediante triangulación de los resultados. Se realizó la

evaluación del ABP y la caracterización de la competencia planteamiento y resolución de problemas, a partir de las rúbricas de evaluación, sustentadas en los diferentes niveles de dominio, que para esta investigación se basaron los aportados por Tobón et al. (2010), a saber:

- Preformal (ausente)
- Receptivo (inicial)
- Resolutivo (en proceso)
- Autónomo (esperado)
- Estratégico (destacado)

3.3 Población y muestra

La investigación se realiza en la sede central de la Institución Educativa Técnica Industrial José María Carbonell de Cali. Esta institución que hace parte de las 93 instituciones educativas oficiales del municipio de Santiago de Cali, está ubicada en su zona urbana, específicamente en la comuna 10 de la ciudad, barrio Colseguros.

En la actualidad cuenta con 90 docentes y alrededor de 1985 estudiantes entre sus tres sedes y jornadas, en su mayoría pertenecientes a familias de ingreso medio bajo y medio alto (estratos 2, 3 y 4). Para el desarrollo de esta investigación se saca provecho de los recursos tecnológicos con los que cuenta la institución gracias al programa EDPT Tit@⁷ financiado con recursos del SGR.

Se trata de una institución de carácter técnico industrial, con énfasis en sistemas, electricidad, electrónica y diseño gráfico. La IETI José María Carbonell se encuentra en categoría A+ según ISCE y es referente en la ciudad por su calidad educativa y su

⁷ El aula de clases de matemáticas cuenta con un videoprojector con marcadores interactivos, 32 dispositivos terminales o tipo PC con acceso permanente a Internet de fibra óptica.

experiencia exitosa con el proyecto de mediación escolar que se viene desarrollando desde mediados del 2007.

Es así como este estudio se lleva a cabo con estudiantes de grado séptimo, particularmente con uno de los cinco grupos. Para la participación en la investigación, se decidió trabajar con el grupo séptimo – 2, que cuenta con un total de 41 estudiantes (22 niños y 19 niñas), cuyas edades oscilan entre los 11 y los 13 años. La selección de este grupo, se debió a que se caracterizan por un marcado interés hacia el aprendizaje de las matemáticas y el destacado acompañamiento de los padres y madres de familia en el proceso de formación de sus hijos. El grupo 7-2 no presenta estudiantes con necesidades educativas especiales y existe cierta homogeneidad en los ritmos de aprendizaje, lo cual redundaba en una marcada participación activa. Desde el inicio del año lectivo, se pactaron unos acuerdos de convivencia que tuvieron en cuenta los intereses y elementos comportamentales propios de sus edades y que se han venido cumpliendo a cabalidad.

Así pues, como grupo focal se seleccionó una muestra de tres equipos de trabajo conformados cada uno por cuatro estudiantes. La muestra fue no probabilística (Stake, 1999) y se convino de acuerdo a los siguientes criterios:

- a) Equipos conformados dos estudiantes con nivel de desempeño mínimo o satisfactorio y dos con desempeño avanzado de acuerdo con los resultados de la prueba diagnóstica de inicio de año lectivo. Esta configuración tiene la intención de emular los perfiles cognitivos y actitudinales del grupo habitual, por lo que a pesar que se trata de un estudio de caso, las conclusiones que se extraigan, puede extrapolarse a contextos similares.
- b) Equipos conformados por estudiantes con buenas relaciones sociales.

Es importante indicar que los estudiantes no habían trabajado el contenido matemático de razones y proporciones, por lo que no conocían el algoritmo de la regla de

tres o de valor perdido. Esto sin duda fue muy importante a la hora de realizar una aproximación más natural hacia las proporciones.

La participación del docente en este estudio no sólo es en el papel de investigador, sino que se fundamenta en el rol de investigador participante, por cuanto además de ser profesor, orienta las diferentes discusiones presentadas en cada sesión de trabajo.

3.4 Técnicas para la recolección de la información

3.4.1 Categorías y subcategorías de análisis

La revisión bibliográfica junto con los datos provenientes de la aplicación de los diferentes instrumentos de recolección, permitió formular las siguientes categorías y sus respectivas subcategorías:

Tabla 16. Categorías y subcategorías de análisis

Categoría de análisis	Codificación	Subcategorías	Codificación
Competencia planteamiento y resolución de problemas	PRP	Comprensión del problema	CPR
		Diseño de un plan de acción	DPR
		Ejecución del plan de acción	EPR
		Revisión y mirada retrospectiva	RPR
		Disposición	DIS
		Persistencia	PER
Aprendizaje basado en proyectos	ABP	Aprendizaje colaborativo	APC
		Planeación del proyecto con ABP	PPA
		Rol del alumno en el ABP	RAL
		Rol del docente en el ABP	RDO
		Uso de las TIC en el aula	TIC
Razones y proporciones	RYP	Razones	RAZ
		Proporciones	PRO

3.4.2 Instrumentos

En la investigación cualitativa el investigador es fundamentalmente el instrumento de recolección de los datos, sin embargo, se utilizan métodos o técnicas para la obtención de los datos que aporta el estudio. Dado que toda investigación de carácter cualitativo produce un vasto conjunto de datos de diversa procedencia, es necesario realizar un proceso de recogida y reducción de los mismos antes de su análisis.

En este sentido y de acuerdo con el objetivo general de la presente investigación, que persigue evaluar el impacto la estrategia ABP en la movilización la competencia PRP (de aquí en adelante se entiende como planteamiento y resolución de problemas), se utilizaron los instrumentos mostrados en la tabla 17.

Tabla 17. Instrumentos de recolección de la información

Objetivo específico	Instrumento
1. Identificar las necesidades formativas de los estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali, relacionadas con la competencia matemática plantear y resolver problemas.	(1) Prueba diagnóstica
2. Diseñar e implementar un proyecto formativo mediado por las TIC, que movilice la resolución de problemas en torno a las razones y proporciones en estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali.	(2) Plan de área de matemáticas ajustada a los lineamientos curriculares del MEN, DBA y EBC
	(3) Plantilla de planeación del proyecto
	(4) Rejilla de orientación que permite al estudiante reflexionar sobre su proceso de resolución de problemas
	(5) Colección de problemas matemáticos y sus procesos de resolución.

3. Caracterizar la movilización de la competencia plantear y resolver problemas de los estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali en torno al objeto matemático razones y proporciones.	(6) Rúbrica para la valoración de la competencia
	(7) Matriz de seguimiento y valoración del producto final que permite determinar si los productos o evidencias parciales elaboradas y entregadas por los alumnos cumplen con los criterios de evaluación.
	(8) Rúbrica de autoevaluación con la cual el docente evalúa el proceso de elaboración del proyecto.
	(9) Diarios de aprendizaje del estudiante
	(10) Grabaciones Audio/Vídeo
	(11) Entrevista semiestructurada a los alumnos

Fuente: elaboración propia

A continuación se describe cada uno de los instrumentos utilizados en la presente investigación:

Prueba diagnóstica (anexo A): este instrumento se utilizó para identificar las necesidades formativas en estudiantes de grado séptimo, permitiendo recolectar información relacionada con la categoría competencia planteamiento y resolución de problemas (PRP). El diseño de este instrumento se hizo teniendo en cuenta los siguientes propósitos:

Indagar tanto los conocimientos como el saber matemático que tiene el estudiante sobre los componentes cualitativos y aspectos elementos de lo cuantitativo, en las relaciones proporcionales.

Indagar cómo el estudiante está procesando su pensamiento en torno a la cuantificación de las relaciones proporcionales.

En ese sentido, se elaboró un cuestionario de nueve (9) tareas que permitiera reconocer las necesidades formativas individuales y del grupo. Este cuestionario se dividió en dos bloques. El primero, estaba integrado por cinco tareas apoyadas en la apreciación cualitativa, mientras que el segundo, incluyó tareas de razón y proporción cuantificadas. En algunas tareas se utilizó la tabla como un modo de representación para el reconocimiento de razones externas o internas.

Plantilla de planeación del proyecto (anexo B): corresponde a la planeación del proyecto de clase ABP con enfoque formativo. En dicha plantilla se registran los aspectos generales del proyecto (Tobón Tobón, Pimienta Prieto, y García Fraile, 2010; Moursund, 1999), tales como: identificación del proyecto, competencias, actividades a realizar por parte del docente y por parte del alumno, criterios, evidencias y recursos.

Rejilla de orientación (anexo C): este instrumento es una adaptación de la base de orientación diseñada en la tesis doctoral: La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria (Villalonga Pons, 2017). Dicha base de orientación fue diseñada en esa tesis doctoral por un grupo de expertos como instrumento de autorregulación para el resolutor durante su proceso de resolución de problemas, a partir de las fuentes De Corte et al (2000, 2003); Mason (1982) y Polya (1945).

La rejilla de orientación sigue cada uno de los procesos de la rúbrica de valoración de la competencia, pero de una manera simplificada, de manera tal que le sirva al estudiante como elemento de autorregulación y de metacognición.

Cada una de las acciones que va llevando a cabo el estudiante durante el proceso de resolución, están reunidas en cinco bloques identificados como procesos:

- Comprender el problema
- Diseñar y ejecutar un plan de acción

- Revisar la tarea realizada
- Disposición
- Persistencia

Colección de problemas matemáticos (anexo D): corresponde al diseño o selección de doce (12) problemas, elegidos o diseñados pensando en que puedan promover en los estudiantes cierta motivación e investigación matemática. Cada uno de estos doce (12) problemas descritos en el anexo D, y cuya información se presenta en la tabla 18, se identificaron como Pb1; Pb2; Pb3;...; Pb12.

De acuerdo con las fuentes consultadas en esta investigación se entiende por problema matemático cualquier situación planteada por un conjunto de datos contextualizados que no puede ser resuelta de manera automatizada, sino que se requiere un enfrentamiento para el cual no se dispone de una respuesta inmediata o mecánica, por lo que dicha resolución podía aportar un aprendizaje significativo y contextualizado.

De estos doce (12) problemas, tres (3) correspondían al grupo de reproducción o problemas rutinarios (Pb1, Pb2 y Pb3), cuya finalidad, era afianzar los conceptos y procedimientos, así como dotar de recursos suficientes a la hora de enfrentarse con los problemas de mayor nivel de complejidad. Siete (7) problemas (Pb4, Pb5, Pb6, Pb8, Pb9, Pb10 y Pb11) pertenecen al grupo de conexión; mientras que a los problemas (Pb7) y al último problema o tarea central del proyecto (Pb12), se les asignó un nivel de complejidad de reflexión. (OCDE/PISA, 2003).

Tabla 18. Ficha de caracterización de problemas aplicados

ID	Fuente	Nivel de complejidad	Contexto	Nombre del problema	Característica del soporte	Modalidad de trabajo
Pb 1	Adaptación DBA V.2 MEN (2016)	Reproducción	Vida cotidiana	La limonada de Don Diego	Por escrito con imagen descriptiva	Individual

Pb 2	Adaptación MEN, Vamos a aprender matemáticas (2018)	Reproducción	Vida cotidiana	Compos de hamburguesas	Por escrito con imagen descriptiva	Grupal (Planteamiento)
Pb 3	Propia	Reproducción	Vida cotidiana	Una bebida del PAE	Por escrito con imagen descriptiva	Grupal
Pb 4	(Villalonga Pons, 2017)	Conexión	Matemático	La alfombra de soles y lunas	Por escrito con imagen ilustrativa	Grupal
Pb 5	(Valverde & Castro, 2006)	Conexión	Científico	Crecimiento de bacterias	Por escrito con tabla	Grupal
Pb 6	Propia	Conexión	Vida cotidiana	La cubierta de la cancha del colegio	Por escrito	Grupal
Pb 7	Propia	Reflexión	Vida cotidiana	Altura del árbol de mango del colegio	Por escrito	Grupal
Pb 8	Propia	Conexión	Vida cotidiana	Compra y venta de gomas	Por escrito	Grupal
Pb 9	Adaptación DBA V.2 MEN (2016)	Conexión	Vida cotidiana	Llaves abiertas	Por escrito	Grupal
Pb 10	Adaptación contenidos para aprender, MEN (2015)	Conexión	Vida cotidiana	El tanque averiado	Por escrito con imagen descriptiva	Grupal
Pb 11	Propia	Conexión	Vida cotidiana	Los ciclistas	Por escrito con imagen ilustrativa	Grupal
Pb 12	Propia	Reflexión	Vida cotidiana	¿Cuánta agua consumimos en el colegio?	Por escrito (abierto con condiciones y posibles recursos o materiales)	Grupal

Fuente: elaboración propia.

El problema (Pb12) se denomina “¿Cuánta agua consumimos en el colegio?”. Este corresponde al reto central del proyecto y se caracteriza por ser un problema relativamente

abierto y auténtico, pues consiste en que cada uno de los grupos de trabajo deberá calcular el consumo de agua en la institución y posteriormente proponer en uno de los apartados del sitio creado con *Sites de Google*, como producto final, posibles medidas de ahorro.

A pesar que estos problemas estaban asociados a un contenido, como es el de razones y proporciones, es decir, pertenecientes al pensamiento numérico-variacional, se pueden necesitar o requerir de conocimientos relacionados con otros tipos de pensamientos, atendiendo a la propuesta de los lineamientos curriculares de matemáticas. (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Rúbrica para la valoración de la competencia (anexo E): este instrumento se diseñó con base en el enfoque socioformativo de la competencia (Tobón Tobón, Pimienta Prieto, & García Fraile, 2010). Es importante destacar que este autor propone el uso de una rúbrica como instrumento para las secuencias didácticas, sin embargo, estas están diseñadas para competencias genéricas o generales y no para una competencia específica matemática, como es el caso de esta investigación, por tanto hubo la necesidad de adaptar un instrumento que permitiera asociar los procesos de la competencia matemática PRP con los tres componentes de la competencia (cognitivo, afectivo y de tendencia de acción) y los distintos niveles de dominio.

La rúbrica se ha generado de acuerdo con los procesos de resolución observados en mi experiencia docente y las fuentes sobre resolución de problemas y rúbricas consultadas. Se trata de una rúbrica analítica, a modo de doble entrada en la que se especifican los criterios que se evalúan de la resolución de problemas en cada proceso y una matización o gradación de acuerdo con los niveles de dominio.

Matriz de seguimiento y valoración del producto final (anexo F) es el instrumento que permitirá evaluar cada una de las evidencias o entregas parciales y el

producto final, de acuerdo con los criterios de calidad descritos en la plantilla de planeación del proyecto.

Rúbrica de autoevaluación (anexo G): este instrumento elaborado por la Fundación Gabriel Piedrahita Uribe permitió evaluar el proceso de gestión del proyecto por parte del docente.

Diarios de aprendizaje del estudiante

Grabaciones audio/video: a lo largo del desarrollo del proyecto se registró mediante filmación el momento en que los grupos de trabajo interactuaban a su interior. Las grabaciones de vídeo fueron realizadas con la colaboración de un colaborador y tenían el propósito de registrar cómo los estudiantes resolvían los problemas de tipo grupal.

Entrevista semiestructurada a los alumnos (anexo H): con el fin de recoger las percepciones de los alumnos, se realizó una entrevista de nueve (9) preguntas planteadas desde las categorías: aprendizaje basado en proyectos (ABP) y competencia planteamiento y resolución de problemas (PRP), con sus respectivas subcategorías. La entrevista tuvo dos momentos: un primer momento durante la fase de desarrollo del proyecto y otra al final del mismo. Estas fueron grabadas y posteriormente transcritas distinguiendo la voz del entrevistador (investigador, para este efecto se llamará D_Inv) y de los entrevistado (estudiante 1, 2, 3, 4...). Ejemplo:

D_Inv: ¿Qué tuvieron en cuenta a la hora de resolver un problema y qué creen que es lo más importante?

E6: Ehh, pues yo creo que lo más importante es comprender el problema y después el procedimiento.

En cuanto a las percepciones de los alumnos, se han identificado aquellas reflexiones o respuestas más parecidas y se han organizado según su semejanza. Debido a la gran cantidad de información obtenida en la entrevistas, fue necesario realizar una

reducción de la misma, dejando sólo datos relevantes, con el fin de relacionarlos e interpretarlos de acuerdo con las categorías y subcategorías de análisis.

4. Análisis de resultados

En este apartado se presenta el análisis cualitativo de los datos obtenidos en el presente estudio, a fin de poder evaluar la estrategia ABP con enfoque formativo, que favorece la movilización de la competencia PRP, en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Carbonell.

Este capítulo está organizado en cuatro apartados que guardan correspondencia con los objetivos específicos de la investigación, mientras que las categorías y subcategorías de análisis surgen de la revisión del marco teórico y la triangulación de la información obtenida.

4.1 Identificación de las necesidades formativas

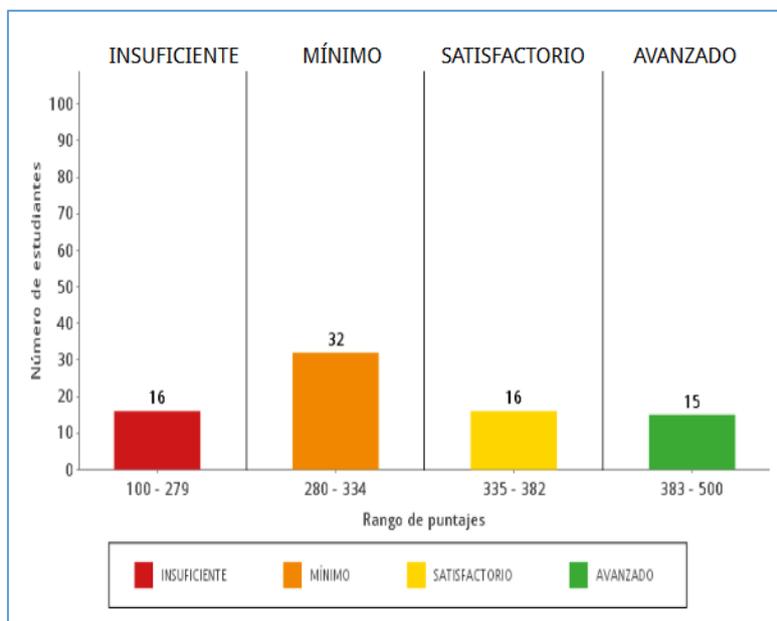
Para la identificación de las necesidades formativas se hace una lectura de algunos estudios realizados y que están relacionados específicamente con el objeto matemático razones y proporciones. Por otro lado, se tienen en cuenta los informes de pruebas Saber 5 de los últimos años. Finalmente, y como tercer elemento, se elabora un análisis e interpretación de la prueba diagnóstica realizada a los estudiantes, a fin de determinar las dificultades y fortalezas que presentan alrededor de este objeto matemático circunscrito dentro del pensamiento variacional.

En relación a los resultados en pruebas externas, concretamente Saber 5, se pudieron identificar las dificultades relacionadas con las razones y proporciones que presentan los estudiantes. Cabe recordar que estas pruebas masivas abarcan tres competencias: resolución de problemas, razonamiento y comunicación.

El último análisis histórico y comparativo que se tiene de pruebas Saber, corresponde al 2018 y abarca el período 2014 – 2017, encontrándose en este, una tendencia negativa en el desempeño general, de acuerdo con el porcentaje de respuestas

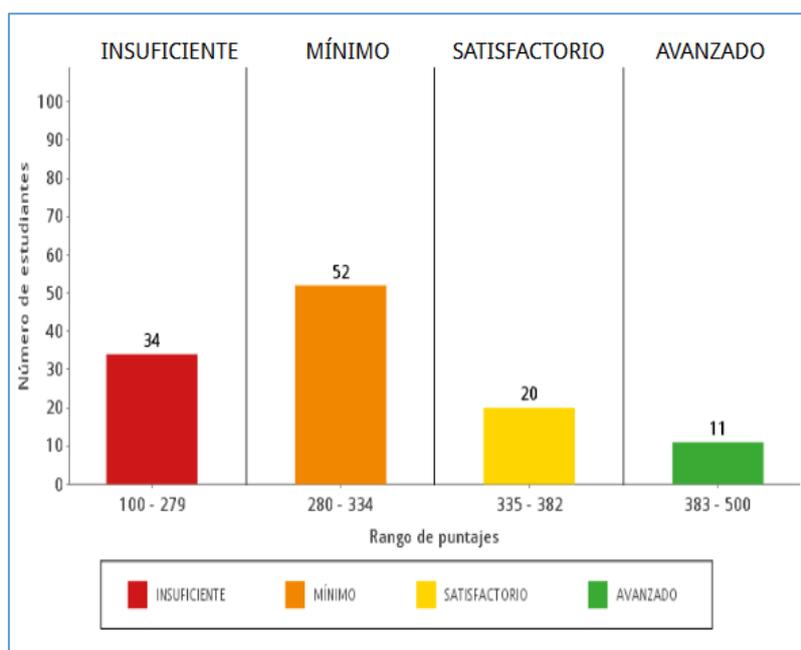
incorrectas por competencia y pensamiento matemático evaluado, al punto que en el 2017, el 66.8% de un total 196 los estudiantes evaluados en grado quinto, se ubicaron en los niveles mínimo e insuficiente (ver figuras 12 y 13).

Figura 12. Distribución de los estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas grado quinto - sede Honorio Villegas



Fuente: informe por colegio del cuatrienio (Análisis histórico y comparativo) MEN – Siempre Día E

Figura 13. Distribución de los estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas grado quinto - sede Isabel de Castilla



Fuente: informe por colegio del cuatrienio (Análisis histórico y comparativo) MEN – Siempre Día E

A continuación se muestra el porcentaje de respuestas incorrectas en las competencias y aprendizajes relacionados con el pensamiento numérico-variacional en la prueba Saber 5 de 2017.

Tabla 19. Porcentaje de respuestas incorrectas por competencia matemática en pruebas Saber 5 (Pensamiento numérico variacional)⁸

Competencia	Aprendizaje	Porcentaje de respuestas incorrectas
Comunicación	Describir e interpretar propiedades y relaciones de números y sus operaciones	51.6%
	Reconocer e interpretar números naturales y fracciones en diferentes contextos.	55.8%
	Reconocer diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) y hacer traducciones entre ellas.	50.8%
	Traducir relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente.	54.5%
Resolución	Resolver y formular problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.	74.5%
	Resolver y formular problemas multiplicativos de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano.	48.7%
	Resolver problemas aditivos rutinarios y no rutinarios de transformación, comparación, combinación e igualación e interpretar condiciones necesarias para su solución.	54.7%
	Resolver y formular problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa.	46.8%
Razonamiento	Reconocer y predecir patrones numéricos	49.2%
	Justificar y generar equivalencias entre expresiones numéricas.	47.0%
	Justificar propiedades y relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos.	41.5%

Fuente: informe por colegio del cuatrienio (Análisis histórico y comparativo) MEN – Siempre Día E

Como se desprende del informe anterior y a pesar que la Institución Educativa José María Carbonell, se encuentra ubicada entre las tres instituciones educativas oficiales

⁸ Se tienen en cuenta varios de los aprendizajes relacionados con el pensamiento numérico – variacional, debido a que es en la proporcionalidad en donde se unifican las líneas básicas de nociones como: razón y proporción, fracción, número decimal, porcentajes, escalas, semejanzas entre figuras, etc.

con calificación A+, según ISCE, se evidencian varias dificultades en matemáticas de tipo formativo, específicamente relacionadas con el pensamiento numérico – variacional y la competencia PRP.

Como tercer elemento de la identificación de necesidades formativas, se muestra el proceso seguido desde la aplicación de la prueba diagnóstica (anexo A), los resultados obtenidos y el respectivo análisis de estos. Inicialmente me centraré en los resultados de la misma, los cuales son organizados en una tabla que brinda una visión global del estado del grupo antes de iniciarse la estrategia de ABP. Posteriormente se hace un análisis de cada tarea.

El análisis efectuado muestra tanto las fortalezas como las debilidades más comunes que presentan los estudiantes, reflejando en cierta forma el tipo de actividades que están acostumbrados a desarrollar y las distintas representaciones que emplean al enfrentar tareas de razón y proporción. La prueba diagnóstica permitió hacer una exploración de los procesos cognitivos de los estudiantes a través de sus estrategias de resolución y de los modos de representación utilizados. Esta exploración fue fundamental porque permitió diseñar los problemas que posteriormente iban a resolver los estudiantes en el desarrollo del proyecto.

4.1.1 Resultados generales de la prueba diagnóstica

Para mostrar los resultados de la prueba diagnóstica se elaboró una tabla en la que se identifican tareas, el porcentaje de aciertos, desaciertos y de tareas sin responder. Se empleó la letra T para simbolizar la palabra tarea, la cual va seguida de un número que corresponde al que aparece en el cuestionario, de esta manera, la tarea 1 aparece como T1 y así sucesivamente. Hubo tareas como la T5, T6 y T9, que para su valoración fueron divididas por partes por lo que aparecerán como T5a, T5b, T6a, T6b, T9a y T9b.

Los resultados de la prueba diagnóstica se muestran en la tabla 16, en la cual se utiliza la letra C para indicar que la respuesta fue correcta, la letra I, para señalar que el resultado fue incorrecto y NC para mostrar que el estudiante no contestó.

La tabla 20 muestra el porcentaje de respuestas correctas, incorrectas o no contestadas por tarea propuesta en la prueba diagnóstica.

Tabla 20. Resultado grupal de la prueba diagnóstica

Tarea	T1	T2	T3	T4	T5a	T5b	T6a	T6b	T7	T8	T9a	T9b	Respuestas acertadas
E1	C	C	I	C	I	C	C	C	I	C	C	I	8
E2	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E3	I	I	I	C	C	I	C	C	I	I	I	I	4
E4	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E5	I	I	C	C	I	I	C	C	C	C	I	I	6
E6	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E7	I	I	I	C	I	I	I	C	I	I	I	I	2
E8	C	I	C	C	I	C	C	C	C	I	I	C	8
E9	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E10	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E11	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I	C	I	10
E12	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E13	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E14	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E15	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I	C	C	11
E16	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E17	C	I	I	I	I	I	I	C	I	I	NC	I	2
E18	C	C	C	I	I	I	C	C	C	C	C	C	9
E19	C	I	I	I	I	C	I	I	I	I	I	I	2
E20	C	I	I	C	C	C	I	I	I	NC	I	I	4
E21	C	C	C	C	I	C	C	C	C	C	I	C	10
E22	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E23	C	I	I	C	C	I	C	C	I	C	I	I	6
E24	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E25	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E26	C	I	I	I	I	I	I	C	I	I	I	I	2
E27	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E28	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E29	I	I	C	C	C	C	C	C	I	I	C	C	8
E30	C	I	I	C	I	I	C	C	C	C	I	C	7
E31	C	I	I	I	I	I	C	C	I	I	C	C	5

E32	C	C	C	C	C	C	C	C	C	I	C	C	11
E33	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E34	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E35	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E36	I	I	C	I	I	I	C	I	C	I	I	C	4
E37	C	C	C	C	C	C	C	C	I	C	C	C	11
E38	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
E39	C	I	C	C	C	C	C	C	I	I	C	I	8
E40	C	C	C	C	I	I	C	C	C	C	C	C	10
E41	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
Total aciertos por tarea	36	27	31	35	28	30	36	38	29	27	29	30	
Porcentaje Correctas	87.8 %	65.9 %	75.6 %	85.4 %	68.3 %	73.2 %	87.8 %	92.7 %	70.7 %	65.9 %	70.7 %	73.2 %	
Porcentaje Incorrectas	12.2 %	34.1 %	24.4 %	14.6 %	31.7 %	26.8 %	12.2 %	7.3 %	29.3 %	34.1 %	29.3 %	26.8 %	
Porcentajes No contestadas	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	2.4%	2.4%	0.0%	

Fuente: elaboración propia

Análisis cuantitativo y cualitativo global

39 de los 41 estudiantes resolvieron todas las tareas del cuestionario. Los dos restantes dejaron sin contestar entre una tarea.

19 de los 41 estudiantes obtuvieron el máximo de aciertos (12/12).

4 de los 41 estudiantes tuvieron el mínimo de aciertos (2/12).

5 de las 12 tareas se consideraron como las más accesibles para los estudiantes pues fueron resueltas correctamente por casi la totalidad del grupo. Corresponde a las tareas T1, T4, T6a, T6b, T9a (ver figuras 14 y 15).

Figura 14. Tarea 6b de la prueba diagnóstica

Ahora completa la siguiente tabla

Barras de chocolate	Litros de leche
2	1
	2
6	
	5

Figura 15. Tarea 9a de la prueba diagnóstica

Tarea 9a y 9b
En la siguiente tabla se proporcionan algunos datos:

Número de paquetes	Número de lápices
3	15
5	

En las tareas T6b y T9b se les solicitó a los alumnos que completaran una tabla, conocidos ciertos valores. En el caso de la tarea 6b, algunos alumnos emplearon la tabla de multiplicar del dos para llenarla, otros sumaron de dos en dos. En la tarea 9a, ocurrió algo semejante, aunque aquí la mayoría utilizó la tabla del cinco y menos expresaron que habían sumado de cinco en cinco. Al respecto, se puede decir que los estudiantes mostraron cierta facilidad para llenar tablas utilizando el operador multiplicativo natural (\times 2).

También se observó que no todos los alumnos relacionaron los datos obtenidos en la tabla con la situación problemática. En caso de la tarea 6a, en donde se pidió dar respuesta a algunas preguntas y luego se les dio la tabla para que la completaran y se auxiliaran de en la resolución de dichos interrogantes, 5 de los 41 estudiantes (12.2%) no la utilizaron para dar respuesta a lo pedido y, además, estas fueron incorrectas. A

continuación, en la figura 16 se muestra un ejemplo en el que el estudiante no estableció una relación entre la tabla y la situación planteada.

Figura 16. Producción de estudiante E7

Ana va a tener invitados y pensó hacer chocolate con leche. Ayúdala a saber cuántas barras de chocolate necesita para 2 litros de leche 2 y cuántas para 5 litros de leche 3.

También ayúdala a saber cuántos litros de lecho debe comprar para 6 barras de chocolate: 3

Ahora completa la siguiente tabla

Barras de chocolate	Litros de leche
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5

La respuesta de E7 en el apartado 6b se registró como correcta, mientras que la 6a como incorrecta.

En cuanto a las tareas T9b, 12 de los 41 estudiantes (29.3%) no relacionaron la tabla con el problema que se les solicitaba inventar. Algunos estudiantes plantearon problemas que se consideraron incorrectos porque carecían de sentido, al estar incompletos o al confundir cantidades que ellos mismos daban. Otros estudiantes crearon problemas con sentido, empleando los valores de la tabla, pero no los encabezados de ésta (que correspondían a número de paquetes y número de lápices).

En la figura 17 se muestra las tareas T9a y T9b resueltas por E31, en donde se evidencia la no relación entre el llenado correcto de la tabla con el problema que debió plantear. La tarea T9a se registró como correcta y la tarea T9b como incorrecta.

Figura 17. Tarea T9a y T9b resuelta por E31

Tarea 9a y 9b
En la siguiente tabla se proporcionan algunos datos:

Número de paquetes	Número de lápices
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

Inventa un problema relacionado con los datos que se te proporcionan y resuélvelo.
Ana tenía 25 bolsas de dulces, si le regala 3 a su hermano ¿Cuántos le quedan?

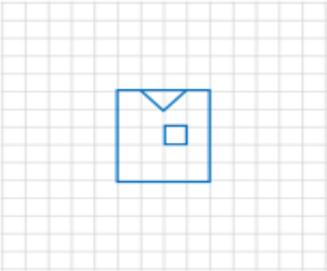
Completa la tabla y explica cómo lo resolviste.

$$\begin{array}{r} 25 \\ - 3 \\ \hline 22 \end{array}$$

Algunas tareas con enfoque cualitativo evidenciaron ser difíciles para los alumnos y corresponden a la T2, T5a/b y T3.

Figura 18. Tarea 2 de la prueba diagnóstica

Tarea 2.
La señora Andrea confecciona chalecos y le han pedido una que elabore uno que sea la ampliación del siguiente:



En el espacio de abajo dibuja el nuevo chaleco, ampliando dos veces cada uno de los lados del chaleco de la muestra.

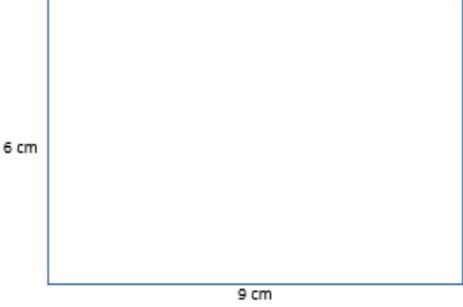


A continuación, escribe los pasos que seguiste para dibujarlo.

Figura 19. Tarea 5a/b de la prueba diagnóstica

Tarea 5a

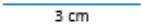
Un carpintero cortó una tabla de madera con forma rectangular, de 9 cm de largo y 6 cm de ancho. Necesita cortar otra tabla que tenga la misma forma que la primera pero de medidas diferentes. Si de largo debe medir 3 cm ¿cuánto debe medir de ancho la segunda tabla?



6 cm

9 cm

Completa la figura que representa la segunda tabla de madera.

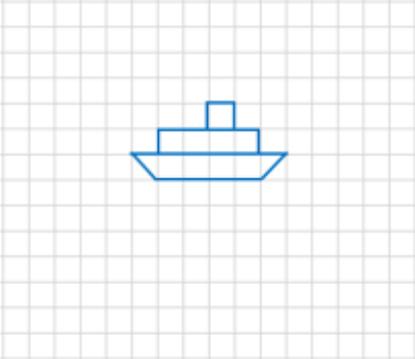


3 cm

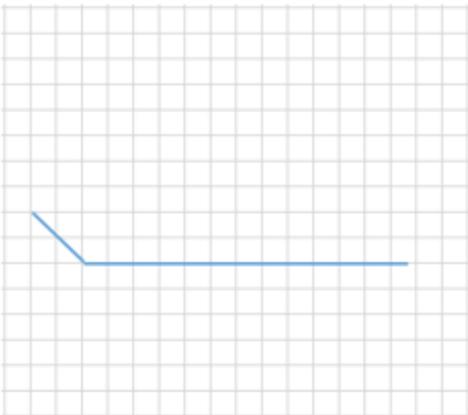
Explica paso a paso cómo lo resolviste:

Figura 20. Tarea T3 de la prueba diagnóstica

Ahora, al diseñador Carlos le han pedido realizar una ampliación del siguiente dibujo original.



Abajo, observa que hay una parte del dibujo ampliado. Completa esa ampliación del mismo, conservando la forma original.



En la tarea T2 (figura 18) se solicita ampliar al doble linealmente la figura de un chaleco, dándole únicamente la cuadrícula para dibujarlo en ella. Los errores más comunes encontrados fueron: algunos alumnos duplicaron una sola dimensión del chaleco, uno aumentó dos cuadrados en cada uno de los lados para hacerlo más grande. En la tarea 5a (figura 19) se les proporcionó el dibujo de un rectángulo que representaba unan tabla de madera, midiendo de largo 9 cm y de ancho 6 cm, se les dio el largo de otra tabla cuya medida era 3 cm; y se les pedía encontrar el valor del ancho de esta segunda tabla para que fuera proporcional a la primera. La finalidad era ver si podrían establecer

una relación entre los valores dados, para encontrar el desconocido, tácitamente estaban involucradas las razones internas en esta tarea.

El error más frecuente fue que no determinaron una relación entre las magnitudes de los largos de los rectángulos, sino entre el ancho de una figura (3 cm) con respecto al largo de la otra (6cm), lo que los llevó a dar una respuesta incorrecta y que al parecer se vio influenciada porque un valor correspondía a la mitad del otro. Además, predominó el reconocimiento de la mitad (3 es la mitad de 6) y no el de la tercera parte (3 es la tercera parte de 9), aunque esto último era lo que hubiera permitido llegar a una solución correcta con lo cual también se puede decir que les resulta familiar el empleo de mitades y no así otro operador fraccionario. Esto último se evidencia cuando con frecuencia responden al concepto de fracción como la mitad de un objeto o cantidad.

La tarea 3 (figura 20) consistió en triplicar linealmente la figura de un barco completando en la cuadrícula la parte dibujada de este nuevo barco. Todos los estudiantes completaron correctamente la parte inferior del barco, pero las siguientes dos partes que lo integraban, en el caso de algunos estudiantes, duplicaron en lugar de hacerlo al triple. Con esto se puede decir que ellos están más acostumbrados a trabajar con el doble que con el triple, en el caso de completar dibujos.

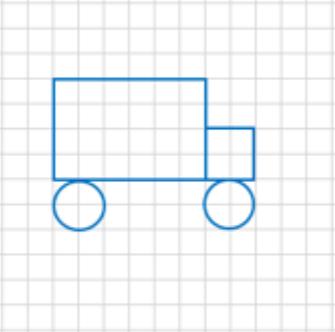
Por lo mostrado anteriormente, se puede decir que en general los estudiantes usan de manera adecuada el operador multiplicativo natural ($\times 2$) al llenar una tabla, pero no así al hacer un dibujo, como en el caso del chaleco. Se observa que no hay transferencia entre ambos registros de representación (tabular y pictórico). Por otro lado, muestran facilidad cuando se trata de completar un dibujo.

Está también el caso de la tarea 4 (figura 21) que consistía en completar una figura, pero en este caso, es la reducción de ella. Aquí el 85.4% del grupo acertó, lo que confirma que tienen facilidad de completar dibujos cuando están dentro de una cuadrícula.

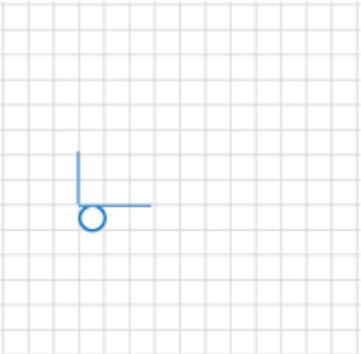
En algunos casos, se evidencia que los estudiantes aumentan o disminuyen una sola dimensión, largo o ancho de una figura, sin fijarse en la otra, como ocurrió en el caso del chaleco la tarea 2.

Figura 21. Tarea 4 de la prueba diagnóstica

Tarea 4.
Al señor Calos se le ha pedido realizar la reducción del siguiente dibujo original.



Observa que abajo hay una parte del dibujo reducido. Completa esa reducción, sin modificar su forma.



En el siguiente espacio explica cómo lo hiciste.

4.1.2 Análisis cualitativo por cada una de las tareas

Algunas tareas del cuestionario pretendían revisar cómo se desenvolvía el estudiante en cuanto a lo cualitativo, en torno a las razones y proporciones, otras reflejan el desenvolvimiento del estudiante en el terreno que se encuentra en tránsito entre lo cualitativo y lo cuantitativo y finalmente están aquellas tareas que revisan explícitamente la cuantificación de las relaciones involucradas.

Para el presente análisis se tomaron en cuenta los siguientes aspectos:

El manejo lingüístico del texto como registro de representación, con lo cual se pretendió reconocer la manera en el que el texto es interpretado por los estudiantes y cómo les ayudó a resolver la tarea.

Manejo de la proporcionalidad cualitativa expresada a través de comparaciones categorizadas mediante expresiones verbales.

Dominio inicial de lo cuantitativo en el terreno de las comparaciones y relaciones de proporcionalidad simbolizadas a través de expresiones numéricas.

La manera como emplearon el dibujo al resolver las tareas y cuánto les ayudó.

A continuación se hace una descripción del propósito de cada tarea y el análisis de los resultados.

Tabla 21. Análisis de la prueba diagnóstica por tarea propuesta

Tarea	Propósito	Análisis de resultados
T1	Indagar si el estudiante puede reconocer la reducción de un dibujo en todos sus componentes, de tal manera que pueda expresar si conserva la forma original del dibujo, con base en discriminaciones visuales.	Con esta tarea se pretendió reconocer qué tan desarrollado tenía el estudiante el aspecto cualitativo de la proporcionalidad a través de presentarle el dibujo de una casa y de solicitarle escoger la reducción de ésta, dadas cuatro figuras más pequeñas que la original. Tres de ellas no estaban en la proporción con respecto a la grande. 87.8% del grupo eligió de forma correcta la casa reducida. Los argumentos dados para la selección fueron: <i>“es igual pero más pequeña”</i> , <i>“no se le quitó, ni se le aumentó nada”</i> , <i>“sus partes permanecen iguales”</i> , <i>“guarda relación”</i> . El otro 12.2% eligió la casa incorrecta, en su mayoría fue aquella cuya reducción del ancho no corresponde la mitad como en todo lo demás, comentando que era muy parecida a la original. Solo tres alumnos de los que eligieron la casa de manera correcta, mencionaron que la escogieron porque era proporcional a la original.

		<p>Los argumentos que dieron los estudiantes se clasificaron en dos categorías: una de ellas correspondió a alumnos que eligieron a la casa reducida basándose en la definición que ellos tenían de reducción “es igual pero más pequeña” o “no se le quitó, ni se le aumentó nada”. En la segunda quedó el argumento “es la más parecida” y fue empleada por alumnos que seleccionaron la casa correcta como la que no estaba reducida. Esto indica que el término “parecida” no refleja que en todos los casos la idea de proporción.</p> <p>Así mismo mientras la necesidad de profundizar más en el terreno cualitativo de la proporcionalidad y de que los alumnos deben avanzar a la fase de significación a la designación dentro del trabajo en el ABP, es decir, que una vez comprendido el significado real de lo abordado usar el nombre que en el lenguaje matemático es empleado.</p>
T2	<p>Indagar si el estudiante puede reproducir una figura a una escala dada (se solicitó que el dibujo que reprodujera fuera el doble del original).</p>	<p>Con esta tarea se pretendió revisar la noción de ampliación, el uso del operador natural ($\times 2$) a través del dibujo y el posible reconocimiento de la razón implicada.</p> <p>Fue una de las tareas menos accesibles para los estudiantes, ya que solo 65.9% llegaron a la solución correcta. En ella tenían que amplificar el doble linealmente de un dibujo dado, apoyándose en una cuadrícula. Las estrategias empleadas fueron: sumar dos veces la misma cantidad de cuatros, después de haber realizado un conteo de ellos, en una dimensión o en las dos; multiplicar por dos la cantidad de cuadros de uno de los dos lados. Pero el error más común fue duplicar un solo lado de la figura.</p> <p>Se observó que la cuadrícula fue un medio de apoyo para el conteo de los cuadros, independientemente de que la cantidad que aumentaron no fuera correcta.</p>

		<p>En general no hubo una interpretación adecuada del texto, pues predominó el término ampliación (aunque en algunos casos el significado que de él tenían los alumnos era erróneo) y al parecer no se fijaron en que la ampliación debía ser al doble de cada uno de los lados del chaleco dado. Otros alumnos confundieron la expresión dada en el texto con aumentar dos cuadros en cada lado. Otro subgrupo de alumnos se caracterizó porque duplicaron la cantidad de cuadros en una sola dimensión, y en el tercer grupo de niños están aquellos que mostraron una noción clara de proporción desde el punto de vista de la idea de dibujo a escala.</p>
T3	<p>Indagar si el estudiante puede completar una figura, que es la reproducción de la original, de tal manera que preserve la proporcionalidad y de qué estrategia se valió y qué modo de representación usó al realizar la tarea.</p>	<p>En esta tarea también se utilizó la cuadrícula como medio de apoyo para amplificar una figura, dibujada una parte de esta. Se observó que todos los estudiantes pudieron completar correctamente la parte inferior del barco, pero no amplificaron al triple (linealmente) las otras partes que lo componen. A un 24.4% les causó dificultad trabajar con el operador natural (x3) a través del dibujo. La mayoría de estos estudiantes no percibieron que la parte que completaron era el triple de la figura original y cayeron en el error de duplicar en lugar de triplicar linealmente los dos componentes restantes del barco.</p> <p>En esta tarea no se les pidió explícitamente que dibujaran la figura triplicando cada una de sus dimensiones, porque una de las finalidades era ver qué tanto los estudiantes pueden determinar el patrón que les permitiera llegar con éxito a la solución. Así, en lugar de que en el texto apareciera la instrucción, esta fue sustituida por una parte del dibujo del barco amplificado, pues no se percataron</p>

		<p>que la parte dibujada correspondía al triple de las dimensiones del barco, por lo que se puede decir que no han identificado el facto escalar 3.</p> <p>Todos lograron completar la parte ya dibujada, con lo que se puede observar que estaba presente la propiedad de cierre y se recalca lo señalado en la anterior tarea, que les resulta fácil completar algo que dibujar sin tener una parte de la figura.</p> <p>31 alumnos se dieron cuenta que en todas sus dimensiones lineales el barco debería ampliarse al triple, para lo cual multiplicaron por tres el número de cuadros en cada dimensión. Estos niños mostraron tener la idea de proporción en cuanto al dibujo a escala se refiere.</p>
T4	<p>Indagar si el estudiante puede completar la ampliación de una figura preservando la proporcionalidad y explicar por escrito cómo lo hizo.</p>	<p>El 85.4% del grupo realizó correctamente esta tarea. En su mayoría se fijó en la parte dibujada y completó correctamente pero, también los estudiantes observaron que la parte dibujada del camión correspondía a la mitad de cuadros tanto de largo como de ancho con respecto al original lo cual se afirma por las explicaciones dadas por escrito.</p> <p>Al parecer los estudiantes estaban más familiarizados para trabajar, ya sea duplicando u obteniendo la mitad, con algunos números como lo son el 4 y el 6, porque en este caso se percataron que la parte dibujada del camión correspondía a la mitad de cuatro cuadros, en cuanto a su ancho y a la mitad de cuatro cuadros en su largo. También se observó esta forma de proceder en la tarea 3, en donde algunos duplicaron el ancho del chaleco, que correspondía a cuatro cuadros. A pesar que no se había trabajado la razón y proporción, algunos estudiantes argumentaban el uso de fracciones o expresiones que</p>

		<p>podieran señalar la relación entre los largos de la figuras.</p> <p>Este primer bloque de tareas revisó lo concerniente a dos nociones importantes que son las de reducción y ampliación, haciendo hincapié en ideas preliminares de proporcionalidad desde lo cualitativo, antes que lo cuantitativo.</p>
T5a	<p>Indagar si el estudiante puede completar una figura geométrica conociendo el valor del segmento que representa al ancho de ella y los valores del alto y ancho de la figura que se pretende que sea proporcional a la otra figura dada, y qué estrategia emplea. La tarea estuvo inmersa en una relación de semejanza. Revisar si relaciona magnitudes de una misma escala (razones internas).</p>	<p>Con estas tareas se pretendió revisar las relaciones entre dos magnitudes que el estudiante podía establecer, ya sea entre dos dimensiones del mismo tipo (largos entre sí) o entre dimensiones diferentes de una misma figura (largo y ancho), es decir ver qué les resultaba más fácil, trabajar con razones internas o externas, como las denomina Freudhental (1983). Esto se hizo a través de completar una figura, conociendo los valores del ancho y largo de un rectángulo y el valor del segmento que representa al ancho o el largo de otro rectángulo que debía ser proporcional.</p> <p>También se pretendía indagar si el operador era un instrumento para componer las razones en la que se encontraban las dimensiones de los rectángulos (los largos entre sí o los anchos entre sí).</p> <p>En ambas tareas, el valor conocido de los rectángulos que se pedían fuera proporcionales, correspondía al ancho. En el caso de la tarea 5ª medía la tercera parte del ancho medía la tercera parte del ancho del otro rectángulo. La resolución de este problema tuvo un alto grado de dificultad para los alumnos, ya que sólo 28 estudiantes llegaron a una respuesta correcta. Ellos compararon los valores de los largos de los rectángulos se dieron cuenta que una de esas medidas cabía tres veces en la otra, algunos escribieron: <i>“el tres cabe 3 veces en el 9”</i> y debían encontrar un número que cupiera tres veces en el seis, que es la medida del largo. Todos los estudiantes hicieron</p>

		operaciones, pero los 13 estudiantes, cuyo resultado fue erróneo, se debió a que establecieron una relación inadecuada, ya que consideraron que el largo debía ser la mitad del valor del ancho del rectángulo.
T5b	Indagar si el estudiante puede completar una figura geométrica conociendo el valor del segmento que representa al ancho de ella y los valores del alto y ancho de la figura que se pretende que sea proporcional a la otra figura dada, y qué estrategia emplea. La tarea estuvo inmersa en una relación de semejanza. Revisar si relaciona magnitudes de escalas diferentes (razones externas).	<p>En la tarea 5b un poco más de estudiantes tuvieron éxito en relación a la 5a, pues de igual forma se conocían los valores de los anchos y se pedía encontrar el largo del rectángulo proporcional. Los 30 alumnos de los 41 que integran el grupo, encontraron la relación entre el largo y el ancho del primer rectángulo, al darse cuenta que seis es la mitad de doce, de esta manera buscaron el número que correspondía a la mitad de cinco, es decir a la mitad de la medida del ancho del otro rectángulo. Los 11 alumnos restantes siguieron un procedimiento que los condujo a una solución equivocada. En su mayoría lo que hicieron fue dividir el valor del rectángulo (6) entre (2), obteniendo un resultado incorrecto. En sus explicaciones mencionaron que debían sacar la mitad de seis porque es la mitad de doce. Se observa que iban por buen camino al detectar que el largo constituye la mitad del ancho en el rectángulo original, pero después se perdieron ya que no pudieron establecer la relación correcta.</p> <p>Al establecer una comparación entre los resultados de las tareas 5a y 5b, se puede decir que se les facilitó un poco más trabajar con razones externas que con razones internas, aunque también influyeron los valores de las dimensiones de las figuras, pues en un caso se emplea la tercera parte de uno de los valores y en el otro se usa la mitad, y en ese sentido, están más familiarizados para trabajar con mitades que con tercios. Algunos niños establecieron en su explicación el concepto de razón, pero otros</p>

		establecieron relaciones trabajando de un modo un poco más empírico.
T6a y T6b	<p>Determinar las cantidades que corresponden a los datos dados en la tabla. Los datos son el resultado de una situación planteada. Revisar la estrategia que empleó completando la tabla y si estableció relación entre las preguntas formuladas y la tabla.</p>	<p>La revisión de esta tarea se dividió en dos partes. La 6a consistió en responder algunas preguntas basadas en el planteamiento de una situación familiar para el estudiante. La 6b se refirió al llenado de una tabla que justamente establecía una conexión con la 6a. Al respecto, se puede decir que les resulta fácil llenar una tabla, pero no así la relación que pueden establecer entre ella con el problema planteado.</p> <p>La tabla es un modo de representación específico que requiere ser enseñado, sin embargo, se puede decir que como objeto de enseñanza lo manejan muy bien. En este caso, para su llenado, los estudiantes sumaron de dos en dos y otros emplearon la tabla de multiplicar del dos. Esto indica que están altamente familiarizados con el operador escalar ($\times 2$) al utilizar registros tabulares.</p> <p>Los alumnos que llegaron a responder correctamente a las preguntas solicitadas, en su mayoría, fue después de completar la tabla. Esto se deja ver en sus explicaciones, pues, comentaron que se basaron en la tabla para contestarlas, es decir, viendo ambas columnas y de manera implícita estableciendo relaciones entre ambas. En algunas de las explicaciones se decía <i>“me di cuenta que para dos barras de chocolate se necesita un litro de leche; entonces para 4 barras se empleará el doble”</i>. Quienes dieron valores incorrectos a las cuestiones pedidas fue por distintas razones. Una de ellas porque no relacionaron la tabla con las preguntas, mostrando confusión en la interpretación del texto, ya que en dos momentos se les pedía responder en función de las barras de chocolate que se necesitaban y en un tercer momento en función de los litros de lecho.</p>

T7	Completar los datos faltantes a partir de los conocidos y revisar qué estrategia emplea.	<p>En esta tarea se pretendía que el estudiante determinara el precio de los botes de pintura; uno de cuatro litros y otro de un litro, dándoseles el precio de un bote de veinte litros. 29 de los 41 estudiantes llegaron a la respuesta correcta, utilizando estrategias distintas. La mayoría empleó el camino de encontrar el valor unitario al dividir \$60.000 entre 5 para saber el costo del bote de cuatro litros y posteriormente, dividieron \$12.000 entre cuatro litros para saber el costo de un litro.</p> <p>Un error común detectado fue dividir los \$60 000 entre 4 litros, es decir, estos alumnos establecieron una relación errónea.</p> <p>En esta tarea una parte de la información es dada a través del texto y la otra por medio del dibujo. Se pudo observar que esto les ayudó para encontrar inicialmente el precio del bote de un litro y luego el de cuatro litros.</p>
T8	Determinar el valor desconocido de un problema, apoyado en el modelo de la compra de objetos conocidos por el estudiante. Revisar qué estrategia emplea.	<p>Este problema está clasificado entre los de valor perdido o desconocido, o lo que algorítmicamente, se le ha llamado regla de tres. A los estudiantes se les dio tanto el precio como el número de bolsas de dulces correspondientes a él y se les pidió determinar el costo de otra cantidad de la misma cantidad de dulces.</p> <p>29 de los 41 estudiantes llegaron a la respuesta correcta. Todos emplearon la estrategia de determinar el valor unitario y algunos sumaron la cantidad obtenida tantas veces como bolsas había, mientras que otros emplearon la multiplicación. En esta tarea el dibujo jugó una parte importante en su resolución, ya que el conteo de las bolsas les facilitó obtener el costo total pedido, una vez encontrado el precio de una bolsa.</p> <p>En la resolución de este problema tampoco usaron la regla de tres como algoritmo</p>

T9a y T9b	Indagar si el estudiante puede inventar un problema relacionado con tres cantidades dadas en una tabla. Revisar si puede completarla y resolver el problema que planteó.	<p>En estas tareas se pretendía indagar si el estudiante podía formular una situación problemática a partir de conocer tres cantidades que se encontraban en la tabla. Los encabezados de las columnas era: número de paquetes y número de estampas. Dos de los valores conocidos correspondían a la primera columna, mientras que el otro a la segunda. En esta ocasión no se les dio a los alumnos el dato correspondiente al valor unitario.</p> <p>Dentro de las estrategias empleadas para el llenado de la tabla se encontró que varios alumnos inicialmente determinaron el valor unitario y después procedieron a encontrar valores restantes. Otros procedieron a completar la tabla, usando la tabla de multiplicar y los restantes emplearon la suma repetida del cinco. No sólo interesó revisar la manera de llenarla, sino también, reconocer si establecían una relación entre la tabla y el problema planteado. Al respecto, 11 estudiantes, no usaron la información de la tabla para formular el problema. Algunos alumnos crearon situaciones en las que no incorporaron las variables de la tabla, pero sí inventaron problemas de valor desconocido empleado los tres que conocían. Un estudiante formuló un problema que no guardaba relación ni con los encabezados de la tabla, ni con los datos que en ella había.</p>
-----------	--	---

Fuente: elaboración propia

4.1.3 Consideraciones finales de la identificación de necesidades formativas

Por lo descrito anteriormente son varios los aspectos que se detectaron en relación a las necesidades formativas identificadas y que a continuación se describen:

Definir la razón como una relación y la proporción como una relación de igualdad entre razones.

Usar distintas técnicas o estrategias para hallar un valor de una proporcionalidad conociendo los otros tres.

Identificar la razón constante entre dos cantidades de magnitud en situaciones de proporcionalidad directa.

Comparar relativamente dos medidas de cantidades respecto a una medición anterior de las mismas.

En este orden de ideas, con lo anterior se dio cumplimiento al primer objetivo específico que correspondía a la identificación de las necesidades formativas de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa José María Carbonell, al plantear y resolver problemas en los que intervienen las razones y proporciones.

4.2 Diseño e implementación de la estrategia ABP

El trabajo desarrollado en el área de matemáticas con estudiantes de grado séptimo, se fundamenta en la estrategia ABP con enfoque formativo y gira en torno a una temática de contexto local. Para esto los estudiantes elaboraron durante varias semanas (12 sesiones de trabajo) un producto final cuyo resultado fue expuesto ante una audiencia conformada por sus compañeros y algunos miembros de la comunidad educativa. Este proyecto incorporó tareas que requirieron el uso de las TIC y otorgó a los estudiantes elevado grado de autonomía e iniciativa.

Para el desarrollo de la estrategia ABP con enfoque formativo se organizaron diferentes equipos colaborativos compuestos por cuatro alumnos, cuya configuración se realizó de acuerdo con los criterios descritos en la muestra (capítulo 3). Así pues, los estudiantes como producto final crearon un Sitio web usando la herramienta *Sites* de Google en donde se trataron temáticas relacionadas con el agua. Al tiempo incluyeron como tareas movilizadoras de la competencia matemática sus procesos de resolución de

problemas de diferentes contextos y uno que como tarea central del ABP, implicaba calcular el consumo de agua en su jornada escolar.

El ABP se implementó en el grupo séptimo – 2 conformando un total del diez (10) grupos de trabajo cada uno integrado por cuatro (4) alumnos. En este sentido cada alumno se identificó con la letra E y el número en la lista. En la tabla 22 se muestra la manera como se conformaron los tres (3) grupos de trabajados escogidos para propósitos metodológicos de esta investigación, como grupos focales:

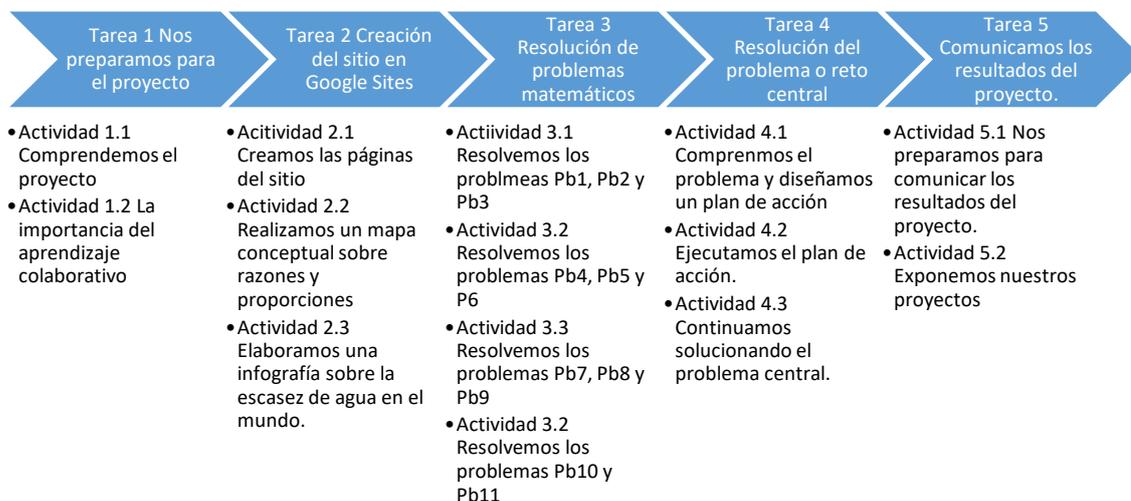
Tabla 22. Conformación de grupos focales para el ABP

Grupo focal 1	Grupo focal 2	Grupo focal 3
E2	E1	E4
E6	E12	E16
E10	E14	E25
E24	E31	E39

Fuente: elaboración propia

Para el diseño de la estrategia de aula (ver anexo B) se propusieron tres tipos de tareas dentro del proyecto: la tarea central descrita anteriormente; once (11) problemas contextualizados con niveles de complejidad creciente relacionados con el objeto matemático razones y proporciones y el desarrollo de tareas que implicaran el uso de diversas herramientas TIC en donde expusieran una mirada reflexiva alrededor del agua como recurso natural no renovable. Durante el trabajo en aula, el docente investigador asumió el papel de observador participante favoreciendo la autonomía e interacción dentro de los equipos, aprovechando dichas sesiones también para reforzar y apoyar a los estudiantes que lo requieren, y facilitando el debate, la puesta en común, los significados concertados y la discusión de resultados.

El proyecto llamado “Razones y proporciones en un estudio sobre el consumo de agua en nuestro colegio”, se desarrolló durante seis (6) semanas que equivalieron a doce (12) sesiones de dos (2) horas cada una, siguiendo una estructura como la que se muestra en la figura 22.

Figura 22. Plan de tareas para el desarrollo del proyecto

Fuente: elaboración propia

A pesar que el plan de tareas del proyecto mostrara una estructura secuencial, algunas de las actividades no se desarrollaron de manera lineal, pues al mismo tiempo que se iba resolviendo el problema central del proyecto, también se resolvían otras situaciones problemáticas asociadas a las razones y proporciones, hasta la llegada al producto final. Es importante aclarar que el desarrollo del proyecto no cumplió con el aspecto de los denominados proyectos efectivos, ya que en su consecución, fue dirigido bajo algunas directrices establecidas, de manera tal que tanto los tiempos como las actividades que se iban desarrollando estaban relativamente programadas, pero con gran grado de autonomía, intentando orientar la labor de los grupos de trabajo hacia el logro de las metas previstas.

En consecuencia, cada una de las tareas propuestas tenía asociada varias actividades con una explicación clara en relación a lo que le correspondía por un lado al docente y por el otro a los estudiantes. Esto último fue importante para cumplir con una característica del ABP, al motivar y retar a los alumnos a resolver tareas debidamente

planificadas, de manera tal que no se cayera en una estrategia de instrucción tradicional. Esto se puede evidencia en un ejemplo extraído de la matriz de planeación del proyecto.

Tabla 23. Ejemplo de actividades del docente y estudiante

Actividad del docente	Actividad del estudiante
<p>Sesión 3 <i>Actividad 2.3 Elaboramos una infografía sobre la escasez de agua en el mundo</i></p> <p>Pedir a los estudiantes que dentro de la página “La escasez de agua en el mundo”, elaboren una infografía en la que se exponga la problemática de la escasez del agua en el mundo Para esto socializará el tutorial ¿Cómo hacer infografías con easel.ly?</p>	<p>Observar el tutorial ¿Cómo hacer infografías con easel.ly? Hacer uso de la herramienta TIC easel.ly para realizar una infografía en la que se exponga la problemática de la escasez del agua en el mundo. Para esto deberán primero buscar información acerca de esta problemática y realizar un diseño en borrador de su infografía.</p> <p>Una vez elaborado el borrador harán uso de la herramienta TIC easel.ly para la realización de la infografía.</p>
Tiempo: 30 minutos	Tiempo: 2 horas

Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, las tareas y actividades desarrolladas cumplieron con otra característica importante del ABP, al ser tareas centradas en el estudiante. Otro elemento fundamental de la estrategia ABP con enfoque formativo, fue haber podido abordar un problema o situación del mundo real como era estimar el consumo de agua en su colegio y posteriormente proponer una mecanismo o estrategia de para el ahorro de dicho recurso. Esto último fue sin duda el elemento motivador de los estudiantes, ya que por un lado se buscaba aportar al cuidado del medio ambiente y por otro, enriquecer el proyecto ético de vida de los estudiantes, desde la perspectiva de los proyectos formativos. (Tobón, 2009).

4.2.1 Rol del alumno en el ABP

Uno de los elementos más importantes en el ABP, es el rol que juega el alumno. Dado que esta metodología se basa en principios constructivistas, el alumno es

protagonista y responsable de su propio aprendizaje. Sin embargo, para que los alumnos se apropien y responsabilicen de su aprendizaje o de la resolución de un problema, debe estar presente el aspecto afectivo como eje decisivo de la didáctica, a través de la motivación y volición. La motivación es necesaria para garantizar la disposición a aceptar el papel del estudiante implicado; pero la volición es aquella que permite realmente la acción. (D'Amore, Díaz Godino, & Fandiño Pinilla, 2008).

En ese sentido, el ABP permitió que los estudiantes se enfrentaran a problemas nuevos e intentarlos resolver a partir de la “voluntad”, el “gusto” y el “deseo” de poner en evidencia sus propios conocimientos, pues sentía que el aula se convertía ya no en un espacio estático y atemporal, sino una *minicultura* que da la oportunidad para construir y negociar significados con sus compañeros y su maestro.

Por su parte, fue posible a partir del análisis de las entrevistas evidenciar la motivación de los alumnos en este fragmento:

“Con el proyecto nos sentimos que aprendemos de una forma diferente pues estamos más activos, trabajamos en equipo y pues eso nos motiva”. Aquí esta estudiante deja ver en su relato que están jugando un rol activo, diferente a lo que sucede con la instrucción tradicional, pues en esta ocasión no era el docente que transmitía un saber, sino el que acompañaba y negociaba significados matemáticos.

Otro aspecto interesante encontrado en la narración de los estudiantes, fue la necesidad de llegar a consensos para la toma de decisiones. En ese sentido, podía discutir sobre las diferentes formas de pensar y lograr llegar a acuerdos. Para elaborar un producto es fundamental el trabajo en equipo, posibilitando que los estudiantes desarrollen habilidades comunicativas para el cumplimiento de metas comunes, en términos de las características y componentes del aprendizaje cooperativo.

Desde el punto de vista del desarrollo del significado matemático, el estudiante hace actividad matemática cuando resuelve las tareas o problemas propuestos, desarrollando procesos matemáticos que le permiten comunicar con argumentos el proceso y el producto de su actividad y la valoración de la calidad de estos procesos, de su rol al interior del grupo, de las dificultades y de los avances. Es decir, el estudiante movilizó procesos de riqueza cognitiva, metacognitiva, afectiva y volitiva.

4.2.2 Rol del docente en el ABP

El rol principal del docente en el ABP no se reduce al de facilitador en el aula, sino que desde el punto de vista pedagógico es un activador del aprendizaje y desde lo didáctico, es el designado por la institución-escuela para salvaguardar el sigilo de los aprendizajes, por lo que los alumnos después de aceptar la construcción del aprendizaje o la solución de un problema, buscan del docente, por ser él (o ella) el titular del sentido social del conocimiento (D'Amore, Díaz Godino, & Fandiño Pinilla, 2008).

En palabras de Moursund (2009), “el docente es un guía al lado, no un sabio en el escenario”, por lo que a lo largo del proyecto el docente-investigador, daba indicaciones puntuales y proveía los recursos y herramientas que permitían la creación de un ambiente de aprendizaje sin convertirse nunca en el protagonista del proyecto. Es así que el docente posibilitó el cumplimiento de las metas, pero fueron los mismos estudiantes quienes actuaban, construían conocimiento y desarrollaban competencias.

Durante el desarrollo del ABP el docente se aseguró que todos los estudiantes participaran activamente en la ejecución del proyecto y su rol de lo que Moursund (1999) denomina *teacher learner* o profesor “aprendedor” proporcionó los recursos y materiales necesarios para que los alumnos desarrollaran y alcanzaran las metas propuestas, posibilitó el diálogo, la concertación, el cooperativismo, la reflexión individual y grupal a través de los diarios de aprendizaje, la metacognición y la autorregulación.

Otro aspecto importante del rol del docente en el desarrollo de este trabajo, fue su papel como propiciador de la evaluación auténtica y con propósitos formativos a través de la socialización previa de los criterios a tener en cuenta para valorar las tareas con el uso rúbricas que facilitarían la retroalimentación, heteroevaluación, coevaluación y autoevaluación de las producciones de los alumnos.

Por otro lado, es importante reconocer el papel del docente en la resolución de problemas. A pesar que durante el proceso de resolución de problemas el docente no hacía comentarios que pudieran orientar a los grupos hacia una solución específica, debió mantener el rol de monitor y facilitador (Schoenfeld, 1992). De ahí que el docente planteara el tipo de interrogantes que se proponen en un ejemplo de las actividades llevadas a cabo por el docente en la sesión 10.

Tabla 24. Ejemplos actividades del docente durante una sesión de trabajo en ABP

<p>Sesión 10</p> <p><i>Actividad 3.4 Resolución de problemas Pb10 y Pb11</i></p> <p>Pedir a los estudiantes que se reúnan en sus grupos y trabajen y empiecen el proceso de resolución de los problemas 10 y 11</p> <p>Durante la resolución del problema aclarar dudas mediante el planteamiento de preguntas como las siguientes: no entendí tu pregunta, ¿podrías plantearla de nuevo de manera diferente?, ¿qué se pide en el problema?, ¿qué información se proporciona?</p> <p>Evitar hacer comentarios que pudieran orientar a los equipos hacia una solución específica.</p> <p>Interrogar para conocer los argumentos de carácter verbal que los estudiantes muestran.</p> <p>Tiempo: 2 horas</p>
--

Fuente: elaboración propia

El rol del docente en la etapa de resolución de problemas coincide con lo que Schoenfeld (1992) denomina un reto para el profesor, tanto a nivel matemático, pedagógico como incluso personal. A nivel matemático porque los maestros debemos percibir las implicaciones de los diferentes enfoques de los estudiantes, si pueden ser

fructíferos o, si no, qué podrían hacerlos así. Pedagógico, pues el maestro debe decidir cuándo y qué sugerencias pueden ayudar a cada uno de los alumnos para proceder con la resolución de un problema a nivel individual o grupal, etc. Finalmente, personal, aunque en esta investigación no fue el caso, pero a menudo, el maestro se encontrará con la posición inusual de él tampoco tener la respuesta inmediata del problema.

4.2.3 *Uso de las TIC en el aula: creación de ambientes de aprendizaje enriquecidos*

Ante la discusión del verdadero papel de las TIC en la educación escolar y las expectativas de su incorporación en el aula, el ABP se convirtió en una oportunidad para hacer uso de las tecnologías digitales no como fines en sí mismas, sino como medios para la creación de un ambiente de aprendizaje enriquecido o que impulsan nuevas formas de aprender y enseñar en el marco de la sociedad de la información.

En este sentido, el uso de las TIC en el diseño e implementación del ABP tuvo en cuenta a Coll C. (2015), al considerar las TIC como instrumentos mediadores de los procesos intra e inter-psicológicos implicados en la enseñanza y en el aprendizaje, de tal manera que las TIC permitieran hacer cosas que en su ausencia no serían posibles.

Desde este punto de vista, se seleccionó *Sites* de Google como una herramienta que permitió a los estudiantes la gestión, recolección, organización y divulgación de su actividad matemática de investigación: ¿cuánta agua consumimos en nuestro colegio? De esta manera, el sitio creado por los estudiantes sirvió como medio para impulsar el aprendizaje activo a partir de la creación de contenidos propios, al tiempo que movilizaban procesos de competencia matemática y desarrollaban otros tipos de habilidades como la búsqueda de información, pensamiento crítico, toma de decisiones y acuerdos, trabajo colaborativo, entre otras.

A continuación se muestra una sección del sitio publicado en Google Sites por el grupo 1 (G1), integrado por los estudiantes E2, E6, E10 y E24.

Figura 23 Producción G1: sección su sitio publicado



① Fuente: Fuente: Sitio creado por el G1 <https://sites.google.com/view/abpmatcarbonell/>

Dado que en el ABP la retroalimentación y el seguimiento de los avances debe ser una acción constante, una herramienta como Padlet, facilitó que el docente pudiera observar las actualizaciones y publicaciones de los grupos a fin de entregar retroalimentación oportuna que permitiera ajustar las tareas y actividades desarrolladas.

Otro aspecto importante del uso de las TIC fue su mediación en la actividad matemática como herramienta para la búsqueda de información, representación, exploración, solución de problemas, la promoción de tareas de colaboración y comunicación de resultados. En este contextos las TIC permitieron que los alumnos desarrollaran habilidades para ser miembros activos, escuchar a otros, y reconocer las contribuciones de los demás. (Santos Trigo, 2016)

4.3 Movilización de la competencia planteamiento y resolución de problemas

Para caracterizar la movilización de la competencia matemática planteamiento y resolución de problema, se tuvo como punto de partida el modelo teórico a priori (MTAP) propuesto por García et al (2013) en su investigación. Dicho modelo se describe en el marco teórico de esta investigación y permite describir y explicar la actividad matemática del estudiante, en el marco de resolver tareas matemáticas y desarrollar procesos

matemáticos asociados a la competencia en mención en torno al objeto matemático razones y proporciones.

Para el diseño de las actividades de aprendizaje dentro del proyecto, contextualizadas con el objeto matemático razones y proporciones, se identificó primero la situación problema del contexto de los estudiantes (¿cuánta agua consumimos en el colegio?), pertinente con la competencia a movilizar. Esta tarea central más allá de la competencia PRP, involucra la matematización (vertical y horizontal) que consiste en extraer problemas del entorno en lenguaje natural y llevarlo al lenguaje matemático para ser resueltos (Rico & Lupiañez, 2008); por tanto, la actividad – problema propuesta puso a los estudiantes ante situaciones que movilizaron todos los procesos de la competencia y les permitió alcanzar las expectativas de aprendizaje que se propusieron, a corto y largo plazo.

Cada uno de los procesos que involucra la competencia plantear y resolver problemas, se analizan a partir de tres momentos:

Actividades matemáticas – Niveles de complejidad – Procesos requeridos.

Las actividades matemáticas de aprendizaje de complejidad creciente, planteadas en relación con el objeto matemático razones y proporciones, fueron diseñadas por el docente – investigador para caracterizar las actuaciones de los estudiantes de grado séptimo en un nivel de dominio específico, en el que se estima la relación de los contenidos y los procesos matemáticos que deben movilizarse, reflejados en los tres saberes de la competencia:

El saber conocer: se basa en procesos cognoscitivos, conceptos y teorías del objeto matemático razones y proporciones, su estructura matemático, sus representaciones y sus fenómenos aplicados en las matemáticas y otras ciencias, para resolver las tareas matemáticas propuestas en el proyecto.

El saber hacer: se refiere al desempeño con base en procedimientos, cuyos componentes son las habilidades técnicas y procedimentales, para resolver los problemas relaciones con razones y proporciones.

El saber ser: aborda los procesos afectivo – motivacionales de las competencias, cuyos componentes son las actitudes y los valores; las actitudes son disposiciones al resolver los problemas propuestos y al plantear otros afines con su entorno, teniendo en cuenta el deseo y la voluntad por dar solución a las situaciones problema planteadas, constituyéndose a su vez una puesta en práctica de los valores al actuar de una manera determinada.

Para esta investigación, el modelo teórico se adaptó en razón a que la actividad matemática de los estudiantes se realiza en el marco del ABP. En la figura 24 se presenta el modelo elaborado para caracterizar la movilización de la competencia matemática plantear y resolver problemas, con cada uno de sus componentes.

Figura 24 Adaptación del modelo teórico a priori propuesto por García et al (2013)



Dicho modelo fue importante porque permitió articular los componentes de la competencia matemática con la actividad matemática de aprendizaje, los objetivos de las tareas y las formas de evaluación, es decir, planificar el desarrollo del proceso de movilización de la competencia matemática cuando el estudiante resuelve tareas y desarrolla procesos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción con complejidad creciente.

Es importante destacar que el proceso de evaluación de la competencia no se agota en la clásica heteroevaluación del profesor, centrada solo en lo cognitivo. En ese sentido, la evaluación tiene en cuenta los aspectos actitudinales, metacognitivos, volitivos y de uso social de la competencia apoyada en el enfoque socioformativo de Tobón, Pimienta y García (2010), a partir de los cuales se adaptaron los instrumentos de valoración de la competencia.

En el aspecto afectivo (D'Amore, Díaz Godino, & Fandiño Pinilla, 2008) se considera que para desarrollar competencias matemáticas implica también un “desear conocer”, un “desear hacer”, una manifestación expresada como volición y actitud. Así las cosas, D'Amore, Díaz Godino, y Fandiño Pinilla (2008) en el aspecto afectivo enfatizan en la disposición, la voluntad y el deseo que manifiesta el estudiante a dar respuesta a solicitudes de conocimiento que pueden ser externas o internas, por lo que para esta investigación se seleccionó como proceso afectivo la *disposición* de los estudiantes a participar, involucrarse, argumentar, preguntar, sustentar, proponer y, en síntesis, comunicarse con la comunidad de aprendizaje de la que forma parte: la clase.

En el aspecto de tendencia de acción se seleccionó como proceso de la competencia, la *persistencia*. Esta se concibe como la acción continua que realiza el estudiante en el propósito de resolver un problema y en consecuencia el no abandono de lo iniciado, sin consideración del tiempo, hasta encontrar una solución que considera correcta.

Con el fin de describir las actuaciones, actitudes y desempeños de los estudiantes y en ese sentido observar la movilización de la competencia PRP, se diseñó una rúbrica de valoración de la competencia (Anexo E), como instrumento de observación.

A continuación se muestra la estructura de la rúbrica propuesta:

Tabla 25. Estructura de la rúbrica de desempeño

RÚBRICA DE DESEMPEÑO COMPETENCIA PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS						
Componente cognitivo						
Proceso	Criterio de evaluación	Nivel 1 Preformal (Ausente)	Nivel 2 Receptivo (Inicial)	Nivel 3 Resolutivo (En proceso)	Nivel 4 Autónomo (Esperado)	Nivel 5 Estratégico (Destacado)
P1	P1C01	P1C01D1	P1C01D2	P1C01D3	P1C01D4	P1C01D5
	P1C02	P1C02D1	P1C02D2	P1C02D3	P1C02D4	P1C02D5
	P1C03					
P2	P2C04					
	P2C05					
	P2C06					
P3	P3C07					
	P3C08					
	P3C09					
Componente afectivo						
P4	P4C10	P4C10D1				
	P4C11					
	P4C12					
Componente de tendencia a la acción						
P5	P5C13					P5C13D5

Fuente: elaboración propia

Los procesos matemáticos de la competencia matemática PRP, a los cuales los estudiantes deben recurrir para resolver las situaciones propuestas, desde el componente cognitivo (saber conocer) comprenden: comprender el problema, diseñar y ejecutar un plan de acción, revisar la tarea e interpretar la respuesta a la luz del problema. Como en algunos estudiantes se observó cierta dificultad para conceptualmente separar la planificación y el plan de acción, se convino unir estos dos procesos en uno solo que se denominó diseñar y ejecutar un plan de acción.

Por otro lado, desde el componente afectivo (saber ser), se analizó el proceso de disposición y desde el componente de tendencia de acción (saber hacer), se describe la persistencia.

En la competencia matemática PRP los estudiantes deben comprender que la tarea propuesta debe ser cercana a sus realidad, es decir, estar en zona de dominio próximo, de esta manera, los problemas diseñados o seleccionados, no fueron de cualquier tipo, sino que intentaban colocar al estudiante ante numerosas situaciones cada vez más complejas y realistas (contextualizadas) donde movilizara todos los aspectos de la competencia (recursos cognitivos, actitudes, destrezas y valores) y al tiempo que lograba los objetivos propuestos en el ABP.

En consecuencia, seleccionar y formular los problemas a utilizar no fue una tarea fácil ni automática. Entre otros porque, en primer lugar, requiere de la aceptación de lo que se debe entender por problema matemático. Con base en el marco teórico, cabe entender un problema matemático como una tarea no familiar ni rutinaria para los alumnos que les brinde la oportunidad de conectar y generar distintos tipos de conocimientos matemáticos así como estrategias de resolución, al tiempo que estimular y potenciar sus procesos de razonamiento, representación y argumentación, generando, cierto interés en implicarse en ellos para intentar resolverlos.

Por otro lado, se tuvo en cuenta el diseño de una rejilla de orientación (anexo C) para ayudar a los estudiantes al desarrollo de sus procesos metacognitivos y de autorregulación. Dicha rejilla de orientación, aunque implicaba una mayor inversión de tiempo en los estudiantes, tuvo como propósito acompañar al alumno en su aprendizaje como un resolutor de problemas autónomo, regulando por sí mismos las acciones vinculadas a resolver problemas matemáticos lo que, a la vez, conduce a pensar matemáticamente.

El factor inversión de tiempo se deja ver en lo que manifiesta el estudiante E14 en la entrevista:

E14: Nosotros usamos la rejilla de orientación y pensamos que es muy buena para guiarlo a uno, pero al tiempo uno siente que le quita tiempo, porque uno quiere avanzar y hay que estar pendiente de ir llenando a medida que se resuelve el problema.

Los problemas seleccionados están basados en distintos contextos y se formularon de manera verbal y por escrito en el documento guía del proyecto para ser resueltos en el cuaderno, específicamente en el apartado que se ha reservado para el desarrollo de la competencia PRP⁹. En ningún momento se restringieron las herramientas matemáticas a utilizar para resolución de los distintos problemas, sin embargo, estos, una vez resueltos, debían ser fotografiados y subidos al sitio creado en formato de imagen.

4.3.1. Caracterización de la competencia matemática planteamiento y resolución de problemas

La caracterización de la movilización de la competencia matemática PRP se realiza a través del modelo propuesto, el nivel de dominio y la descripción de los componentes de la competencia involucrados que se definen de acuerdo con las actuaciones, desempeños y actitudes de los estudiantes al desarrollar las actividades matemáticas de aprendizaje propuestas en el proyecto.

La información de lo acontecido con los estudiantes, sus actuaciones y movilizaciones al asumir las 12 tareas o problemas propuestos, se obtuvieron de las observaciones directas, entrevista, diarios de aprendizaje del estudiante, diario de campo del docente y videograbaciones. Para este ejercicio se diseñó una matriz de registro (tabla

⁹ Como elemento de la cultura de aula el uso del cuaderno es una herramienta importante. En ese sentido, el cuaderno de matemáticas se ha dividido en tres apartados. El primero llamado actividades matemáticas de aprendizaje, un segundo, orientando al planteamiento y resolución de problemas y el tercer apartado tiene como propósito contener los diarios de aprendizaje. De esta manera se aprecia que la resolución de problemas ya hace parte de las costumbre sociomatemáticas del aula.

26), que facilita el análisis de los resultados de las actividades con el objeto matemático razones y proporciones.

Tabla 26. Fragmento de la matriz de registro y análisis de desempeño de la competencia

Componente de la competencia	Procesos	Criterio de evaluación	Problema n (Pbn)			
			E1	E2	E3	E4
COGNITIVO	Comprender el problema P1	C01. Identificar, interpretar y relacionar las tareas que pide investigar el problema y las preguntas que hay que responder.				
		C02. Identificar, interpretar y relacionar los datos de cualquier tipología (gráficas, numéricas...), las magnitudes y las unidades que están presentes en el problema.				
		C03. Expresar (representar o ejemplificar) la situación planteada en el problema mediante estructuras concretas propias (dibujos, relaciones, diagramas, descripciones, resúmenes).				
	Diseñar y ejecutar un plan de acción P2	C04. Para cada pregunta formulada planificar y aplicar alguna estrategia o proceso de resolución del problema.				
		C05. Encontrar los datos necesarios (reidentificarlos, si están expuestos en el problema o, si no aparecen de manera explícita, deducirlos con las técnicas necesarias) y los razonamientos o algoritmos que permitan aplicar la estrategia establecida.				
		C06. Aplicar y exponer la estrategia considerada, relacionado los datos y razonamientos o algoritmos necesarios de manera clara.				
	Revisar la tarea P3	C07. En caso tal, detectar partes del problema que no fueron bien interpretadas, o en las que los procedimientos escogidos no funcionan. Replantearlos con una nueva estrategia y todo aquello que así lo requiere (nuevas representaciones/ejemplificaciones o experimentación del problema, reidentificar los datos, aplicar algoritmos o razonamientos alternativos).				
		C08. Si el problema lo permite, explorar y encontrar más de una estrategia para resolverlo.				
		C09. Exponer la realización de las tareas pedidas y preguntas formuladas con coherencia y de manera clara y razonada.				

AFECTIVO	Disposición P4	C10. Participar activamente con voluntad e interés en la solución del problema.				
		C11. Usar estrategias creativas en la solución del problema				
		C12. Escuchar y cuestionar respetuosamente las opiniones y puntos de vista de los compañeros.				
TENDENCIA DE ACCIÓN	Persistencia P5	C13. Insistir en continuar con la solución del problema a pesar de los obstáculos y dificultades presentadas.				

Fuente: elaboración propia.

La matriz para valorar la competencia PRP a partir de la rúbrica, tiene los siguientes elementos: Pb_n es el problema propuesto, P_n , corresponde a los cinco procesos identificados, C_n , es el criterio asociado al proceso P, y D_i corresponde al descriptor en donde se ubica el grado de desempeño de la competencia o nivel de dominio desde uno (1) hasta cinco (5), donde:

- D1: nivel de dominio preformal o ausente.
- D2: nivel de dominio receptivo o inicial.
- D3: nivel de dominio resolutivo o en proceso.
- D4: nivel de dominio autónomo o esperado.
- D5: nivel de dominio estratégico o destacado.

Los instrumentos utilizados a lo largo proyecto proporcionaron datos de distinta naturaleza y para distintos fines. Ante la cantidad de información obtenida ha sido necesario seleccionar parte de los datos, centrándome en los observablemente más ricos, y distinguir entre datos primarios y datos secundarios, entendiendo por datos primarios aquellos que han dado información directa y más relacionada con el tercer objetivo específico de la investigación y que, como tales, han sido los datos fundamentales;

mientras que los datos secundarios, son aquellos que han proporcionado informaciones complementarias a las anteriores. En ese sentido, este análisis se basará fundamentalmente en las resoluciones de los estudiantes a los problemas propuestos.

Así pues, los datos producidos, interpretados y analizados de acuerdo con los referentes teóricos antes descritos, se constituyen en el principal soporte para la presentación de los resultados en los componentes cognitivo, afectivos y de tendencia de acción, como subcategorías de análisis de la categoría planteamiento y resolución de problemas. En ese sentido, para el análisis, se tuvieron en cuenta los problemas Pb1, Pb2, Pb3, Pb4, Pb5, Pb6, Pb7, Pb9 y Pb12 (tarea central), que se detallan en el anexo D.

No obstante, aparecerán algunos fragmentos de los diversos problemas que a la luz de este objetivo específico resultan interesantes y que por lo tanto aportaron información importante a la investigación. Sin embargo, al ser el problema 12 (Pb12), el reto central, aparecerá a lo largo del análisis de todos los componentes de la competencia y procesos asociados que se describen, ya que este evidencia con mayor profundidad la movilización de las actuaciones de los estudiantes.

4.3.1.1 Componente cognitivo.

Para analizar el componente cognitivo se consideran cada uno de los procesos asociados y los respectivos criterios de evaluación de acuerdo con las producciones de los estudiantes. Los procesos del componente cognitivo fueron identificados, fundamentalmente desde el modelo de Polya (1965) que distingue cuatro fases que el autor considera convenientes para favorecer la enseñanza de la resolución de problemas: comprender el problema, concebir un plan de acción, ejecución del plan y visión retrospectiva. Sin embargo, para el diseño de la rúbrica de valoración de la competencia y la rejilla de orientación que sirve como guía al estudiante durante la resolución del problema, se tuvieron en cuenta los aportes teóricos de Schoenfeld (1982), Villalonga

Pons (2017), D'Amore, Godino y Batanero (2008), Callejo (1994), Carrillo (1996), Santos-Trigo (2007) y Mason, Burton y Stacey (1988).

A continuación se analizan e interpretan los resultados obtenidos en cada uno de los procesos del componente cognitivo de la competencia PRP, a partir de las producciones de los estudiantes y los diversos instrumentos aplicados en la investigación.

Proceso 1. Comprender el problema.

En este proceso se buscaba que el estudiante le atribuyera significado al enunciado del problema, el contexto en el que se sitúa y las condiciones del mismo. Comprender el problema implica ciertos heurísticos como: releer el enunciado las veces que sea necesario e imaginar mentalmente la situación, expresándolo en otros términos o con otras palabras, la traducción de la situación/problema planteada, hacer anotaciones, representaciones (gráficas, verbales, icónicas), extraer los datos explícitos e implícitos, los objetivos del problema.

Para analizar este proceso, se tuvieron en cuenta los siguientes criterios de evaluación:

C01. Identificar, interpretar y relacionar las tareas que pide investigar el problema y las preguntas que hay que responder.

C02. Identificar, interpretar y relacionar los datos de cualquier tipología (gráficas, numéricas...), las magnitudes y las unidades que están presentes en el problema.

C03. Expresar (representar o ejemplificar) la situación planteada en el problema mediante estructuras concretas propias (dibujos, relaciones, diagramas, descripciones, resúmenes).

Se empieza este análisis con lo acontecido en el problema 1 (ver tabla 27).

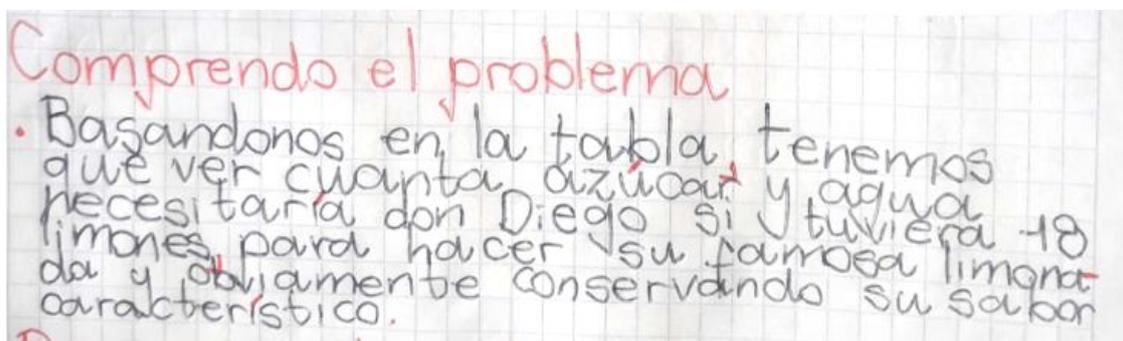
Tabla 27. Ficha de caracterización del problema 1 (Pb1)

Fuente	Nivel de complejidad	Contexto	Nombre del problema	Característica del soporte	Modalidad de trabajo
Adaptación DBA V.2 MEN (2016)	Reproducción	Vida cotidiana	La limonada de Don Diego	Por escrito con imagen descriptiva	Individual

Fuente: elaboración propia

Este primer problema hizo parte del grupo de reproducción y se resolvió de manera individual en la cuarta sesión de trabajo de la implementación del ABP. En este problema se pide encontrar las cantidades respectivas de azúcar y agua, al cambiar la receta de 6 limones a 18 limones, con el fin de conservar el sabor característico de la limonada, es decir, manteniendo la proporción.

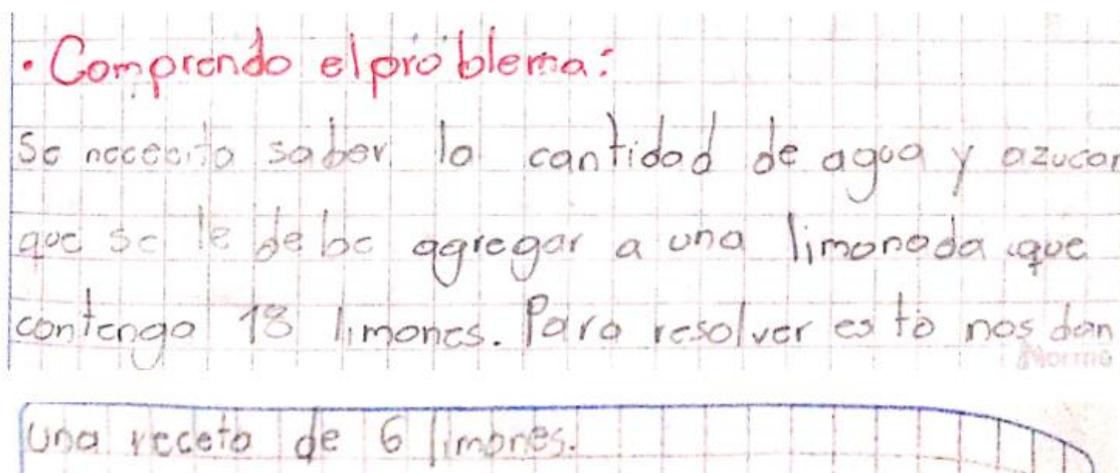
En las producciones que siguen a continuación (figuras 25 y 26) vemos como los estudiantes (E2) y (E4), en el proceso de comprensión, identifican e interpretan los datos del problema y la tarea que se pide investigar.

Figura 25. Producción proceso P1: comprender el problema Pb1_E2

[Basándonos en la tabla, tenemos que ver cuánta azúcar y agua necesitaría Don Diego si tuviera 18 limones, para hacer su famosa limonada y obviamente conservando su sabor característico].

Cuando (E2) se refiere a que la limonada debe seguir conservando su sabor característico, deja claro que debe mantener las proporciones en la receta de la limonada.

Figura 26. Producción proceso P1: comprender el problema Pb1_E4



[Se necesita saber la cantidad de agua y azúcar que se debe agregar a una limonada que contenga 18 limones. Para resolver esto nos dan una receta de 6 limones.]

De manera paralela, se observa que al (E4) al advertir que “para resolver esto nos dan una receta de 6 limones”, tiene certeza de que hará uso de una razón.

El siguiente episodio ilustra lo anteriormente expresado.

E4: Yo ya analicé que por cada 6 limones él utiliza 1 jarra de agua, o sea que con 12 limones necesita 2 jarras de agua, con 18 limones, 3 jarras de agua y así sucesivamente.

D_Inv: ¿Podrías decir cuál es la razón entre la cantidad de agua y la cantidad de limones?

E4: Sí, profe. La razón es 1 a 6. O sea por cada jarra de agua se necesitan 6 limones.

(E4) identifica una situación de razón en el problema y es capaz de relacionar claramente las magnitudes y unidades que están presentes en el problema, evidenciando la comprensión del mismo.

En la comprensión del problema los estudiantes evidenciaron la comprensión por un lado cualitativa, al entender el significado del texto; cuantitativa, al conocer la relación entre las variables y saber verbalizarla y por otro lado conceptual al expresar las comprensiones anteriores mediante expresiones matemáticas (ver tabla 28 en la cual se

muestran los niveles de dominio alcanzados por E1, E12 y E25 en el proceso “comprender el problema” relativo al problema 1).

Tabla 28. Niveles de dominio proceso “comprender el problema” Pb1

Componente de la competencia	Procesos	Criterio de evaluación	Problema 1 (Pb1)		
			E1	E12	E25
COGNITIVO	Comprender el problema P1	C01. Identificar, interpretar y relacionar las tareas que pide investigar el problema y las preguntas que hay que responder.	D5	D5	D5
		C02. Identificar, interpretar y relacionar los datos de cualquier tipología (gráficas, numéricas...), las magnitudes y las unidades que están presentes en el problema.	D5	D5	D5
		C03. Expresar (representar o ejemplificar) la situación planteada en el problema mediante estructuras concretas propias (dibujos, relaciones, diagramas, descripciones, resúmenes).	D5	D5	D5

Fuente: elaboración propia.

Comprender el problema en el caso del problema 12 (tarea central del proyecto).

Tabla 29. Ficha caracterización del problema 12 (Pb12)

Fuente	Nivel de complejidad	Contexto	Nombre del problema	Característica del soporte	Modalidad de trabajo
Propia	Reflexión	Vida cotidiana	¿Cuánta agua consumimos en el colegio?	Por escrito (abierto con condiciones y posibles recursos o materiales)	Grupal

Fuente: elaboración propia

Para el caso de la tarea o problema central del proyecto (Pb12), el cual constituye desde la categorización de tareas propuestas por Niss, 2002; Mora y Rosich, 2011; Rico y Lupiañez, 2008, un problema de reflexión o de alto rango (Blanco Nieto, Cárdenas Lizarazo, & Caballero Carrasco, 2015), en virtud de las capacidades cognitivas y procedimentales que demanda (ver tabla 29). Los niveles de dominio alcanzados por los

grupos (G1), (G2) y (G3) en Pb12, en el proceso de comprender el problema, se muestran en la tabla 30.

Tabla 30. Niveles de dominio proceso "comprender el problema" Pb12

Componente de la competencia	Procesos	Criterio de evaluación	Problema 12 (Pb12)		
			G1	G2	G3
COGNITIVO	Comprender el problema P1	C01. Identificar, interpretar y relacionar las tareas que pide investigar el problema y las preguntas que hay que responder.	D5	D5	D5
		C02. Identificar, interpretar y relacionar los datos de cualquier tipología (gráficas, numéricas...), las magnitudes y las unidades que están presentes en el problema.	D5	D5	D5
		C03. Expresar (representar o ejemplificar) la situación planteada en el problema mediante estructuras concretas propias (dibujos, relaciones, diagramas, descripciones, resúmenes).	D5	D5	D5

Fuente: elaboración propia

La figura 27 muestra lo descrito en el proceso de comprensión del problema por parte de (G1).

Figura 27. Producción proceso P1: comprender el problema Pb12_G1

Comprendemos el problema
<p>Lo que nos piden en el problema es estimar el consumo de agua en la jornada de la tarde en el colegio. Es extraño porque no nos están haciendo una pregunta con cantidades, sino que simplemente nos dicen que calculemos cuánta agua consumimos. Sin embargo, comprendemos el problema y lo que pide. Pensamos que es un problema muy original y eso nos gusta.</p> <p>Sabemos que debemos calcular el agua que se consume por zonas: en los baños (hombres y mujeres), para el aseo, la cafetería y el regado de las plantas.</p>

Fuente: Sitio creado por el G1 <https://sites.google.com/view/abpmatcarbonell/>

Los alumnos aquí identifican una situación problema a la que no estaban acostumbrados, pues ahora se trata, como lo denominan Abrantes (1989), Callejo (1998) y Foong (2013), de una situación o problema realístico, que en tal sentido ya no es rutinario. Cuando usan la expresión “(...) *Y eso nos gusta*” se pone de manifiesto el papel

tan importante que juega la afectividad en la resolución de problemas. (D'Amore, Díaz Godino, & Fandiño Pinilla, 2008).

Por otro lado, a pesar que el problema en su enunciado aparece como una tarea abierta: determinar la cantidad de agua que se consume en el colegio, específicamente en la jornada de la tarde, presenta unas condiciones que fueron muy bien identificadas por parte de los alumnos.

En general, después de promediar los puntajes en la rúbrica, se establece que los alumnos movilizan el proceso de **comprender el problema** entre el nivel de dominio **autónomo** (esperado) y **estratégico** (destacado).

Proceso 2. Diseñar y ejecutar un plan de acción.

Para analizar este proceso, se tuvieron en cuenta los siguientes criterios de evaluación:

C04. Para cada pregunta formulada planificar y aplicar alguna estrategia o proceso de resolución del problema.

C05. Encontrar los datos necesarios (reidentificarlos, si están expuestos en el problema o, si no aparecen de manera explícita, deducirlos con las técnicas necesarias) y los razonamientos o algoritmos que permitan aplicar la estrategia establecida.

C06. Aplicar y exponer la estrategia considerada, relacionando los datos y razonamientos o algoritmos necesarios de manera clara.

El análisis que se desarrolla aquí se centra en el estudio del diseño y ejecución de un plan de acción. Se busca enfatizar la importancia de no sólo haber encontrado los procesos que definen una estrategia de resolución al problema con sus respectivos razonamientos y algoritmos, sino de plasmarlo y detallarlo de manera clara en el soporte donde se desarrolla la resolución del problema (inicialmente el soporte fue el cuaderno para posteriormente subir las fotografías al *Sites* de Google). Aquí es importante puntualizar que en este contexto, entendemos por estrategia el conjunto de acciones,

procesos y procedimientos, que, en su conjunto, permiten al alumno definir un plan de acción con la intención de dar una respuesta a las preguntas o quehaceres establecidos en el problema. En este sentido recordamos que no necesariamente debe por qué tratarse de una estrategia reconocida como tal, sino que se percibe como el conjunto de procesos que establece el alumno para dar respuesta a las cuestiones planteadas. En este sentido, la atención como docente investigador está en analizar aquellas resoluciones en las que los alumnos demuestran haber indagado en su quehacer para poder explicar la estrategia que les ha permitido determinar un camino.

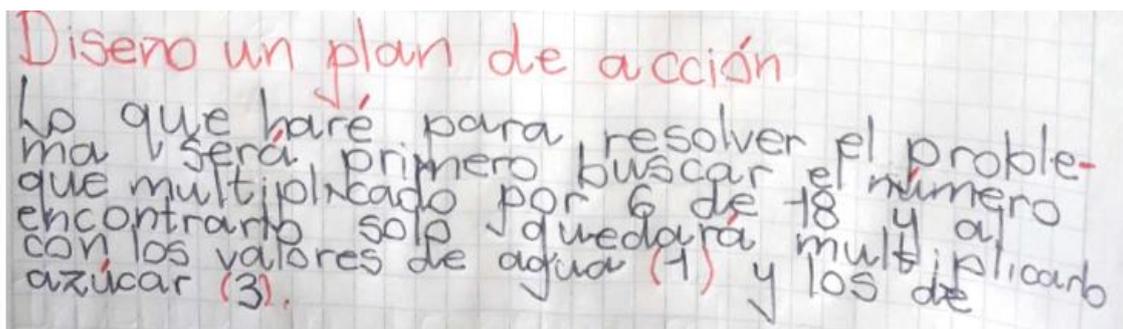
El análisis permite distinguir entre: por un lado, la naturaleza de los procesos desarrollados que, en su conjunto, permiten al estudiante llegar a alguna conclusión sobre la situación que genera el problema y, por otro, su verbalización, es decir, cómo el alumno plasma por escrito las acciones vinculadas al proceso que piensa y desarrolla, o partes del mismo, para afrontar la situación descrita en el problema.

Para el análisis de este proceso se recurre a los quehaceres de los alumnos en función de la naturaleza que los caracteriza, por lo que será necesario establecer qué se entiende por cada una de las palabras que pretenden definir dichos quehaceres. La primera palabra es la de proceso, que se entiende como el conjunto de acciones que se realizan para llegar a un fin. En este sentido se observará que las acciones que intervienen en un determinado proceso no solo pueden ser diferentes entre sí, sino también de naturaleza distinta. Así, con base a las evidencias encontradas, se puede distinguir entre acciones de carácter mecánico, y otras de carácter creativo e incluso aquellas acciones caracterizadas por sus componentes argumentativos. El modo en que se ejecutan dichas acciones, sea de una u otra naturaleza, es lo que se entiende por procedimiento. Así, se puede interpretar procedimiento como la gestión de las distintas acciones que confina un proceso. Un proceso puede seguir un procedimiento. Así, cuando esta gestión sigue una estructura

concreta, cuando los pasos a considerar mantienen un orden predefinido, preciso y específico será cuando se habla de algoritmos. En cambio, cuando sea de tipo creativo, inventivo o imaginativo, será cuando se habla de heurísticas. Con estas consideraciones, se entiende por estrategia, el conjunto de todos los procesos, con todo lo que estos requieran, que ha permitido al alumno determinar alguna respuesta a las cuestiones expuestas en el problema.

Las figuras 28 y 29 muestran la manera como los estudiantes (E2) y (E4) diseñan un plan acción para la resolución del problema 1. (E2) planifica su estrategia a través de un registro verbal, mientras que (E4), utiliza una tabla para diseñar su estrategia.

Figura 28. Fragmento producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb1_E2



[Lo que haré para resolver el problema será primero buscar el número que multiplicado por 6 de 18 y al encontrarlo solo quedará multiplicarlo con los valores de agua (1) y los de azúcar (3)]

Figura 29. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb1_E4

• Diseño un plan de acción

Por cada 6 limones se necesita 1 litro de agua y 3 cucharadas de azúcar.

	Limones	Agua(L)	Azúcar(ca)
6	6	1	3
12	12	2	6
18	18	3	9
24	24	4	12

Basado me en la tabla anterior, planes hacer la serie y ir la comparando con la receta original.

En el diseño del plan de acción (E4) hace uso de la representación tabular, ayudándose de sumas de seis en seis para relacionar la cantidad de limones, con la cantidad de azúcar y de agua.

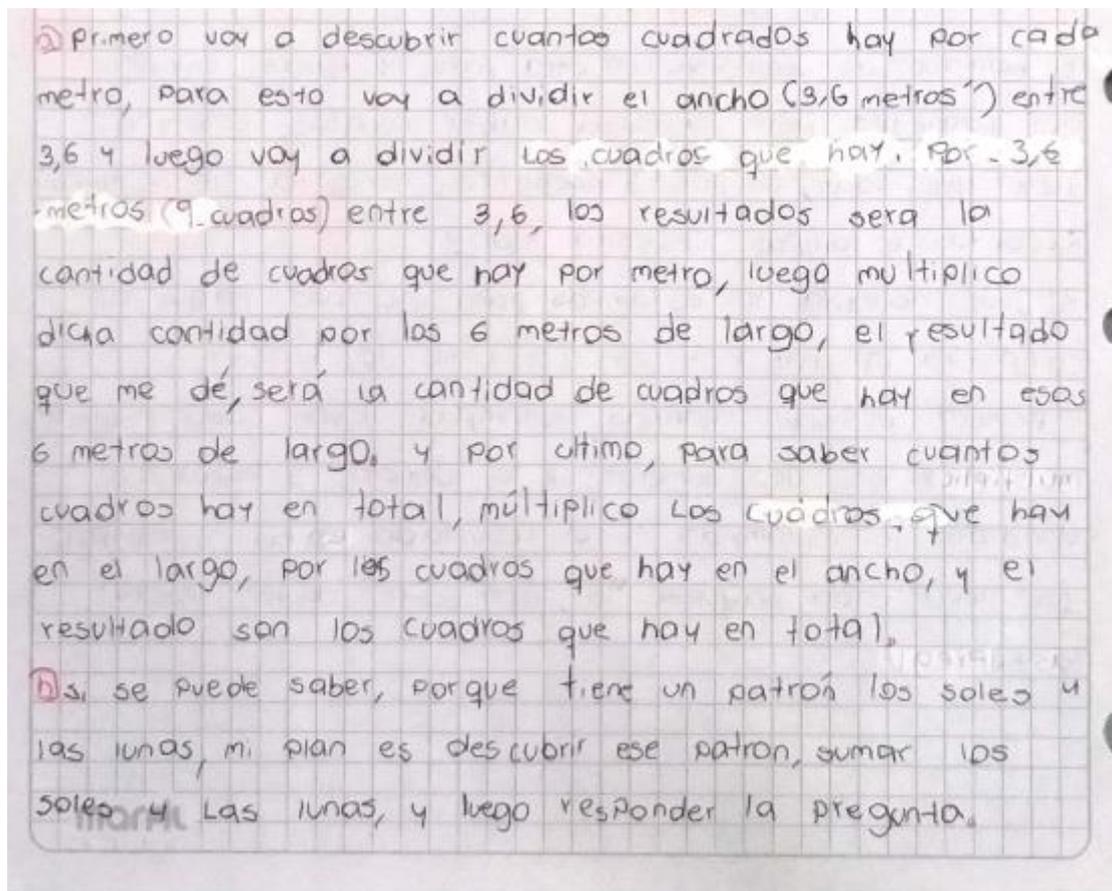
La figura 30, muestra el diseño del plan de acción para resolver el problema 4 (ver tabla 31) del estudiante E24 que pertenece al (G1). En el problema 4, pedía por un lado calcular la cantidad total de cuadros de dibujos de Soles y Lunas en una alfombra que está recogida y por otro lado, pedía definir cuántos cuadros contendrán un Sol y cuántos una Luna.

Tabla 31. Ficha de caracterización del problema 4 (Pb4)

Fuente	Nivel de complejidad	Contexto	Nombre del problema	Característica del soporte	Modalidad de trabajo
(Villalonga Pons, 2017)	Reproducción	Matemático	La alfombra de soles y lunas	Por escrito con imagen ilustrativa	Grupal

Fuente: elaboración propia.

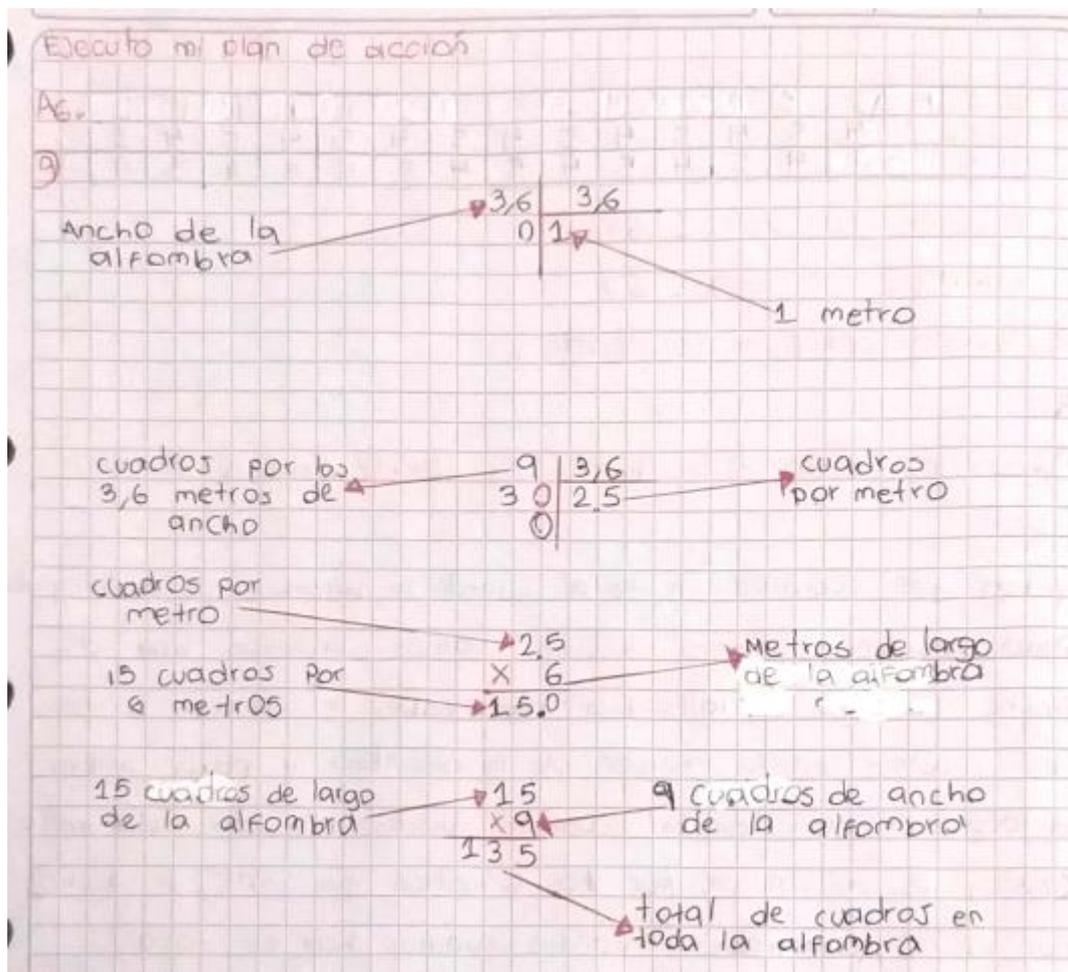
Figura 30. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb4_E24_G1 (Fragmento 1)



- [a) Primero voy a descubrir cuántos cuadrados hay por cada metro, para esto voy a dividir el ancho (3,6 metros) entre 3,6 y luego voy a dividir los cuadros que hay por 3,6 metros (9 cuadros) entre 3,6. Los resultados será (sic) la cantidad de cuadros que hay por metro, luego multiplico dicha cantidad por los 6 metros de largo, el resultado que me dé, será la cantidad de cuadros que hay en esos 6 metros de largo. Y por último, para saber cuántos cuadros hay en total, multiplico los cuadros que hay en el largo, por los cuadros que hay en el ancho, y el (sic) resultados son los cuadros que hay en total.
- b) Sí se puede saber porque tiene un patrón los soles y las lunas, mi plan es descubrir ese patrón, sumar los soles y las lunas, y luego responder la pregunta]

El estudiante es capaz de estructurar un plan de acción para cada pregunta del problema formulada en el problema, identificando los datos necesarios (implícitos y explícitos) y exponiéndolos de manera clara.

Figura 31. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb4_E24_G1 (Fragmento 2)



[(...)9 cuadros por los 3,6 metros de ancho... 2,5 cuadros por metro $2,5 \times 6 = 15$ metros de largo de la alfombra... $15 \times 9 = 135 \rightarrow 135$ total de cuadros en toda la alfombra]

En la ejecución del plan el estudiante realiza las acciones que planeó. Inicialmente realiza una división que no aporta a la solución del problema. Después hace otra división entre la cantidad de cuadros y el ancho de la alfombra para conocer cuántos cuadros hay por metro lineal. Es importante el manejo de las magnitudes y unidades por parte del estudiante.

Al conocer que por cada metro lineal hay 2.5 cuadros multiplica esta cantidad por 6 que es el largo de la alfombra y con eso determina que la alfombra tiene 9 cuadros en su ancho y 15 cuadros en su largo, para un total de 135 cuadros.

Aquí es interesante resaltar la ausencia de algoritmos como la regla de tres o de valor perdido para conocer el número de cuadros en el largo de la alfombra. Esto resulta sumamente importante en esta investigación, pues demuestra la elaboración de estrategias personales, dando la oportunidad, como explica Blanco Nieto, Cárdenas Lizarazo, y Caballero Carrasco, (2015) a que los estudiantes experimenten con los datos.

D_Inv: Cuéntenme, ¿qué piensan hacer?... Bueno, antes de eso, ya comprendieron bien el problema

E31: Sí, profe.

D_Inv: ¿Qué se pide?

E31: Calcular la cantidad de cuadritos que hay en el largo de la alfombra.

D_Inv: ¿Qué más piden?

E12: Yo profe, yo digo... Ehh están pidiendo que digamos cuántos hay de cada uno.

D_Inv: ¿Cómo así de cada uno?

E12: Sí, que digamos cuántos Soles hay y cuántas Lunas hay en toda la alfombra, o sea, tanto el total como de cada una.

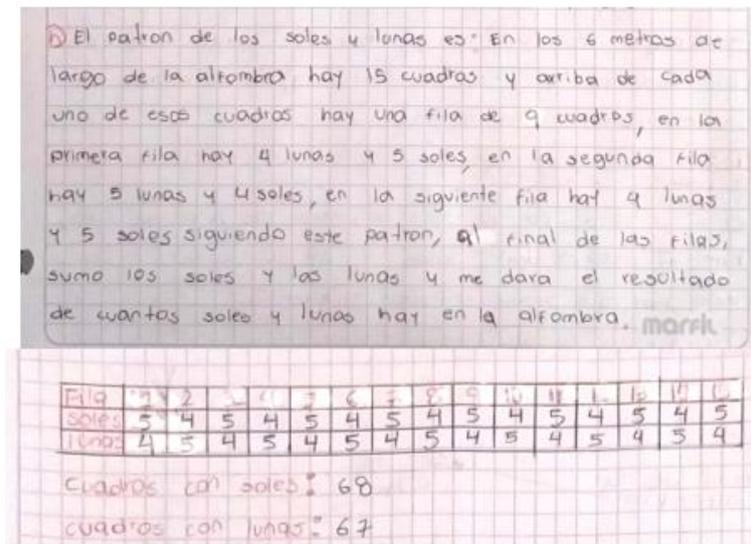
D_Inv: Muy bien. Ahora sí, ¿qué piensan hacer?

E24: pues profe, ya sabemos que en el ancho de la alfombra que mide 3,6 metros hay 9 cuadros, entonces, vamos a calcular cuántos cuadros hay en los 6 metros, o sea, en el largo de la alfombra.

Por otro lado, en las figuras 32 y 33 vemos el procedimiento llevado a cabo por E24_G1 y E12_G2 respectivamente. Mientras que en el (G1) realizaron un registro tabular antecedido de una descripción en la que relaciona los datos con las incógnitas del problema, en el (G2) usaron un registro icónico basado en la secuencia de Soles y Lunas. Aquí es importante analizar la manera como los alumnos se valen de estrategias no unívocas para la resolución de un mismo problema y que reflejan en buena medida lo que

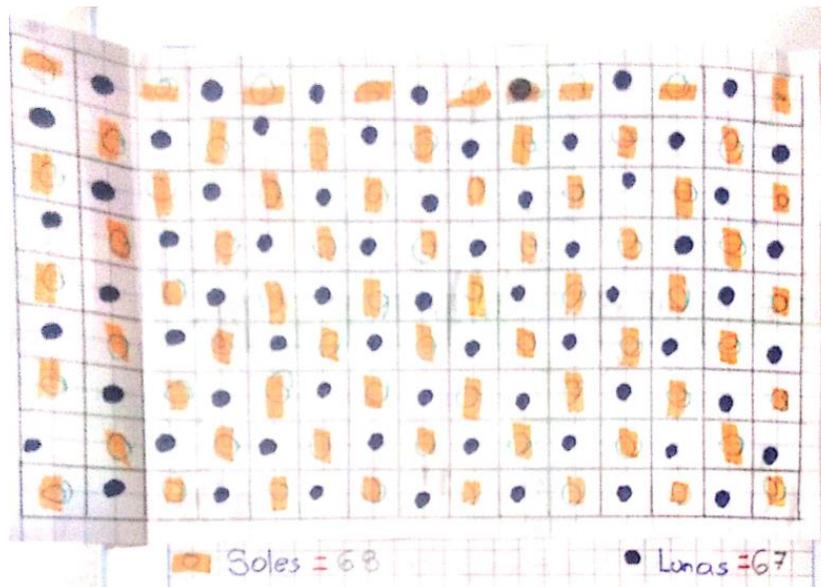
Schoenfeld (1992) reconoce como una característica de los buenos resolutores de problemas, al implementar estrategias creativas y flexibles, sin seguir necesariamente algoritmos.

Figura 32. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb4_E24_G1 (Fragmento 3)



[El patrón de los Soles y Lunas es: en los 6 metros de largo de la alfombra hay 15 cuadros y arriba de cada uno de esos cuadros hay una fila de 9 cuadros, en la primera fila¹⁰ hay 4 lunas y 5 soles, en la segunda fila hay 5 lunas y 4 soles, en la siguiente fila hay 4 lunas y 5 soles siguiendo ese patrón, al final de las filas, sumo los soles y las lunas y me dará el resultado de cuántos soles y lunas hay en la alfombra]

Figura 33. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb4_E12_G2



[Soles = 68 Lunas = 67]

¹⁰ (E24) habla de filas queriéndose referir a columnas.

Un elemento común a destacar en las dos producciones anteriores, es el rigor para exponer de forma clara y ordenada los procesos seguidos durante la ejecución del plan.

Observemos otro caso del proceso de diseño y ejecución del plan de acción llevado a cabo por E39 del grupo (G3) y E6 del grupo (G1) para resolver el problema 7. (Ver figura 34).

Figura 34. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E39_G3 (Fragmento 1)

Diseño plan de acción:
 Primero voy a hacer el dibujo que me pide que elabore (supongo que es para comprender mejor lo que está pasando), luego divido 160 (la altura del niño de prueba) con 100 (la longitud de su sombra) y el resultado va a ser cada cm de la sombra, luego multiplico ese resultado por 600 (que son los cm de la sombra del árbol) y el resultado final es la altura del árbol.

[Primero voy a hacer el dibujo que me pide que elabore (supongo que es para comprender mejor lo que está pasando), luego divido 160 (la altura del niño de prueba) con 100 (la longitud de su sombra) y el resultado va a ser cada cm de la sombra, luego multiplico ese resultado por 600 (que son los cm de la sombra del árbol) y el resultado final es la altura del árbol]

Figura 35. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E6_G1 (Fragmento 1)

Diseño un plan de acción:
 Basandome en el teorema de Pitágoras, y en la sombra del niño planeo saber la altura del árbol, primero tengo que multiplicar la sombra del niño hasta que su producto se acerque o de exactamente la sombra del árbol, así puedo saber cual es la parte de este, y así multiplico la altura del niño por el número anterior.

[Basándome en el teorema de Pitágoras, y la sombra del niño planeo saber la altura del árbol, primero tengo que multiplicar la sombra del niño hasta que su producto se acerque o de exactamente a la sombra del árbol, así puedo saber cuál es la parte de este, y así multiplico la altura del niño por el número anterior]

La producción de E39 hace parte del proceso de resolución del problema 7 (Pb7)

llamado “altura del árbol de mango del colegio” (Ver tabla 32)

Tabla 32. Ficha de caracterización del problema 7 (Pb7)

Fuente	Nivel de complejidad	Contexto	Nombre del problema	Característica del soporte	Modalidad de trabajo
Propia	Reflexión	Vida cotidiana	Altura del árbol de mango del colegio	Por escrito	Grupal

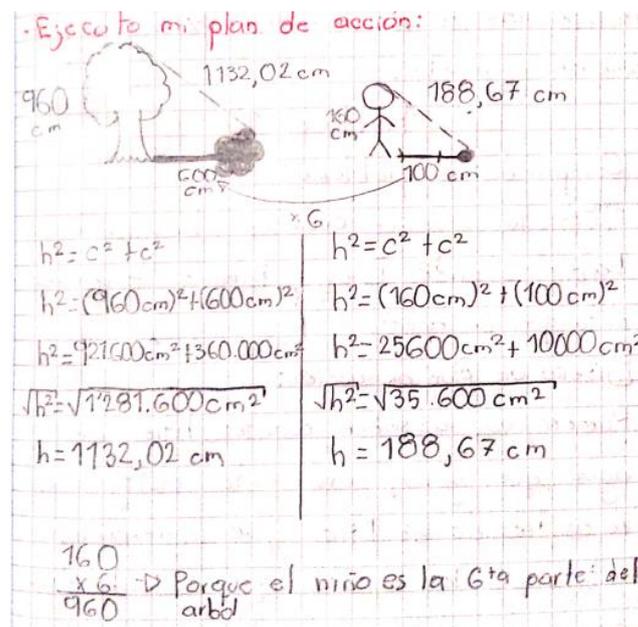
Fuente: elaboración propia.

En este problema se aborda una de las situaciones de proporcionalidad más comunes, relacionadas con la semejanza de triángulos y pertenece al grupo de reflexión dado que requiere de mayor exigencia para su interpretación, pues demanda que los estudiantes establezcan relaciones entre distintas representaciones de una misma situación. El problema además de pedir la altura del árbol, solicita un dibujo de dicha situación. A continuación se muestran las producciones de los estudiantes E39 y E6 en la ejecución del plan.

Figura 36. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E39_G3 (Fragmento 2)

The image shows a student's handwritten work on grid paper. On the left, there is a diagram titled "Ejecuto plan de acción". It depicts a tree with a height labeled "Altura del árbol = ???" and a shadow labeled "Sombra = 600 cm". Below the tree is a drawing of a person with a height labeled "160 cm Altura" and a shadow labeled "Sombra = 100 cm". On the right, there is a calculation: $160 \overline{) 600}$ with a quotient of 3.75. The student has written "1,6" next to the 160, and "Por cada cm de sombra" next to the 1,6. The final result is "altura del árbol \rightarrow 960,0".

Figura 37- Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E6_G1 (Fragmento 2)



En el caso de (E39), expresa de manera clara y organizada sus ideas y razonamientos en el diseño del plan, así mismo identifica matemáticamente las magnitudes que involucran el problema, de acuerdo con su modo de comprender la proporcionalidad. Mientras tanto (E6) reconoce que la longitud de la sombra del niño es la sexta parte de la longitud de la sombra del árbol, por tanto la altura del árbol es 6 veces la altura del niño. También se reconoce que realizó un proceso adicional que no se pedía en el problema: (E6) reconoce la formación de un triángulo rectángulo entre las alturas del árbol y el niño y sus respectivas sombras, a tal punto de calcular la longitud de las respectivas hipotenusas, usando el teorema de Pitágoras. (E39) por su parte halla el factor multiplicante a partir de la división entre la estatura del niño y la longitud de su sombra, para después multiplicar este cociente, que actúa matemáticamente como factor multiplicante por la longitud de la sombra del árbol y así calcular la longitud del árbol de mango del colegio. A continuación se destaca la argumentación de E39.

D_Inv: ¿Qué estrategia han definido?

E39: Profe, vamos a mirar la relación que hay entre la sombra del árbol y la sombra del niño.

D_Inv: ¿Cómo la pueden definir?

E39: Dividimos. Yo pienso que dividiendo 160 entre 100.

D_Inv: ¿Esas cantidades tienen alguna unidad de medida?

E39: centímetros. Son centímetros.

Es evidente que los estudiantes obvian las unidades en sus procesos, sin embargo, a la hora de exponer la solución del problema, las tienen en cuenta.

En la figura a continuación se observa cómo una estudiante aprovecha su representación icónica sin perder claridad y rigor matemático.

Figura 38. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb7_E10_G1



Diseñar y ejecutar un plan de acción en el caso del problema 12 (tarea central del proyecto).

Las figuras 39 y 40 ilustran fragmentos del proceso de diseño y ejecución del plan para el problema 12 por parte del grupo (G2). El diseño y la ejecución del problema 12 se realizaron en las sesiones 6, 7 y 9 de la implementación del proyecto ABP. (Anexo B).

Figura 39. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb12_G2 (fragmento 1)

Diseñamos y ejecutamos un plan de acción

Para el baño de hombres: tomamos un recipiente de 5 litros para mirar cuánto tiempo se demoraba en llenar a través del grifo del orinal.

Medimos con el cronómetro del celular y se demoraba 40 segundos. Como el grifo del orinal mantiene abierto durante toda la jornada, esto equivale a 6 horas (21600 segundos). Entonces vamos a analizar cuánto agua sale en todo ese tiempo.

Para esto vamos a dividir 5 litros entre 40 segundos para saber cuántos litros salen por cada segundo con el grifo abierto y después lo que nos de, lo multiplicamos por 21600 segundos. Este resultado sería la cantidad de agua que salen por el grifo en 6 horas que permanece abierto el orinal.

Para conocer el agua que se gasta en el lavado de las manos hacemos algo parecido pero para eso vamos a promediar cuánto tiempo se demora cada niño lavándose las manos. (vamos a hacer el promedio con 10 niños de los 265 que hay en toda la jornada de la tarde)

También vamos a mirar cuántas veces en el descanso se descarga la batería de los baños de hombres, y como ya leímos que las baterías gastan 4.8 litros miramos cuántas veces se descargan en el descanso. Tendríamos que pedir permiso en la segunda hora y quinta hora para investigar cuántas veces las descargan en ese tiempo.

Con esto al final sumáramos lo del orinal, lo del lavado de manos y lo de las baterías sanitarias y así sabríamos cuánta agua se consume en el baño de los hombres.

Fuente: Sitio creado por el G2 <https://sites.google.com/view/matejmcarbonell/>

Figura 40. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb12_G2 (fragmento 2)

$$5 \div 40 = 0.125$$

$$0.125 \cdot 21600 = 2700$$

2700 litros

2700 litros es lo que consumen los orinales del baño de los hombres

El fragmento del proceso “diseñar y ejecutar un plan de acción” por parte del grupo 2, constata que son capaces de elaborar y ejecutar una estrategia para cada condición formulada en el problema. Se observa cómo razonan acerca de los datos que necesitan de manera que pueden deducir aquellos datos que no aparecen explícitamente en el problema. Este aspecto evidencia que pueden verbalizar los procesos estratégicos (Mason, Burton, & Stacey, 1988) de manera argumentativa, pues presentan razones para justificar las acciones y procedimientos que van a ejecutar en términos en que lo plantea Sanmartí (2010).

Los niveles de dominio alcanzados por los grupos (G1), (G2) y (G3) en Pb12, en el proceso de diseñar y ejecutar un plan de acción, se muestran en la tabla 33.

Tabla 33. Niveles de dominio proceso "diseñar y ejecutar un plan de acción" Pb12

Componente de la competencia	Procesos	Criterio de evaluación	Problema 12 (Pb12)		
			G1	G2	G3
COGNITIVO	Diseñar y ejecutar un plan de acción P2	C04. Para cada pregunta formulada planificar y aplicar alguna estrategia o proceso de resolución del problema.	D5	D5	D5
		C05. Encontrar los datos necesarios (reidentificarlos, si están expuestos en el problema o, si no aparecen de manera explícita, deducirlos con las técnicas necesarias) y los razonamientos o algoritmos que permitan aplicar la estrategia establecida.	D5	D5	D5
		C06. Aplicar y exponer la estrategia considerada, relacionado los datos y razonamientos o algoritmos necesarios de manera clara.	D5	D5	D4

Fuente: elaboración propia.

Así pues al promediar las puntuaciones de la rúbrica, se establece que los alumnos movilizan el proceso **diseñar y ejecutar un plan de acción** entre el dominio **autónomo** (esperado) y **estratégico** (destacado).

Proceso 3. Revisar la tarea.

Este proceso es lo que Polya (1965) denomina visión retrospectiva y da cuenta entre otros aspectos, de la manera como el resolutor aprende a detectar los procesos donde se bloquea o comete un error, al tiempo que encuentra otras alternativas, o en otras palabras la manera, como el resolutor gestiona los atascos. (Mason, Burton, & Stacey, 1988).

Son varias las razones que conducen a una situación de atasco en un problema: falta de comprensión, representaciones inadecuadas, estrategias inadecuadas, datos o razonamientos inapropiados, errores de aplicación o explicaciones imprecisas. (Villalonga Pons, 2017).

En este proceso es el momento para mirar hacia atrás, así se haya llegado a la solución satisfactoria o incluso cuando se está a punto de abandonar el trabajo. Aquí será importante observar cómo los estudiantes releen lo que han hecho y se aseguran que lo han explicado todo y que han respondido de manera razonada, por lo que no solo se ven obligados a responder el problema, sino también a reorganizar las ideas trabajadas.

Para analizar este proceso, se tuvieron en cuenta los siguientes criterios de evaluación:

C07. En caso tal, detectar partes del problema que no fueron bien interpretadas, o en las que los procedimientos escogidos no funcionan, replantearlos con una nueva estrategia y todo aquello que así lo requiere (nuevas representaciones/ejemplificaciones o experimentación del problema, reidentificar los datos, aplicar algoritmos o razonamientos alternativos.

C08. Si el problema lo permite, explorar y encontrar más de una estrategia para resolverlo.

C09. Exponer la realización de las tareas pedidas y preguntas formuladas con coherencia y de manera clara y razonada.

Si bien la rejilla de orientación, a través de acciones que van registrando, les recuerda a los estudiantes revisar su tarea antes de darla por terminada o explorar incluso otras estrategias, la gran mayoría de estudiantes no examinan otras alternativas. A continuación se muestra un ejemplo en donde el grupo, a pesar que comprendieron el problema, diseñaron y ejecutaron una estrategia adecuada, responden el literal *e* del problema 9, llamado “llaves abiertas” (ver tabla 34), sin interpretar su resultado a la luz del problema.

Tabla 34. Ficha de caracterización del problema 9 (Pb9)

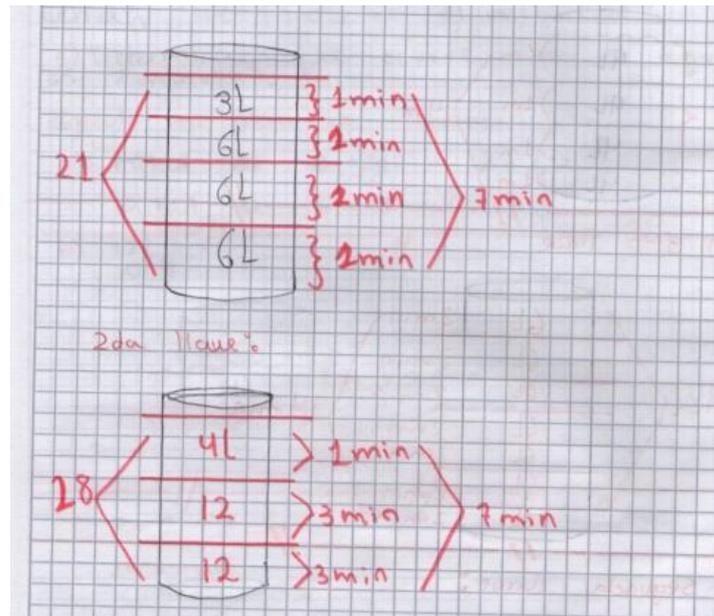
Fuente	Nivel de complejidad	Contexto	Nombre del problema	Característica del soporte	Modalidad de trabajo
Adaptación DBA V.2 MEN (2016)	Conexión	Vida cotidiana	Llaves abiertas	Por escrito	Grupal

Fuente: elaboración propia.

El Pb9 consistía en dos llaves abiertas simultáneamente encargadas de llenar un tanque cuya capacidad máxima era 42 litros. El literal *e* de Pb9 pedía que los estudiantes respondieran qué ocurre con el nivel de agua transcurridos 7 minutos. En el enunciado del problema afirma que la primera llave aporta 6 litros de agua cada 2 minutos, mientras que la segunda, aporta 12 litros de agua cada 3 minutos.

El grupo (G1) utiliza la estrategia que se muestra en la figura 41 para ejecutar su plan de acción.

Figura 41. Producción proceso P2: diseñar y ejecutar un plan de acción Pb9_E10_G1



A continuación se ilustra la respuesta dada a la petición del literal e.

Figura 42. Producción proceso P3: revisar la tarea Pb9_E10_G1

e) A los 7 minutos el nivel del agua estaría en 21 L, con la primera llave, mientras que la segunda estaría a los 28 L.

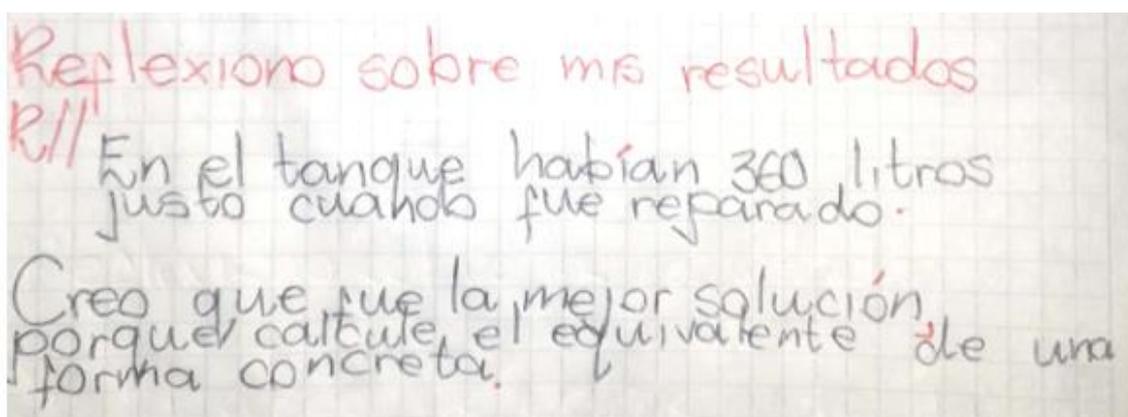
[A los 7 minutos el nivel del agua estaría en 21 L, (sic) con la primera llave, mientras que la segunda estaría a 28 L.]

A pesar que las respuestas dadas son correctas, ello no implica que la actividad de resolución de problemas está enteramente concluida (Blanco Nieto, Cárdenas Lizarazo, & Caballero Carrasco, 2015). Lo estará si el resolutor comprende y es capaz de explicar lo que ha hecho, cómo lo ha hecho y por qué sus acciones son apropiadas para esa situación. En ese sentido, el (G1), respondió que en 7 minutos por la primera llave habrían ingresado 21 litros y por la segunda llave, 28 litros. Dicha respuesta es matemáticamente correcta, pero a la luz del contexto del problema no es apropiada, puesto que en 7 minutos habrían ingresado 49 litros, sin embargo, el tanque solo tiene capacidad para 42 litros, lo que indica que el tanque ya se habría rebosado; por lo que la respuesta adecuada a la pregunta, podría ser: a los 7 minutos el tanque ya estaría rebosado.

Esto demuestra las diferencias entre el resultado del problema y la respuesta. El resultado es aquel que se obtiene al final de un procedimiento concreto, pero la respuesta serán pues las explicaciones a las cuestiones formuladas de manera argumentada, clausurando las soluciones encontradas y dando sentido global a las mismas, afianzando de este modo lo trabajado.

Por otro lado, se observó que los estudiantes tienen dificultades para explorar otras alternativas posibles una vez hayan solucionado el problema. Al respecto se muestra la producción de (E2) en la revisión de la tarea de Pb10, en la que manifiesta que fue la mejor solución, pero no fue posible conocer si exploró otras.

Figura 43. Producción proceso P3: revisar la tarea Pb10_E10



*[En el tanque habían (sic) 360 litros justo cuando fue reparado.
Creo que fue la mejor solución, porque calculé el equivalente de una forma concreta]*

Los niveles de dominio alcanzados por los grupos (G1), (G2) y (G3) en Pb12, en el proceso de diseñar y ejecutar un plan de acción, se muestran en la tabla 33.

Tabla 35. Niveles de dominio proceso "revisar la tarea" Pb12

Componente de la competencia	Procesos	Criterio de evaluación	Problema 12 (Pb12)		
			G1	G2	G3
COGNITIVO	Revisar la tarea P3	C07. En caso tal, detectar partes del problema que no fueron bien interpretadas, o en las que los procedimientos escogidos no funcionan. Replantearlos con una nueva estrategia y todo aquello que así lo requiere (nuevas representaciones/ejemplificaciones o experimentación del problema, reidentificar los	D5	D5	D5

		datos, aplicar algoritmos o razonamientos alternativos.			
		C08. Si el problema lo permite, explorar y encontrar más de una estrategia para resolverlo.	D3	D3	D3
		C09. Exponer la realización de las tareas pedidas y preguntas formuladas con coherencia y de manera clara y razonada.	D5	D5	D5

Fuente: elaboración propia.

Así pues al promediar las puntuaciones de la rúbrica, se establece que los alumnos movilizan el proceso **revisar la tarea** entre el dominio **resolutivo** (en proceso) y el **autónomo** (esperado).

4.3.1.2 Componente afectivo.

Las referencias citadas, (Schoenfeld, 1992; D'amore, Godino y Batanero (2008); Lester 1982), han demostrado la influencia de las actitudes en la actividad matemática. Lo que el alumno cree sobre las matemáticas influye en los sentimientos que afloran hacia la materia y le predispone a actuar de modo consecuente, lo que determina las actitudes.

A continuación se muestra el nivel de dominio alcanzado por los grupos en el componente afectivo, específicamente en el problema 12. Posteriormente se describe el porqué de dichos niveles de dominio.

Tabla 36. Niveles de dominio proceso "disposición" Pb12

Componente de la competencia	Procesos	Criterio de evaluación	Problema 12 (Pb12)		
			G1	G2	G3
AFECTIVO	Disposición P4	C10. Participar activamente con voluntad e interés en la solución del problema.	D5	D5	D5
		C11. Usar estrategias creativas en la solución del problema	D5	D5	D5
		C12. Escuchar y cuestionar respetuosamente las opiniones y puntos de vista de los compañeros.	D5	D5	D5

Fuente: elaboración propia.

A lo largo de los procesos de resolución de problemas que se inician en la cuarta sesión de trabajo y finalizaron en la undécima, los estudiantes evidenciaron las siguientes actuaciones:

- Correcta disposición, interés y deseo en hallar la solución a los problemas planteados.
- Pudieron comunicarse respetuosamente para escuchar y cuestionar las opiniones y puntos de vista de los compañeros.
- Participaron activamente en la solución de los problemas relacionados con razones y proporciones, principalmente en el problema central.

De acuerdo con Blanco Nieto, Cárdenas Lizarazo y Caballero Carrasco (2015), se identificaron dos tipos de actitudes: las actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas. Las actitudes matemáticas, se refieren a las capacidades cognitivas generales, mientras que en las actitudes hacia las matemáticas predomina el componente afectivo y se manifiestan en el interés, la satisfacción o la curiosidad o bien en el rechazo, la negación y la frustración frente a la tarea matemática. El trabajo con ABP, motivó profundamente a los estudiantes para resolver problemas que si bien se hubieran podido resolver, a manera de evaluación acreditativa o dentro de un contexto de clase instruccional, no hubieran aflorado tales aspectos de afectividad positiva.

De esta manera al promediar las puntuaciones de la rúbrica, se establece que los alumnos movilizan el proceso **disposición** en el nivel de dominio **estratégico** (destacado).

4.3.1.3 Componente de tendencia de acción.

La tendencia de acción se abordada desde el proceso de persistencia. Esta se puso de manifiesto cuando los estudiantes se mantuvieron constantes en la consecución de lo iniciado, en los diálogos con el docente y entre ellos, en las opiniones, en comentarios, en el lenguaje corporal o en gesticulaciones observada.

Los alumnos se mostraron perseverantes durante todo el proceso a pesar del sinnúmero de obstáculos y adversidades que encontraron en el camino.

En ese sentido, no hubo abandono de ningún problema una vez iniciado. Al contrario esto quedó reflejado cuando en uno de los encuentros, se preparaban para un acto cultural y las horas de trabajo fueron más cortas, por lo que ellos mismos propusieron asistir en jornada contraria, con permiso de sus padres y el coordinador, con el fin de seguir llevando a cabo su investigación sobre el consumo de agua en el colegio.

Esta inclinación natural a realizar su actividad matemáticas de aprendizaje guarda relación con lo expuesto por D'amore, Fandiño y Godino (2008), cuando manifiestan que la tendencia de acción implica la necesidad del estudiante de involucrarse en la construcción de su propio conocimiento.

La tabla 37 refleja que los estudiantes movilizaron el proceso de **persistencia** en el nivel de dominio **estratégico** (destacado).

Tabla 37. Niveles de dominio proceso "persistencia" Pb12

Componente de la competencia	Procesos	Criterio de evaluación	Problema 12 (Pb12)		
			G1	G2	G3
TENDENCIA DE ACCIÓN	Persistencia P5	C13. Insistir en continuar con la solución del problema a pesar de los obstáculos y dificultades presentadas.	D5	D5	D5

Fuente: elaboración propia

De esta manera, se da por finalizado el análisis e interpretación de los resultados obtenidos a partir del diseño e implementación de la estrategia metodológica ABP, que favorece la movilización de la competencia matemática PRP en los tres componentes evaluados: cognitivo, afectivo y tendencia de acción, con miras al cumplimiento de los objetivos de la investigación.

5. Conclusiones

El objetivo general de esta investigación era evaluar la estrategia de aprendizaje basado en un proyecto de enfoque formativo, con mediación de las TIC, que favorece la movilización de la competencia PRP, en torno al objeto matemático razones y proporciones, en los estudiantes de grado séptimo de la IE José María Carbonell de Cali.

Para el cumplimiento del mismo se establecieron como objetivos específicos la identificación de las necesidades formativas relacionadas con las razones y proporciones de los estudiantes. Así mismo, el diseño e implementación de la estrategia de aprendizaje basado en un proyecto de enfoque formativo, con mediación de las TIC, y por último, la evaluación del mismo.

Bajo la dirección de los objetivos anteriores, el análisis de los datos obtenidos mediante los diversos instrumentos de recolección de la información aplicados, se establecen las siguientes conclusiones:

El aprendizaje basado en proyectos, a diferencia de las estrategias de instrucción tradicional y evaluaciones de lápiz y papel, ofrece la posibilidad de brindar información amplia del estado de la competencia matemática de los estudiante, en razón a que los sitúa frente a situaciones retadoras que permiten la observación sistemática de sus opiniones, interacciones, pero fundamentalmente, hacer uso de conceptos, procedimientos y actitudes para resolverlas.

El aprendizaje basado en proyectos, a pesar de ser una estrategia que requiere de suma dedicación, esfuerzo y de tiempo, se convierte en una alternativa poco explorada para desarrollar procesos de pensamiento matemático, compartir y desarrollar significados matemáticos, a través de la resolución de problemas auténticos y cercanos a la realidad de los estudiantes. Sin embargo, llevar a cabo propuestas como estas, implica repensar el currículo de matemáticas, desde su carácter dinámico. Toda vez que a pesar

que el discurso de las competencias se ha extendido, el currículo sigue estando organizado sobre la base de los contenidos y no alrededor de las competencias como ejes organizadores del mismo. Hoy, el currículo de la IE José María Carbonell, exige que las razones y proporciones debieran ser “enseñadas” en al menos tres sesiones de trabajo, bajo un paradigma de comprensión evidentemente instrumental, pero no da cuenta de cuánto tiempo se necesita para que éstas sea aprendidas, más aún, cuánto es el tiempo mínimo dedicado al contenido, a la vez que se desarrollan competencias alrededor del mismo.

Si bien es cierto, los estudiantes desarrollaron y construyeron pensamiento y significado matemático, a través de esta estrategia metodológica ABP con enfoque formativo, para su implementación se dedicaron seis semanas (12 sesiones de trabajo), es decir, fue necesario hacer uso del 60% de un período escolar. Esta cuestión lleva a pensar que si lo que se desea es estimular el desarrollo de competencias, en su sentido amplio, entonces se debe optar por un currículo que persiga este fin y no sólo los contenidos. En otras palabras, ésta investigación, deja ver que no es recomendable pensar en estrategias metodológicas de evaluación auténtica como el ABP, si el currículo sigue estando pensado y construido a partir de contenidos.

Por otro lado, también es importante destacar como instrumentos de evaluación formativa el uso de la rúbrica y la rejilla de orientación. La rúbrica sirvió como herramienta para evaluar la competencia matemática de manera integral, mientras que la rejilla de orientación, ayudó a los estudiantes a la gestión de las estrategias tanto cognitivas como metacognitivas, al monitoreo y la autorregulación durante la resolución de problemas. Aunque en ciertas ocasiones no hubo correspondencia entre las acciones llevadas a cabo y registradas por los estudiantes y las evidencias de las acciones en las resoluciones de los estudiantes, no indica que no se haya manejado con rigurosidad, sino

que ellos mismos demostraron que conforme al avance de la propuesta, fueron ganando cierta autonomía en el proceso de resolución de problemas sin necesidad del apoyo de la rejilla.

Así las cosas, se concluye que se alcanzaron los objetivos propuestos en este trabajo. Por un lado, se pudo identificar como parte de las necesidades formativas iniciales de los estudiantes, en relación a las razones y proporciones, su deficiencia para llevar la noción de reducción y ampliación como una forma específica de la proporción y la dificultad para emplear razones internas y externas. Como cumplimiento del segundo objetivo específico, se diseñó e implementó la estrategia metodológica ABP con enfoque formativo, que favoreciera la competencia matemática PRP, a través de la movilización de conocimientos, procesos matemáticos, actuaciones que evidenciaron voluntad, disposición, persistencia e inclinación favorable a usar la matemática en contextos cercanos a su realidad como fue el problema del consumo de agua en el colegio.

La actividad matemática de aprendizaje de los estudiantes evidenciada en la investigación, permitió caracterizar la competencia matemática planteamiento y resolución de problemas de la siguiente manera: los estudiantes desarrollaron procesos matemáticos, capacidades y aspectos afectivos y de tendencia de acción que caracterizan sus actuaciones entre los niveles de dominio **autónomo (nivel esperado)** y **estratégico (nivel destacado)**.

En el aspecto cognitivo, desarrollaron procesos como comprender el problema; diseñar y ejecutar un plan de acción a través de estrategias heurísticas y no algorítmicas; y finalmente, revisar la tarea sobre la marcha y al final. Esto se evidenció en la manera como verbalizaban la comprensión del problema, diseñaban y la ejecutaban acciones creativas, flexibles, ingeniosas con precisión y completitud, e incluso haciendo uso de diversos registros de representación para preservar el significado de razón y proporción.

En relación al aspecto metacognitivo y de autorregulación se evidenciaron grandes avances a través del uso del diario de aprendizaje y la rejilla de orientación, sin embargo, en el proceso de revisión de la tarea, se observaron algunas dificultades para clausurar las soluciones encontradas a la luz de las cuestiones formuladas en el problema, por lo que será necesario hacer énfasis en la visión retrospectiva como parte fundamental de la resolución de problemas.

En el aspecto afectivo los estudiantes siempre mostraron buena disposición para participar de la resolución de los problemas propuestos o requerimientos planteados, actuando con voluntad propia. En términos de D'amore, Fandiño y Godino (2008), el carácter transversal del contenido matemático, en este caso el de razón y proporción, integró factores afectivos, particularmente la disposición del estudiante, por lo que a lo largo de sus procesos resolutivos, permanecieron implicados y comprometidos con su quehacer matemático.

En relación a la tendencia de acción el no abandono de los problemas, sin consideración del tiempo, hasta encontrar la solución a los problemas planteados y a pesar del estrés fisiológico y emocional como consecuencia de enfrentar situaciones de alta demanda cognitiva, nunca renunciaron a la solución de las mismas, pues el hecho de pensar en el proyecto como una cuestión propia, hacía que desearan resolver los problemas como si fueran parte de una escalera que los conducía a la elaboración de un producto final.

Las actuaciones afectivas y de tendencia de acción, demostraron la estrategia de aprendizaje basado en proyectos con enfoque formativo, posibilita que el estudiante se sienta motivado e implicado en su actividad matemática y que al tiempo, pueda desplegar habilidades de pensamiento creativo y comunicativas; flexibilidad; toma de decisiones; emociones y sentimientos. Esto conlleva a pensar que el uso de conocimientos

matemáticos y heurísticos, es necesario, pero no suficiente para la movilización de la competencia PRP, pues deben existir elementos, como con los que cuenta el ABP, para ofrecer a los estudiantes la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones a los problemas planteados, más allá de la evaluación.

6. Recomendaciones

En este apartado se hacen una serie de sugerencias de tipo pedagógico y de didáctica específica de la matemática a docentes investigadores y universidades con formación inicial de docentes.

A los docentes investigadores, comprender que la competencia matemática es un objetivo de largo plazo y que se desarrolla toda la vida, sin embargo, para su movilización integral se requiere promover actividad matemática de aprendizaje a través de tareas ricas desde el punto de vista de nexos comunicativos entre los alumnos, y, entre estos y el docente. Por lo que se hace inaplazable renunciar a la idea de que la finalidad de la enseñanza de las matemáticas es la mera transmisión de datos, reglas y algoritmos. Es decir, al ser la educación parte de un proceso comunicativo, lo más importante no es el mensaje que se transmite en sí, sino el sentido o significado que se pretende inducir por medio del mismo.

En este sentido, el llamado es a seleccionar aquellas tareas que se convierten en actividades y que por tanto, ayudan a construir aprendizajes, indagando, acerca de sus impactos en el desarrollo de procesos matemáticos y en la cultura de aula.

A las universidades con formación inicial de docentes, la recomendación es que potencien la formación en didáctica específica de la matemática y sus problematizaciones de manera que desde sus primeros contactos con escolares, sean conscientes de la complejidad del fenómeno de la tarea de la enseñanza si lo que se desea es lograr un aprendizaje matemático significativo.

Bibliografía

- ArreguÍ, L. E., Alfaro, J. A., & Ramírez, M. S. (10 de 12 de 2012). Desarrollo de competencias matemáticas en educación secundaria usando la técnica de aprendizaje orientado en proyectos. *REICE Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficiencia y Cambio en Educación*, 10(4), 1-21. Obtenido de <http://www.rinace.net/reice/numeros/arts/vol10num4/art16.pdf>
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Blanck, W. (1997). *W.E. Blank & S. Harwell (Eds.) Authentic instruction. In , Promising practices for connecting high school to the real world*. University of South Florida. Tampa FL.: ERIC Document Reproduction Service No. ED407586.
- Blanco Blanco, Á. (2008). Las rúbricas: un instrumento útil para la evaluación de competencias. En L. Prieto Navarro, Á. Blanco Blanco, P. Morales Vallejo, & J. C. Torre Puente, *La enseñanza universitaria centrada en el aprendizaje* (págs. 171-187). Barcelona: Octaedro - Ice.
- Blanco Nieto, L. J., Cárdenas Lizarazo, J. A., & Caballero Carrasco, A. (2015). *La Resolución de Problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria*. España: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura.
- Blumenfeld, P., Soloway, E., & Marx, R. (1991). Motivating project-based learning: Sustaining the doing, supporting the learning. *Educational Psychologist*, 26, 369-398.
- Cano, E. (2012). *Aprobar o aprender. Estrategias de evaluación en la sociedad red*. Universitat de Barcelona, Laboratori de Mitjans Interactius. Barcelona: Elena Cano.
- Cañadas Santiago, M. C., Durán Ceacero, F., Gallardo Jimenez, S., Martínez-Santaolalla Martínez, M., Peñas Troyano, M., Villarraga Rico, M., & Villegas Castellanos, J. (1999). *Materiales didácticos en la resolución de problemas*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Carrillo, J., & Guevara, F. (1996). Un instrumento para evaluar la resolución de problemas. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*(8), 65-81.
- Clavijo Clavijo, G. A. (2008). La evaluación del proceso de formación., (págs. 1-48). Cartagena de Indias.
- Coll, C. (2001). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. En J. Palacios, A. Marchesi, & C. Coll, *Desarrollo*

- psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar* (págs. 157-186). Madrid: Alianza Editorial.
- Coll, C. (2015). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidades y potencialidades. En R. Carneiro, J. C. Toscano, & T. Díaz, *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo* (págs. 113-125). Madrid: OEI - Fundación Santillana.
- Coll, C., Rochera, M. J., Mayordomo, R. M., & Naranjo, M. (2008). *La evaluación continuada como instrumento para el ajuste de la ayuda pedagógica y la enseñanza de competencias de autorregulación*. Barcelona: Octaedro.
- Coria, J. M. (Marzo de 2005). El aprendizaje por proyectos: una metodología diferente. *Revista e-Formadores*(5).
- D'Amore, B., Díaz Godino, J., & Fandiño Pinilla, M. (2008). *Competencias y matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Danielson, C., & Marquez, E. (2014). *A Collection of Performance Tasks & Rubrics: High School Mathematics*. New York, NY.: Routledge.
- Díaz Barriga. (2005). *Enseñanza situada: Vínculo entre escuela y vida*. México: McGraw Hill.
- Díaz Barriga, F. (2015). TIC y competencias docentes del siglo xxi. En R. Carneiro, J. C. Toscano, & T. Díaz, *Los desafíos de las TIC para el cambio educativo*. Madrid: OEI - Fundación Santillana.
- Díaz-Aguado, M. J. (2003). *Educación intercultural y aprendizaje cooperativo*. Madrid: Pirámide.
- Dickinson, K. P., Soukamneuth, S., Yu, H. C., Kimball, M., D'Amico, R., & Perry, R. (1998). *Providing educational services in the Summer Young Employment and Training Program [Technical assistance guide]*. Washington: Department of Labor.
- Espinoza, L., Barbe, J., Mitrovich, D., Solar, H., Rojas, D., Matus, C., & Olguín, P. (2009). *Análisis de las competencias matemáticas en NBI. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Proyecto FONIDE No. DED0760*. Santiago: Mineduc.
- Foong, P. Y. (2013). Resolución de problemas en matemáticas. En L. P. Yee, *La Enseñanza de Matemática en la Educación Básica* (pág. 68). Santiago de Chile: Academia Chilena de Ciencia.
- García Quiroga, B., Coronado, A., Monteleagre Quintana, L., Giraldo Ospina, A., Tovar Piza, B. A., Morales Parra, S., & Cortés Joven, D. D. (2013). *Competencias matemáticas y Actividad matemática de aprendizaje*. Universidad de la

Amazonía. Florencia: Artes Gráficas del Valle S.A.S. Recuperado el 02 de 12 de 2019

- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada, Departamento de didáctica de la matemática, Granada.
- Goñi Zabala, J. (2008). *7 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- Harwell, S. (1997). *Project-based learning, promising practices for connecting high school to the real world*. Tampa, FL: University of South Florida.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. D. (2010). *Metodología de la Investigación* (Quinta Edición ed.). México D.F.: McGraw Hill.
- Hernández, F. (1998). Repensar la función de la escuela desde los proyectos de trabajo. *Revista Pedagógica*(6), 26-31.
- Icfes. (2018). *Piloto Avancemos Hacia un proceso formativo Marco de referencia*. Bogotá.
- Iriarte Pupo, A. J., & Sierra Pineda, I. (2011). *Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas*. Universidad de Sucre. Montería-Colombia: Fondo Editorial Universidad de Córdoba. Obtenido de <http://libros.edunexos.edu.co>
- Jorba, J., & Sanmartí, N. (2008). La función pedagógica de la evaluación. En J. Jorba, & N. Sanmartí, *Evaluación como ayuda al aprendizaje* (págs. 21-42). Barcelona: Grao.
- Kemmis, S., & McTaggart, R. (2005). Participatory Action Research. En N. Denzin, & Y. Lincoln, *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (Tercera ed., págs. 559-603). Londres: Sage.
- Kilpatrick, J. (1978). *Research on Problem Solving in Mathematics, School Science and Mathematics*.
- Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 660-675.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor y M.E.C.
- Mauri, T. (2007). ¿Qué hace que el alumno y la alumna aprendan contenidos escolares? La naturaleza activa y constructiva del conocimiento. En E. Martín Ortega, T. Mauri Majós, M. Miras Mestres, J. Onrubia Goñi, A. Zabala Vidiella, C. Coll Salvador, & I. Solé Gallart, *El constructivismo en el aula* (pág. 71). Barcelona: Grao.

- Mertler, C. A. (2000). Designing scoring rubrics for your classroom. *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, 7(25). doi:<https://doi.org/10.7275/gcy8-0w24>
- Mettas, A. C., & Constantinou, C. C. (2007). The technology fair: a project-based learning approach for enhancing problem solving skills and interest in design and technology education. *International Journal of Technology and Design Education*(18), 79-100.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Bogotá D.C.: Enlace editores Ltda.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas V.2*. Bogotá D.C.: MEN.
- Moursund, D. (1999). *Project-based learning using information technology*. Eugene, OR: International Society for Technology in Education.
- NCTM. (1981). *Sugerencias para resolver problemas*. México: Trillhas.
- Niss, M. A., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde, Denmark : Roskilde Universitet.
- OCDE/PISA. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Madrid: OECD/Ministerio de Educación y Ciencia - Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE).
- Onrubia, J. (18 de Abril Junio de 1996). Aprendizaje y construcción de conocimiento en la educación secundaria obligatoria. *Signos. Teoría y práctica de la educación*, 14-21. Obtenido de http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_3/nr_46/a_667/667.html
- Pabón Ramírez, O. A., & Arce Chávez, J. H. (2007). *Resolución de problemas matemáticos y estrategias heurísticas (recurso electrónico): del lápiz y el papel a los ambientes de geometría dinámica*. Tesis maestría, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Cali.
- Pedró, F. (2014). *Tecnología para la mejora de la educación*. Madrid: Fundación Santillana.

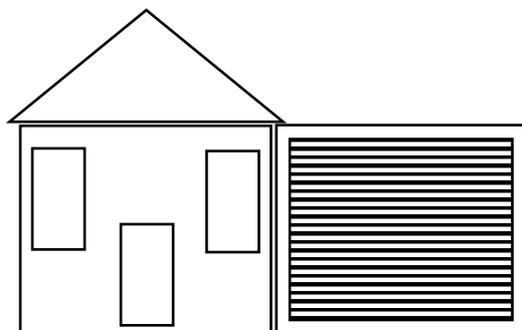
- Pellegrino, J. W., & Hilton, M. L. (2012). *Education for life and work: Developing transferable Knowledge and skills in the 21st century*. Washington DC: National Academies Press.
- Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona: Graó.
- Pifarré, M., & Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto departamento de pedagogía y psicología. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(2), 297-308.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Editorial Trillas S.A.
- Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*(39), 419-430.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori.
- Real Academia Española. (2019). Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua. Madrid.
- Retrepo Gómez, B. (2002). Una variante pedagógica de la investigación acción educativa. *Revista Iberoamericana de Educación*. Obtenido de <https://rieoei.org/RIE/article/view/2898/3824>
- Rico Romero, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*(extraordinario), 275-294. Recuperado el 15 de 10 de 2019
- Rico, L., & Lupiañez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rodríguez Gómez, D., & Valldeoriola Roquet, J. (2008). Metodología de la investigación. *FUOC*.
- Sanmartí, N. (2007). *Evaluar para aprender. 10 ideas clave*. Barcelona: Grao.
- Santos Trigo, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México D.F, México: Trillas.
- Santos Trigo, L. M. (2016). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*(15), 333-346.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. En A. Schoenfeld, *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 334-370). New York: D. Grouws Editions. Recuperado el 19 de Diciembre de 2019

- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 334-370). New York: MacMillan - Grouws.
- Schoenfeld, A. (2007). What is a mathematical proficiency and How can be it assessed? *Assessing Mathematical Proficiency MSRI Publications*(53), 59-73.
- Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso*. Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica; I de les Ciències Experimentals. Barcelona: Bellaterra.
- Solar, H. (2011). *Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM)*. Universidad Católica de la Santísima, Proyecto FONIDE N° 511091.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de caso* (Segunda ed.). Madrid: Morata.
- Stenhouse, L. (1981). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Morata.
- Stenhouse, L. (1993). *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid: Morata.
- Thomas, J. (Marzo de 2000). A review of research on Project-based learning. (T. A. Foundation, Ed.) *Buck Institute for Education BIE*, 1-46. Recuperado el 20 de 10 de 2019, de http://www.bie.org/index.php/site/RE/pbl_research/29
- Tobón Tobón, S., Pimienta Prieto, J., & García Fraile, J. A. (2010). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias*. México D.F.: Pearson.
- Tobón, S. (2009). Proyectos formativos: didáctica y evaluación de competencias. En E. J. Cabrera, *Las competencias en educación básica: un cambio hacia la reforma*. México D.F.: Secretaría de Educación Pública.
- Törner, G., Schoenfeld, A., & Reiss, K. M. (2007). Problem Solving around the word: summing up the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 39(353).
- Valverde, G., & Castro, E. (2006). *La relación de proporcionalidad contextualizada desde la realidad socio-cultural*. Universidad de Granada.
- Vila, A., & Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea Ediciones.
- Villalonga Pons, J. M. (2017). *La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria*. Tesis doctoral, Universidad Autóma de Barcelona, Departament de Didactica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Bellaterra.

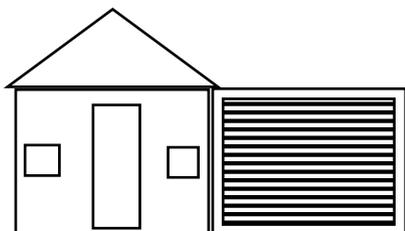
Anexos

Anexo A. Prueba diagnóstica

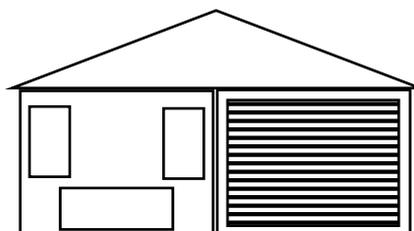
Tarea 1. El dibujo que está a la derecha es el frente de la casa de Antonio. Él sacó una fotocopia de reducción. De los dibujos que están abajo marca el que corresponde a la reducción que obtuvo.



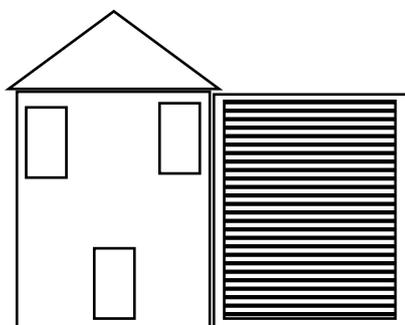
A



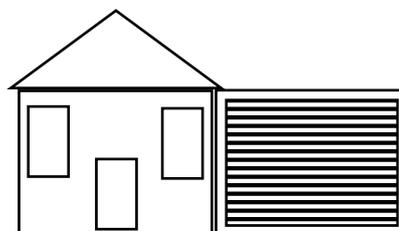
B



C

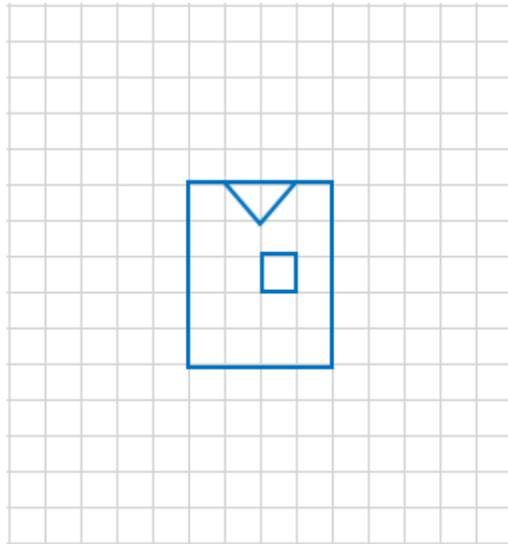


D



Tarea 2.

La señora Andrea confecciona chalecos y le han pedido una que elabore uno que sea la ampliación del siguiente:



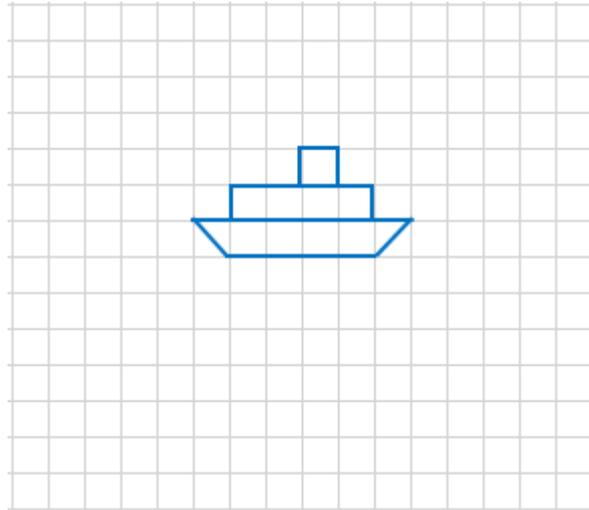
En el espacio de abajo dibuja el nuevo chaleco, ampliando dos veces cada uno de los lados del chaleco de la muestra.



A continuación, escribe los pasos que seguiste para dibujarlo.

Tarea 3

Ahora, al diseñador Carlos le han pedido realizar una ampliación del siguiente dibujo original.



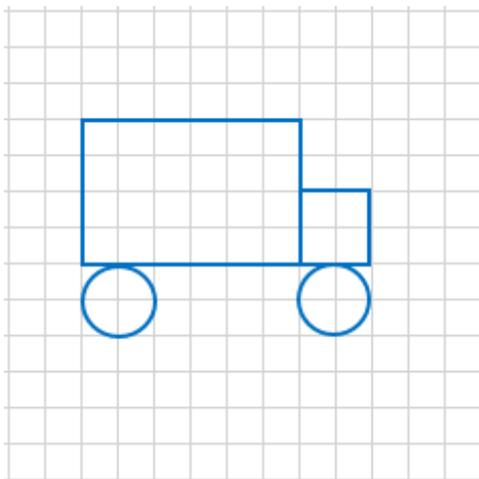
Abajo, observa que hay una parte del dibujo ampliado. Completa esa ampliación del mismo, conservando la forma original.



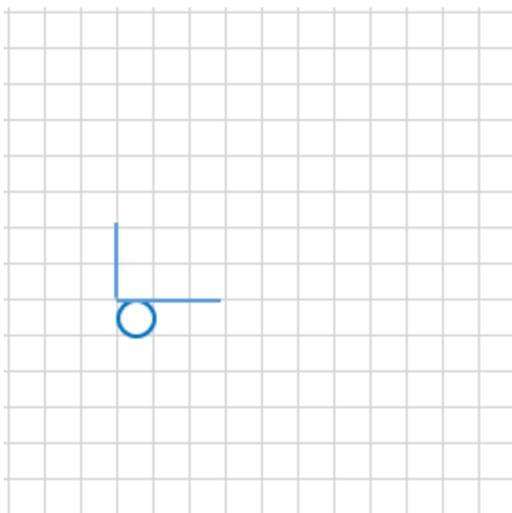
Explica cómo lo hiciste.

Tarea 4.

Al señor Calos se le ha pedido realizar la reducción del siguiente dibujo original.



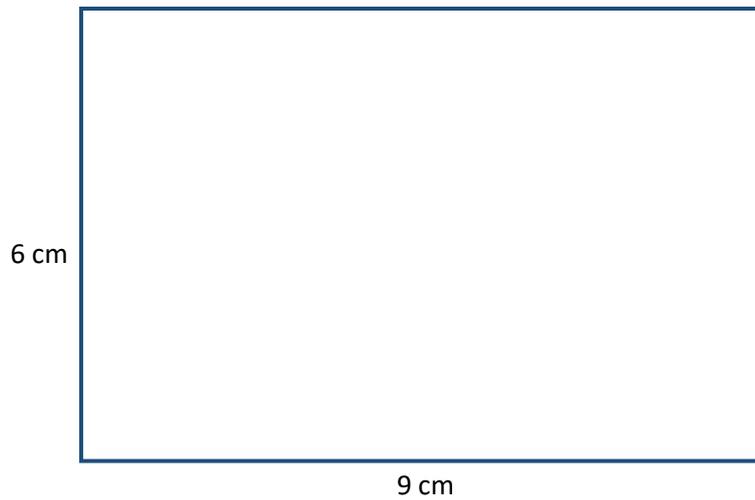
Observa que abajo hay una parte del dibujo reducido. Completa esa reducción, sin modificar su forma.



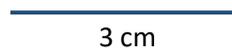
En el siguiente espacio explica cómo lo hiciste.

Tarea 5a

Un carpintero cortó una tabla de madera con forma rectangular, de 9 cm de largo y 6 cm de ancho. Necesita cortar otra tabla que tenga la misma forma que la primera pero de medidas diferentes. Si de largo debe medir 3 cm ¿cuánto debe medir de ancho la segunda tabla?



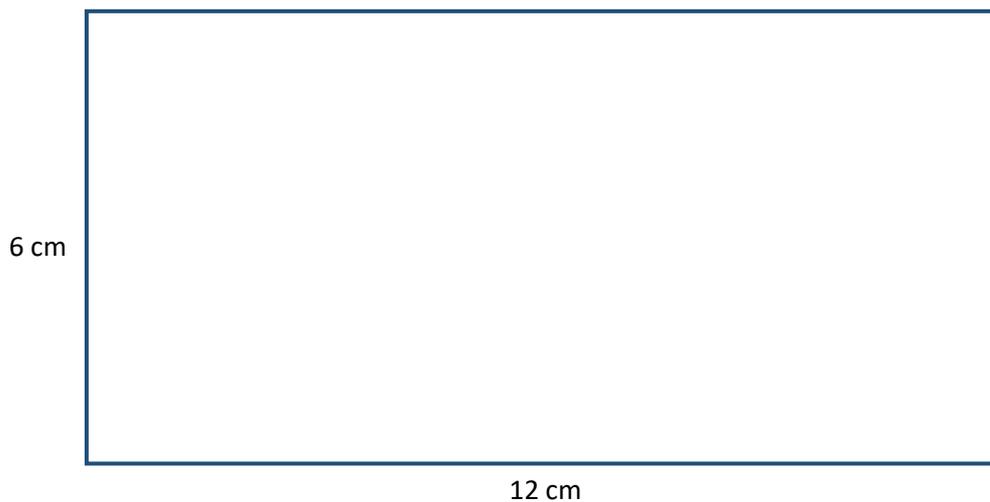
Completa la figura que representa la segunda tabla de madera.



Explica paso a paso cómo lo resolviste:

Tarea 5b

Un carpintero cortó una tabla de madera con forma rectangular, de 12 cm de largo y 6 cm de ancho. Necesita cortar otra tabla que tenga la misma forma de la primera pero de medidas diferentes. Si de largo debe medir 5 cm ¿cuánto debe medir de ancho la segunda tabla?



Completa la figura que representa la segunda tabla de madera.



Explica paso a paso cómo lo resolviste:

Tarea 6a y 6b.

Ana va a tener invitados y pensó hacer chocolate con leche. Ayúdala a saber cuántas barras de chocolate necesita para 2 litros de leche _____ y cuántas para 5 litros de leche _____.

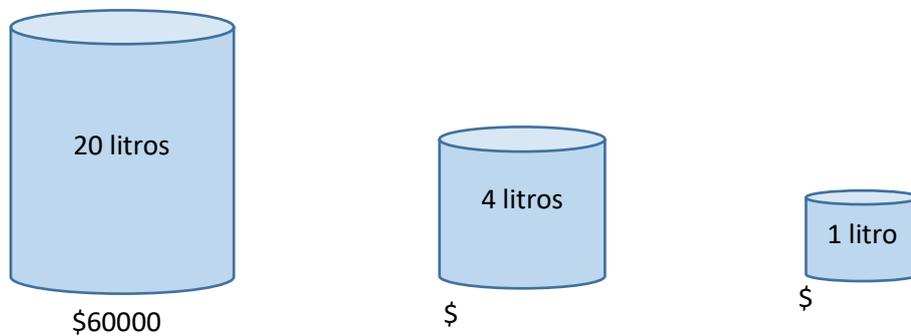
También ayúdala a saber cuántos litros de leche debe comprar para 6 barras de chocolate:

Ahora completa la siguiente tabla

Barras de chocolate	Litros de leche
2	1
	2
6	
	5

Explica qué hiciste para contestar las preguntas

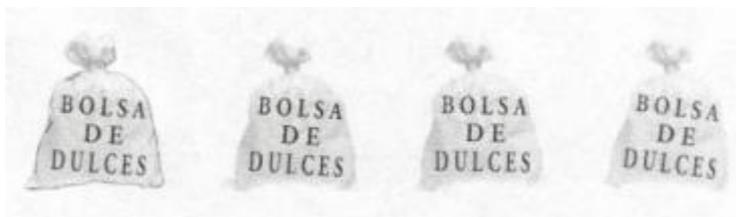
Tarea 7 Luis va ayudar a sus papá a pintar la casa y necesitan varios botes de pintura. Ellos saben que 20 litros cuestan 60.000 pesos. Ayúdalos a calcular los precios de los otros botes requeridos. Completa



Explica que hiciste para resolverlo:

Tarea 8

Andrés compró 4 bolsas de dulces y por ellas pagó 1200 pesos.



Julián compró 7 bolsas de esos dulces



¿Cuánto pagó por ellas?

¿Cómo resolviste el problema?

Tarea 9a y 9b

En la siguiente tabla se proporcionan algunos datos:

Número de paquetes	Número de lápices
3	15
5	

Inventa un problema relacionado con los datos que se te proporcionan y resuélvelo.

Completa la tabla y explica cómo lo resolviste.

Anexo B. Plantilla de planeación del proyecto

PROYECTO A REALIZAR				
Proyecto: Las razones y proporciones en un estudio sobre el consumo de agua en nuestro colegio Producto final: Sitio web con <i>Sites</i> de Google Asignatura: matemáticas Grado: Séptimo Duración: 6 semanas (4 horas semanales) Horas de clase: 24 horas (12 sesiones de clase)				
COMPETENCIA (expectativa a largo plazo) Competencia matemática: Planteamiento y resolución de problemas.				
Objetivos del proyecto (expectativas a corto plazo) Objetivos en el área Formular y resolver problemas de contexto en los que estén implicadas las razones y proporciones.				
Objetivos transversales				
Saberes previos				
Saber conocer: números racionales, Saber hacer Saber ser				
Fase del proyecto /Actividades de formación y evaluación		Evaluación		Recursos
Actividades del docente	Actividades del alumno	Criterio	Evidencia	
Sesión 1 Tarea 1: Nos preparamos para el proyecto <i>Actividad 1.1</i> <i>Comprendemos el proyecto</i>			Primera entrada del diario de aprendizaje	Cuaderno de matemáticas (apartado diarios de aprendizaje)

<p>Socializar el proyecto, los objetivos del mismo, el producto final, las tareas o problemas matemáticos que deberán resolver a lo largo del desarrollo del proyecto, la manera como se va evaluar, las normas esenciales a tener en cuenta los plazos del proyecto. Finalmente organizará los grupos de trabajo de acuerdo con los criterios preestablecidos.</p>	<p>Estar atento a la explicación. Proponer iniciativas. Asignar roles dentro del grupo de trabajo. Iniciar la primera entrada del diario de aprendizaje con el título <i>aprendo por medio de un proyecto</i></p> <p>¿Quiénes son los integrantes de mi equipo de trabajo? ¿Alguna vez he desarrollado proyectos en equipo? ¿En qué consistió? ¿Qué elementos caracterizaron ese trabajo en equipo? ¿Qué espero aprender durante este proyecto? ¿Existe alguna idea o concepto que no entiendo? ¿Qué tengo que presentar o entregar al final del proyecto? ¿Cuál será mi papel o rol en mi equipo de trabajo?</p>			
<p>Tiempo: 30 minutos</p>	<p>Tiempo: 1 hora</p>			
<p><i>Actividad 1.2 La importancia del aprendizaje colaborativo</i></p>	<p>Iniciar sesión con el usuario asignado. Ver el vídeo sobre aprendizaje colaborativo y la importancia del trabajo en</p>			<p>Computador con acceso a internet</p>

<p>Asignar los computadores a los estudiantes, indicar que los enciendan y asignar una cuenta de usuario previamente creada por la administradora del G-Suite de la institución. Indicar que vean el vídeo sobre aprendizaje colaborativo y la importancia del trabajo en equipo:</p> <p>https://www.youtube.com/watch?v=XaMGrcyfpb8yt=11s</p> <p>Indicar que vean el video tutorial ¿Cómo crear un Sites de Google?</p>	<p>equipo:</p> <p>https://www.youtube.com/watch?v=XaMGrcyfpb8yt=11s</p> <p>Ver y discutir acerca del video tutorial ¿Cómo crear un Sites de Google?</p>			
<p>Tiempo: 20 minutos</p>	<p>Tiempo: 30 minutos</p>			
<p>Sesión 2</p> <p>Tarea 2 Creación del sitio en Google Sites</p> <p><i>Actividad 2.1 Creamos las páginas del sitio</i></p> <p>Indicar a cada grupo que creen el sitio web con el Sites de Google teniendo en cuenta que este estará</p>	<p>Crear el Sites de Google, habilitando para ello las cinco páginas que estarán en</p>		<p>Sitio creado y publicado con elementos preliminares</p>	<p>Computador con acceso a internet</p>

<p>dividido por páginas dentro de un menú desplegable. Las páginas que deberá tener el sitio son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Página principal. • La escasez de agua en el mundo • Conceptos y ejemplos sobre razones y proporciones • Proceso de creación • Resolución de problemas. • ¿Cuánta agua consumimos e nuestro colegio? • Contamos nuestro proceso de creación del sitio • Propuesta para el ahorro de agua en nuestro colegio • Diario de aprendizaje <p>Explicar que en la página principal se presentaba el nombre del proyecto y una pequeña explicación acerca del mismo, los nombres de los integrantes</p>	<p>el menú desplegable del sitio. Empezar a crear contenido en la página principal. Indicar en esta el nombre del proyecto, una pequeña explicación acerca del mismo, los nombres de los integrantes del grupo de trabajo, una fotografía con sus roles al interior del equipo, el grado, una fotografía de la institución con su logo y alguna imagen de ella.</p> <p>Publicar el sitio creado y escribir dirección en el Padlet gestionado por el docente para tal fin.</p>			
--	---	--	--	--

<p>del grupo de trabajo, una fotografía con sus roles al interior del equipo, el grado, una fotografía de la institución con su logo y alguna imagen de ella.</p> <p>Los contenidos de las demás páginas del Sites se irían llenando a medida que avanzaba el proyecto.</p> <p>Pedir que suban la dirección de sus sitios creados al Padlet creado para tal fin.</p>				
Tiempo: 30 minutos	Tiempo: 30 minutos			
<p><i>Actividad 2.1 Realizamos un mapa conceptual sobre razones y proporciones</i></p> <p>Pedir a los estudiantes que en la página de conceptos y ejemplos de sus sitios elaboran un mapa conceptual haciendo uso de la herramienta TIC CmapTools</p> <p>El mapa conceptual debe incluir aspectos como: qué</p>	<p>Lee la guía y videos con la explicaciones correspondientes y diseñar un mapa conceptual haciendo unos de la herramienta TIC CmapTools</p>		<p>Mapa conceptual sobre las razones y proporciones</p>	

<p>es una razón, cómo se representa, cómo se calcula una razón, escribir ejemplos con razones, qué es una proporción, incluir imágenes, y explicar el teorema fundamental de las proporciones. Entregar a los estudiantes los documentos para la realización del mapa conceptual.</p>	<p>El mapa conceptual debe incluir aspectos como: qué es una razón, cómo se representa, cómo se calcula una razón, escribir ejemplos con razones, qué es una proporción, incluir imágenes, y explicar el teorema fundamental de las proporciones.</p>			
<p>Tiempo: 30 minutos</p>	<p>Tiempo: 2 horas</p>			
<p>Sesión 3 <i>Actividad 2.3 Elaboramos una infografía sobre la escasez de agua en el mundo</i></p> <p>Pedir a los estudiantes que dentro de la página “La escasez de agua en el mundo”, elaboren una infografía en la que se exponga la problemática de la escasez del agua en el mundo Para esto socializará el tutorial ¿Cómo hacer infografías con easel.ly?</p>	<p>Observar el tutorial ¿Cómo hacer infografías con easel.ly? Hacer uso de la herramienta TIC easel.ly para realizar una infografía en la que se exponga la problemática de la escasez del agua en el mundo.</p>		<p>Infografía sobre la escasez de agua en el mundo.</p>	

Tiempo: 30 minutos	Tiempo: 2 horas			
<p>Sesión 4</p> <p>Tarea 3 Resolución de problemas matemáticos</p> <p><i>Actividad 3.1 Resolvemos los problemas</i></p> <p><i>Pb1(individual), Pb2 (grupala) y Pb3 (grupala)</i></p> <p>Proponer a los estudiantes que de manera individual resuelvan el problema No. 1 y siguiendo el proceso de resolución de problemas socializado con anterioridad.</p> <p>Entregar a cada estudiante una hoja con el enunciado del problema, el espacio para la resolución y la base orientación.</p> <p>Socializar y explicar el uso de la rejilla de orientación como instrumento de apoyo para la resolución de problemas.</p>	<p>Permanecer atentos para entender el uso de la rejilla de orientación.</p> <p>Resolver el problema propuesto y participar en el debate y puesta en común luego de la resolución.</p> <p>Tras debatir en el grupo acerca de las mejores soluciones, cada grupo deberá subir las evidencias del proceso de resolución que haya optado como la mejor en la página del Sitio correspondiente a planteamiento y resolución de problemas.</p>		Resolución de los problemas 1,2 y 3	

<p>Proponer que se organicen en los grupos de trabajo y resuelvan el problema No. 2.</p> <p>Proponer el debate acerca de las estrategias de resolución de los problemas planteados</p>				
Tiempo: 2 horas	Tiempo: 2 horas			
<p>Sesión 5</p> <p><i>Actividad 3.2 Resolución de problemas 4,5 y 6</i></p> <p>Pedir a los estudiantes que se reúnan en sus grupos y trabajo y empiecen el proceso de resolución de los problemas 4, 5 y 6</p> <p>Durante la resolución del problema aclarar dudas mediante el planteamiento de preguntas como las siguientes: no entendí tu pregunta, ¿podrías plantearla de nuevo de manera diferente?, ¿qué se pide en el problema?,</p>	<p>Reunirse en los grupos de trabajo en iniciar el proceso de resolución de los problemas 4,5 y 6.</p> <p>Tomar fotografías a los procesos de resolución realizados y subir en la página de planteamiento y resolución de problemas.</p>		<p>Procesos de resolución de problemas 4, 5 y 6</p>	<p>Computador Cinta métrica Cronometro o celular</p>

<p>¿qué información se proporciona? Evitar hacer comentarios que pudieran orientar a los equipos hacia una solución específica. Interrogar para conocer los argumentos de carácter verbal que los estudiantes muestran.</p>				
Tiempo: 2 horas	Tiempo: 2 horas			
<p>Sesión 6 Tarea 4 Resolución del problema central <i>Actividad 4.1 Reunión sobre la tarea central del proyecto (Problema 12)</i></p> <p>Proponer que al interior de los grupos de trabajo realicen una lluvia de ideas acerca de la estrategia que van usar para conocer el consumo de agua en la institución. Reunirse con cada uno de los grupos y escuchar atentamente las estrategias de resolución que han acordado.</p>	Participar en la lluvia de ideas al interior de sus grupos.		Diseño del plan de acción para la resolución del problema o reto central	

<p>Sesión 7</p> <p><i>Actividad 4.2 Ejecutamos el plan de acción del problema 12</i></p> <p>Proponer a cada uno de los grupos que inicie el proceso de ejecución del plan de acción establecido en la sesión anterior.</p>	<p>Cada uno de los grupos iniciará el proceso de ejecución del plan de acción diseñado en la sesión de trabajo anterior.</p> <p>Al final mostrará al docente los avances de su plan de acción.</p>		<p>Avances en el diario de aprendizaje</p>	
Tiempo: 15 minutos	Tiempo: 2 horas			
<p>Sesión 8</p> <p><i>Actividad 3.3 Resolución de problemas Pb7, Pb8, Pb9</i></p> <p>Pedir a los estudiantes que se reúnan en sus grupos y trabajo y empiecen el proceso de resolución de los problemas 7,8 y 9</p>	<p>Reunirse en los grupos de trabajo en iniciar el proceso de resolución de los problemas 7, 8 y 9.</p>		<p>Procesos de resolución de problemas 7,8 y 9</p>	

<p>Durante la resolución del problema aclarar dudas mediante el planteamiento de preguntas como las siguientes: no entendí tu pregunta, ¿podrías plantearla de nuevo de manera diferente?, ¿qué se pide en el problema?, ¿qué información se proporciona?</p> <p>Evitar hacer comentarios que pudieran orientar a los equipos hacia una solución específica.</p> <p>Interrogar para conocer los argumentos de carácter verbal que los estudiantes muestran.</p>	<p>Tomar fotografías a los procesos de resolución realizados y subir en la página de planteamiento y resolución de problemas.</p>			
<p>Tiempo: 2 horas</p>	<p>Tiempo: 2 horas</p>			
<p>Sesión 9</p> <p><i>Actividad 4.3</i> <i>Continuamos resolviendo el problema central del proyecto</i></p> <p>Pedir a los estudiantes que continúen el proceso de</p>			<p>Proceso de resolución</p> <p>Solución del problema central ¿Cuánta agua consumimos en nuestra jornada?</p>	<p>Computador Cinta métrica Cronometro o celular</p>

<p>resolución del problema central.</p> <p>Durante la resolución del problema aclarar dudas mediante el planteamiento de preguntas como las siguientes: no entendí tu pregunta, ¿podrías plantearla de nuevo de manera diferente?, ¿qué se pide en el problema?, ¿qué información se proporciona?</p> <p>Evitar hacer comentarios que pudieran orientar a los equipos hacia una solución específica.</p> <p>Interrogar para conocer los argumentos de carácter verbal que los estudiantes muestran.</p> <p>Pedir que después de la solución del problema, propongan un plan de ahorro de agua en la jornada.</p>	<p>Continuar con el proceso de resolución de la tarea central de acuerdo con el modelo propuesto:</p> <p>Comprendo el problema Diseño un plan de acción Ejecuto el plan de acción Reviso la tarea</p>		<p>Tabla en Microsoft Excel con diagrama de barras o circular que muestre el consumo de agua por zona o uso:</p> <p>Baños (niños y niñas) Cafetería Aseo Riego del jardín</p> <p>Plan de ahorro de agua para la jornada</p>	
Tiempo: 2 horas	Tiempo: 2 horas			

<p>Sesión 10</p> <p><i>Actividad 3.4 Resolución de problemas Pb10 y Pb11</i></p> <p>Pedir a los estudiantes que se reúnan en sus grupos y trabajo y empiecen el proceso de resolución de los problemas 10 y 11</p> <p>Durante la resolución del problema aclarar dudas mediante el planteamiento de preguntas como las siguientes: no entendí tu pregunta, ¿podrías plantearla de nuevo de manera diferente?, ¿qué se pide en el problema?, ¿qué información se proporciona?</p> <p>Evitar hacer comentarios que pudieran orientar a los equipos hacia una solución específica.</p> <p>Interrogar para conocer los argumentos de carácter</p>	<p>Reunirse en los grupos de trabajo en iniciar el proceso de resolución de los problemas 10 y 11</p> <p>Tomar fotografías a los procesos de resolución realizados y subir en la página de planteamiento y resolución de problemas.</p>		<p>Procesos de resolución de problemas 10 y 11</p>	
---	---	--	--	--

verbal que los estudiantes muestran.				
Tiempo: 2 horas	Tiempo: 2 horas			
<p>Sesión 11</p> <p>Tarea 5 Comunicamos los resultados del proyecto</p> <p><i>Actividad 5.1 Nos preparamos para comunicar los resultados del proyecto.</i></p> <p>Pedir a cada uno de los grupos que organicen sus evidencias de trabajo en los Sitios creados con Google Sites.</p> <p>Realizar observaciones a los sitios creados por cada grupo.</p> <p>Pedir a los grupos que preparen un pequeño guion y una presentación en <i>Genially</i> para la comunicación de los resultados obtenidos en la siguiente y última sesión.</p>	<p>Revisar, organizar y ajustar el sitio creado con Google Sites.</p> <p>Elaborar una presentación haciendo uso de la herramienta TIC <i>Genially</i>.</p> <p>Elaborar tarjetas de invitación en Microsoft Word dirigidas al coordinador, el señor rector y un padre de familia por cada uno de los grupos para la exposición de los proyectos.</p>	<p>Tarjetas de invitación</p> <p>Presentación en <i>Genially</i></p> <p>Sitios revisados</p> <p>Última entrada del diario de aprendizaje.</p>		

<p>Pedir a los grupos que realicen una tarjeta de invitación con Microsoft Word al coordinador, el señor rector y un padre de familia por cada uno de los grupos para la exposición de los proyectos.</p> <p>Pedir a los estudiantes que realicen la última entrada del diario de aprendizaje.</p>	<p>Realizar la última entrada del diario de aprendizaje escribiendo como título “evalúo mi experiencia”</p> <p>En él deben los siguientes interrogantes:</p> <p>¿Te ha gustado trabajar en este proyecto?, ¿Por qué?</p> <p>¿Crees que has aprendido a través de las tareas y actividades que has realizado? Justifica tu respuesta.</p> <p>¿Cómo te has sentido? (contigo mismo(a), con tus compañeros, con el profesor)</p> <p>¿Qué es lo que más te ha gustado? ¿Por qué?</p> <p>Y... ¿Lo que menos?, di por qué.</p> <p>¿Qué hemos aprendido?</p> <p>¿Qué productos hemos creado?</p> <p>¿El producto final creado cumple con las condiciones de la propuesta?</p> <p>¿Qué hemos utilizado para aprender?</p>			
--	---	--	--	--

	<p>¿Cómo nos sentimos trabajando en equipo? ¿Cómo valoramos esta experiencia? ¿Qué dificultades surgieron a lo largo de esta experiencia y cómo las resolvimos? ¿Cómo valoramos el producto final creados? (cumplimiento de requisitos, posibilidades de mejora) Otros aspectos que quieran comentar.</p>			
Tiempo: 2 horas	Tiempo: 2 horas más tiempo adicional en casa para el diario			
<p>Sesión 12 <i>Actividad 5.2 Exponemos nuestros proyectos</i></p> <p>Previo a la exposición, debe haber tenido organizada la logística con acompañamiento de algunos estudiantes del grupo.</p>	Realizar la presentación del proyecto siguiendo el guio establecido.			

Preparación del auditorio, sonido, sillas y mesa directiva.				
Tiempo: 2 horas	Tiempo: 2 horas			

Anexo C. Rejilla de orientación.

Rejilla de orientación

	Procesos	Acciones	Registro
COGNITIVOS	Comprendo el problema	A1. He leído lo que se expone al menos dos veces	
		A2. Entiendo qué se quiere en el problema	
		A3. He identificado y entendido bien los datos	
	Diseño un plan de acción	A4. He manipulado los datos. He elaborado representaciones gráficas (dibujo, esquema, diagrama), establecido relaciones.	
		A5. He preparado una estrategia de resolución para cada pregunta del problema.	
	Ejecuto mi plan de acción	A6. He implementado mi estrategia	
		A7. He recopilado todos mis procesos de manera ordenada al punto que yo los entiendo.	
		A8. He recopilado todos mis procesos de manera ordenada al punto que otros los entiendan.	
	Reflexiono sobre mis resultados	A9. He revisado que mi solución sea correcta	
		A10. Cuando he terminado, he revisado mis respuestas a la luz de las preguntas	
		A11. He explorado otras respuestas y/o mejores soluciones.	
		A12. He respondido cada pregunta del problema.	
		A13. Formulo una nueva pregunta para ese problema a partir de las mismas o nuevas condiciones (cuando se solicite)	
AFECTIVOS	Disposición	A14. He participado activamente con voluntad e interés en la solución del problema.	
		A15. He escuchado y cuestionado respetuosamente las opiniones de mis compañeros.	
		A16. He utilizado estrategias creativas en la solución de mi problema.	
TENDENCIA LA ACCIÓN	Persistencia	A17. He insistido en continuar con la solución del problema a pesar de las dificultades presentadas.	

Anexo D. Colección de problemas matemáticos

Problema No. 1 (Pb1) La limonada de Don Diego

Las limonadas de don Diego son famosas. Tienen un sabor característico, quien la haya probado es capaz de identificarlas en cualquier parte. Aunque no se conoce la receta de don Diego, sí se sabe que él utiliza para un litro de agua (1 jarra), seis limones y tres cucharadas de azúcar.



- Si don Diego dispone de 18 limones, averigua la cantidad de agua y azúcar que debería utilizar si quiere preparar su limonada.
- Propone otras posibilidades de preparar limonadas con el sabor característico de don Diego variando las cantidades de los ingredientes.

Problema No.2 (Pb2) Combos de hamburguesa

Plantea y resuelve un problema en el que se utilice la siguiente información.

Promoción: por cada cinco combos de hamburguesa que se compren, recibe dos malteadas.

Para celebrar un compartir en el colegio, se hizo un pedido de 40 combos de hamburguesa.

Problema No. 3 (Pb3) Una bebida del PAE



Información Nutricional
 Tamaño por porción 1 Vaso (180 ml)
 Porciones por envase 1

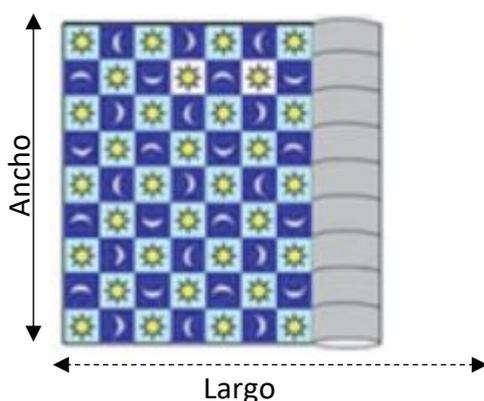
Cantidad por Porción	
Energía 140 kcal	Energía de la grasa 35 kcal
Valor Diario*	
Grasa Total 4 g	6%
Grasa Saturada 3 g	15%
Grasa Trans 0 g	
Colesterol 20 mg	7%
Sodio 130 mg	5%
Carbohidrato Total 21 g	7%
Fibra Dietaria 0 g	0%
Azúcares 21 g	
Proteína 5 g	10%
Vitamina A	40%
Vitamina C	0%
Calcio	20%
Hierro	0%
Vitamina B1	30%
Vitamina B2	40%
Niacina	30%

* Los porcentajes de Valores Diarios están basados en una dieta de 2000 calorías. Sus Valores Diarios pueden ser mayores o menores dependiendo de sus necesidades calóricas.

Una de las bebidas de leche con sabor a fresa que se entregan en el PAE (Programa de Alimentación Escolar) del colegio viene en presentación de 180 ml (1 porción). Dicha bebida tiene en su respaldo la información nutricional que se muestra en la tabla. Si un estudiante decide tomar 360 ml de esta bebida, ¿cuántos gramos de proteína estaría consumiendo?

Problema No. 4 (Pb4) La alfombra de soles y lunas

Paula ha comprado una alfombra muy grande de 6 m de largo y 3,6 m de ancho. La alfombra, tal como se puede ver con la parte desplegada que muestra la imagen. La alfombra está formada de pequeños cuadrados que contienen el dibujo de un Sol o de una Luna.



- Quando la alfombra esté desplegada del todo, ¿cuántos cuadritos habrá en total? Explica cómo lo has hecho para saberlo.
- De todos los cuadritos, ¿se puede saber cuántos contendrán un Sol y cuántos una Luna? Razona por qué sí o por qué no y, en caso de que se pueda, explica.

Problema No. 5 (Pb5) Crecimiento de bacterias

Unos científicos están investigando el comportamiento de una bacteria con el fin de controlar la proliferación de la misma. Se interesan por el día en que la población sea de 650 bacterias, porque es cuando deben iniciar una nueva técnica de control de la población. El crecimiento se puede medir siguiendo la evolución, a lo largo del tiempo, del número de bacterias por unidad de volumen, las primeras observaciones se recogen en la tabla:

Tiempo (días)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Número de bacterias	52	78	104	130	156	182	208	234	260

- Describe el tipo de relación que existe entre el número de bacterias y el número de días.
- ¿Cuántos días han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650?
- ¿Cuántas bacterias habrá a los 15 días?
- Escribe un modelo para hallar el número de bacterias después de n días.
- Representa en una gráfica con coordenadas la relación entre las dos magnitudes (tiempo en el eje de las abscisas y número de bacterias en el eje de las ordenadas).
- Hace cinco días se tomó la longitud de dos bacterias. La bacteria A tenía 0,05 mm de longitud y la bacteria B tenía 0,04 mm de longitud. Hoy de nuevo se midieron las bacterias y la bacteria A mide 0,11 mm y la bacteria B mide 0,1 mm. En los últimos cinco días y en relación con la longitud inicial: ¿Alguna de las dos bacterias ha crecido más? Explica tu razonamiento.

Problema No. 6 (Pb6) La cubierta de la cancha del colegio

Un arquitecto quiere mostrar a través de una maqueta cómo va quedar la cubierta de la cancha del colegio. Él sabe que las medidas reales de la cubierta serán 30 metros de largo y 20 metros de ancho. Si en su maqueta el largo de la cubierta mide 24 centímetros. Responde:

- ¿cuánto debe medir el ancho de la cubierta en la maqueta?
- ¿Cada centímetro de la maqueta, cuántos centímetros representa en la realidad?
- Representa la escala como una razón.

Problema No. 7 (Pb7) Altura del árbol de mango del colegio

Después de hacer una lectura acerca de un matemático egipcio que desarrolló un procedimiento para calcular la altura de las pirámides de Egipto; un grupo de estudiantes de séptimo salen entusiasmados y deciden realizar dicho procedimiento para medir la altura del árbol de mango del colegio, por lo que a determinada distancia de donde termina la sombra de este, uno de ellos se puso de pie y siguieron los siguientes pasos:

Paso 1. Midieron la estatura del compañero, la cual es dio 160 cm

Paso 2. Midieron la longitud de la sombra que proyectaba el compañero y esta les dio 100 cm.

Paso 3. Midieron la longitud de la sombra que proyectaba el árbol de mango y esta les dio 600 cm.

Incluye un dibujo de dicha situación

Escribe y desarrolla el proceso que tendrían que seguir para conocer la altura del árbol de mango.

Problema No. 8 (Pb8) Compra y venta de gomas

Andrés escuchó decir al dueño de la tienda vecina del colegio lo siguiente:

Yo compro 4 gomas por \$500 y las vendo a una razón de 3 por \$500.

¿Cuántas gomas debe comprar y en consecuencia vender, la dueña de la cafetería para obtener de esta forma una ganancia de \$10000?

Problema No. 9 (Pb9) Llaves abiertas

Un recipiente cilíndrico, se llena con dos llaves abiertas simultáneamente. La primera aporta 6 litros de agua cada 2 minutos y la segunda, 12 litros de agua cada 3 minutos. Determina:

- La cantidad de litros de agua que ingresan en un minuto a través de la primera llave.
- La cantidad de litros de agua que ingresan en un minuto a través de la segunda llave.
- Determina cuántos litros de agua hay en el recipiente a los cuatro minutos de abrir las dos llaves.
- Si el recipiente tiene una capacidad de 42 litros, ¿cuánto tiempo tarda el recipiente en llenarse?
- Determina qué ocurre con el nivel del agua a los 7 minutos.

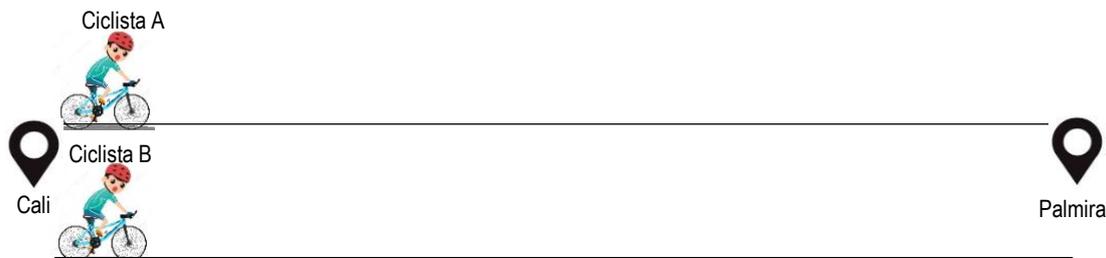
Problema No. 10 (Pb10) El tanque averiado



La figura muestra un tanque por donde ingresan 10 litros de agua cada minuto a través de un grifo, sin embargo, el tanque tenía una avería por donde salían 3 litros de agua cada minuto. A las 4:00 p.m. cuando David empezó a reparar el tanque ya había 500 litros. David terminó de reparar el tanque a las 4:20 p.m. e inmediatamente también cerró el grifo, ¿cuánta agua hay en el tanque en el instante que fue reparado?

Problema No. 11 (Pb11) Los ciclistas

Dos ciclistas A y B parten desde Cali con destino a Palmira. El ciclista A marcha con una velocidad constante de 500 metros por minuto, mientras que el ciclista B lo hace a 300 metros por minuto. Si ambos inician el recorrido a las 8:00 a.m., responde: cuando sean las 8:20 a.m. (a) ¿Qué distancia ha recorrido cada ciclista?, (b) ¿Cuánta distancia los separa en ese instante? Si se sabe que la distancia que hay de Cali a Palmira es de aproximadamente 30.000 metros, (c) ¿Cuánto tiempo tardará cada ciclista en llegar a Palmira? (d) ¿A qué hora se espera que llegue cada ciclista?



Problema No. 12 (Pb12) El reto central: ¿cuánta agua se consume en el colegio?

Determinar la cantidad de agua que se consume en el colegio, específicamente en la jornada de la tarde.

Condiciones del problema

Realizar el cálculo y estimativo de la cantidad de agua que se consume en la jornada de la tarde en el colegio. Especificar el consumo en los siguientes usos:

Baños (durante el descanso)

Regado de plantas

Aseo de la institución

Cocina y cafetería

Realizar comparativo con gráfico de barras o diagrama de pastel usando Microsoft Excel

Estimar el consumo de agua en una semana, un mes y en todo un año escolar.

Posibles recursos y materiales

Cronometro o celular

Recipientes

Computador

Lápiz y papel

Anexo E. Rúbrica de valoración de la competencia

RÚBRICA DE DESEMPEÑO COMPETENCIA PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS						
COMPONENTE COGNITIVO DE LA COMPETENCIA						
Proceso	Criterio de evaluación	Nivel 1 Preformal Ausente	Nivel 2 Receptivo Inicial	Nivel 3 Resolutivo En proceso	Nivel 4 Autónomo Esperado	Nivel 5 Estratégico Destacado
Comprender el problema	Identificar, interpretar y relacionar las tareas que pide investigar el problema y las preguntas que hay que responder.	No identifica ninguna de las tareas relacionadas o preguntas que están formuladas en el problema.	Identifica y responde algunas de las preguntas formuladas y expone algunas de las tareas que están relacionadas. Las conclusiones no tienen sentido matemático ni contextual (no son coherentes con las preguntas y tareas planteadas)	Identifica y responde algunas de las preguntas formuladas y expone algunas de las tareas que están relacionadas. Algunas de las conclusiones tienen sentido matemático y contextual son coherentes con las preguntas y tareas planteadas)	Identifica y responde todas las preguntas y las tareas que están relacionadas. Algunas de las conclusiones tienen sentido matemático y contextual (son coherentes con las preguntas y tareas planteadas).	Identifica y responde todas las preguntas y las tareas que están relacionadas. Las conclusiones tienen sentido matemático y contextual (son coherentes con las preguntas y tareas planteadas).
	Identificar, interpretar y relacionar los datos de cualquier tipología (gráficas, numéricas...), las magnitudes y las	No identifica ninguno de los datos, magnitudes y unidades	Presenta algunas dificultades para identificar determinados datos, magnitudes o unidades y	Identifica algunos de los datos, magnitudes y unidades que presenta el	Identifica todos los datos, magnitudes y unidades que presenta el problema, sin	Identifica todos los datos, magnitudes y unidades que presenta el problema y los

	unidades que están presentes en el problema.	presentes en el problema.	además no las expresa ni relaciona correctamente.	problema, sin embargo, se le dificulta relacionarlos o expresarlos correctamente	embargo, se le dificulta expresarlos o relacionarlos correctamente.	expresa y relaciona correctamente.
	Expresar (representar o ejemplificar) la situación planteada en el problema mediante estructuras concretas propias (dibujos, relaciones, diagramas, descripciones, resúmenes).	No expresa la situación planteada mediante estructuras concretas.	Se le dificulta expresar la situación planteada de manera apropiado. No se usan estructuras claras de representación.	Expresa con ayuda la situación planteada en el problema.	Expresa autónomamente la situación planteada en el problema, si es necesario experimenta con ella.	Expresa la situación planteada en el problema y si es necesario, experimenta con ella. Manifiesta claramente cuáles son los datos y sus relaciones y cuáles son los aspectos desconocidos que pide resolver.
Diseñar y ejecutar un plan de acción	Para cada pregunta formulada planificar y aplicar alguna estrategia o proceso de resolución del problema.	No define una estrategia de resolución adecuada o si lo hace es totalmente aleatoria o	Define una estrategia de resolución pero no termina de ser la adecuada.	Con ayuda define una estrategia de resolución adecuada, pero que no termina de justificar de	De acuerdo con la representación realizada y la experimentación realizada, define una estrategia de resolución adecuada, pero	De acuerdo con la representación y la experimentación realizada, define una estrategia de resolución adecuada y la

		alejada de las correctas.		forma matemática.	que no termina de justificar de forma matemática.	expone de manera matemáticamente correcta.
	Encontrar los datos necesarios (reidentificarlos, si están expuestos en el problema o, si no aparecen de manera explícita, deducirlos con las técnicas necesarias) y los razonamientos o algoritmos que permitan aplicar la estrategia establecida.	No selecciona correctamente los datos que realmente son necesarios ni utiliza razonamientos o algoritmos adecuados.	Selecciona correctamente los datos que son realmente necesarios, pero utiliza razonamientos o algoritmos que no son adecuados.	Con ayuda selecciona correctamente los datos que son realmente necesarios, pero utiliza razonamientos o algoritmos que no son adecuados	De acuerdo con la representación, experimentación del problema y estrategia establecida, o bien utiliza razonamientos de tipo no matemático y selecciona correctamente los datos que son realmente necesarios o bien utiliza razonamientos o algoritmos de tipo matemático, pero no selecciona correctamente los datos que son realmente necesarios.	De acuerdo con la representación, experimentación del problema y estrategia establecida, utiliza algoritmos o razonamientos de tipo matemático y selecciona y trabaja correctamente con los datos que son realmente necesarios.

	Aplicar y exponer la estrategia considerada, relacionado los datos y razonamientos o algoritmos necesarios de manera clara.	No aplica ningún algoritmo o procesos de razonamiento.	La aplicación de los algoritmos o procesos seleccionados es errónea o imposible de seguir, independientemente de los datos utilizados.	Aplica convenientemente los algoritmos o procesos seleccionados pero no con los datos correctos o bien los expone de manera desordenada o incompleta.	Aplica convenientemente los algoritmos o razonamientos seleccionados con los datos correctos, pero no los expone de forma concisa, clara u ordenada u obvia algunos pasos.	Aplica convenientemente los algoritmos o razonamientos seleccionados con los datos correctos y los expone de manera concisa, clara y ordenada.
Revisar la tarea	En caso tal, detectar partes del problema que no fueron bien interpretadas, o en las que los procedimientos escogidos no funcionan. Replantearlos con una nueva estrategia y todo aquello que así lo requiere (nuevas representaciones/ejemplificaciones o experimentación del problema, reidentificar los datos, aplicar algoritmos o razonamientos alternativos.	No detecta que no interpretó correctamente alguna parte del problema.	No se da cuenta que no interpreta correctamente alguna parte del problema, cuando utiliza un procedimiento no idóneo ni cuando no utiliza procedimientos de forma correcta. En cualquier caso, o bien no escribe nada o lo que escribe es totalmente arbitrario.	Si se da cuenta que no interpreta correctamente alguna parte del problema, pero no es capaz de probar una alternativa. No se da cuenta cuando utiliza un procedimiento no idóneo o cuando el procedimiento no es correcto, por lo que no necesita probar ninguna	Sí se da cuenta cuando no interpreta correctamente alguna parte del problema, pero no es capaz de probar una alternativa. Se da cuenta cuando utiliza un procedimiento no idóneo o no utiliza un procedimiento de forma correcta. En ambos casos es	Sí se da cuenta que no interpreta correctamente alguna parte del problema o cuando utiliza un procedimiento no idóneo o cuando no utiliza un procedimiento correctamente. En todos los casos, es capaz de rectificarlo: probar y aplicar una nueva estrategia con

				alternativa. En aquellos casos o bien no lo escribe o lo que escribe es arbitrario.	capaz de resolver el obstáculo.	todo aquello que lo requiere.
	Si el problema lo permite, explorar y encontrar más de una estrategia para resolverlo.	No aplica.	En caso de dar con una solución, no confirma si es la única. No explora la existencia de otras posibles soluciones. Tampoco investiga otras maneras de resolverlo.	Encuentra una solución correcta o no, no confirma si es la única o explora la existencia de otras posibles soluciones. Tampoco investiga otras maneras de resolverlo.	Encuentra una solución correcta. O bien confirma que la suya es la única o explora otras posibles soluciones. O bien investiga otras alternativas de resolver el problema.	Encuentra una solución correcta. confirma que esta solución es única o explora la existencia de otras posibles soluciones. Investiga otras maneras de resolverlo.
	Exponer la realización de las tareas pedidas y preguntas formuladas con coherencia y de manera clara y razonada.	No aplica.	No expone la realización de las tareas pedidas y las preguntas formuladas.	Le falta exponer la realización de las tareas pedidas y preguntas formuladas o le falta claridad y coherencia.	Expone la realización de las tareas pedidas y preguntas formuladas, sin embargo, falta un poco de claridad o coherencia.	Expone la realización de las tareas pedidas y preguntas formuladas de manera clara, razonada y coherentemente.

COMPONENTE AFECTIVO DE LA COMPETENCIA						
Disposición	Participar activamente con voluntad e interés en la solución del problema.	No le interesa participar en grupo, ni sugiere aportes que orienten el diseño o concepción de un plan.	Contribuye a analizar el problema, presenta estrategias dispersas de cómo abordarlo.	Participa activamente en el grupo para ayudar comprender el problema.	Su participación y contribución en el grupo es destacada, tanto en la comprensión del problema y la sugerencia de planes y estrategias efectivos para resolverlo.	Presenta y lidera estrategias que el grupo acepta y comprende, lo que permite un grado de participación alto del grupo en la resolución y el planteamiento de nuevos problemas en contexto y sistemas de representación diferentes.
	Usar estrategias creativas en la solución del problema	No usa estrategias creativas para la solución del problema.	A pesar que contribuye a analizar el problema, presenta estrategias que no son efectivas ni creativas para abordarlo.	Se esfuerza por buscar estrategias efectivas y creativas en el diseño del plan de acción.	Se esfuerza por buscar estrategias efectivas y creativas el diseño y ejecución del plan de acción.	Usa estrategias más efectivas y creativas diferentes a las que fueron diseñadas y ejecutadas y que permitieron llegar a la solución del problema.
	Escuchar y cuestionar respetuosamente las	No escucha o no cuestiona las	Se le dificultad escuchar o	A partir de escuchar y	A partir de escuchar y	A partir de escuchar y

	opiniones y puntos de vista de los compañeros.	opiniones o puntos de vista de su grupo.	cuestionar con respeto las opiniones y puntos de vista de sus compañeros.	cuestionar respetuosamente las opiniones y puntos de vista de sus compañeros ayuda a comprender el problema con criterios consensuados.	cuestionar respetuosamente las opiniones y puntos de vista de sus compañeros, ayuda a comprender, plantear y resolver el problema con criterios consensuados.	cuestionar respetuosamente las opiniones y puntos de vista de sus compañeros, ayuda a comprender, plantear, resolver y exponer la solución del problema con criterios consensuados.
COMPONENTE DE TENDENCIA DE ACCIÓN						
Persistencia	Insistir en continuar con la solución del problema a pesar de los obstáculos y dificultades presentadas.	Una vez encuentra obstáculo en el proceso de comprensión del problema, abandona el problema.	Una vez encuentra obstáculo en el proceso de diseño de estrategias del problema, abandona el problema.	Una vez detecta que no interpreta correctamente alguna una parte del problema correctamente o ha utilizado un procedimiento no idóneo o correcto abandona el problema y no intenta otras alternativas.	Insiste de manera solicitaría en continuar con la solución del problema a pesar de los obstáculos y dificultades presentadas.	Insiste en continuar con la solución del problema a pesar de los obstáculos y dificultades presentadas e insta a sus compañeros a seguir mirando otras alternativas.

Anexo H. Entrevista realizada a los alumnosSobre el ABP en general

¿Qué diferencias destacarías entre el trabajo con ABP y el trabajo tradicional en matemáticas?

¿Qué opinan en relación al trabajo en equipo?

¿Piensan que el uso de algunos recursos y herramientas tecnológicas favoreció su aprendizaje?

¿Piensan que se lograron los objetivos propuestos? ¿Por qué?

Sobre los problemas trabajados

¿Recuerdan alguno de los problemas trabajados?

¿Qué destacarías de estos problemas?

¿Qué tuvieron en cuenta a la hora de resolver un problema y qué creen que es lo más importante?

¿Cómo se sienten cuando resuelven un problema dentro de un proyecto a cuando lo hacen como parte de alguna prueba o examen?

¿Qué emociones sientes a la hora de enfrentarte a un problema matemático?

