QUINTO EXAMEN DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

1. (a) Exprese el volumen del pedazo determinado por el cilindro $y^2+z^2=1$ que corta los planos $y=x$ y $x=1$ y que está en el primer octante como una integral triple.

   (b) Determine el volumen del sólido que está encima del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2=z$.

   (c) Evalúe la integral cambiando las variables apropiadas $\iint_R sen\left(25x^2+36y^2\right)dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por la elipse $25x^2+36y^2=1$.

2. (a) Demuestre que la sucesión definida por $a_1=1$, $a_{n+1}=3-1/a_n$ Es creciente y que $a_n<3$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

   (b) Si la enésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n=\dfrac{n-1}{n+1}$.

   Calcule a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. (a) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n+3}}.$$

   (b) Determine si la serie converge o diverge.

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{1+n^2}$, (iii) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

4. Encuentre el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante y que tenga tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x+2y+3z=6$.