UNIVERSIDAD ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL.
EXAMEN FINAL.

Noviembre 29 de 2005.

NOMBRE _______________ CODIGO _

NOTA: El exámen se califica sobre 100 puntos.

1. (24 ptos) Considere los vectores $\boldsymbol{u} = (2, -1, 0)$ y $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$:

   (a) Verifique que los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son ortogonales.

   (b) Determine la ecuación del plano π que contiene a los vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y al punto $P(3, 1, -1)$.

   (c) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta ℓ que tiene la dirección del vector $2\boldsymbol{u} + 5\boldsymbol{v}$, y pasa por el punto $(1, 0, 1)$. ¿Está la recta ℓ contenida en el plano π? Explique.

   (d) Halle una base ortogonal para el plano π, que NO incluya ninguno de los vectores $\boldsymbol{u}$ o $\boldsymbol{v}$. Calcule la distancia del punto $(1, 0, 1)$ a este plano.

2. (18 ptos) ¿Puede argumentarse que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable ortogonalmente? Si su respuesta es negativa dé la razón. Si su respuesta es afirmativa, presente el argumento y determine la matriz ortogonal P y la matriz diagonal D, tales que $P^{-1}AP = D$.

3. (18 ptos) Dada la matriz,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Encuentre una base para el espacio generado por las columnas de M.

   (b) Encuentre una base para el espacio nulo de M.

   (c) Determine la nulidad de M y el rango de M. ¿Qué teorema satisfacen éstos valores? Explique.

4. (12 ptos) Considere la transformación $L : P_2 \longrightarrow P_2$ definida por $L(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$.

   (a) Verifique que L es una transformación lineal.

   (b) Halle una base para $Ker(L)$. ¿Es L uno a uno?

   (c) Encuentre una base para $Im(L)$. ¿Es L sobre?

5. (8 puntos) Resuelva uno y sólo uno de los siguientes puntos:

(a) Escriba la forma cuadrática $g(x) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4yz$ en la forma matricial $x^T A x$ donde $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, y encuentre la forma cuadrática equivalente $h(y)$ (forma canónica).

(b) Explique por qué la matriz $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, puede ser una matriz de transición en un proceso de *Markov*. Muestre que aunque T no es una matriz regular (verifique), $T^n x \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ para cualquier vector de probabilidad x.

6. (36 ptos) Califique cada una de las afirmaciones siguientes como verdadera o falsa, argumentando el por qué de su respuesta:

(a) El conjunto de todas las matrices simétricas de $n \times n$ es un subespacio del espacio de matrices $M_{n \times n}$.

(b) Todo conjunto de 4 polinomios distintos no nulos en P_3 es linealmente dependiente.

(c) Si el producto de los valores propios de una matriz A es cero, entonces A es singular.

(d) Si las columnas de una matriz A de 6×4 son linealmente independientes, entonces *rango* $(A) = 6$.

(e) Si λ es un valor propio de una matriz de $n \times n$, entonces $A - \lambda I_n$ es una matriz singular.

(f) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Entonces $L\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$.