ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

PRIMER PARCIAL DE ALGEBRA LINEAL
GRUPO 23(L- M)

PROFESOR: Luis Fernando Azcárate Mesa
Febrero 26 de 2007

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ______________________________ **CÓDIGO:** ______________

PRIMERA PARTE

1. **(25 puntos)** Determine la veracidad o falsedad de cada uno de los siguientes enunciados, ***argumentado claramente el por qué de su respuesta.***
   a. Sea A una matriz de $m\times n$. El sistema lineal $Ax=0$ con $n>m$ es inconsistente.
   b. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores ortogonales unitarios de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$, entonces $\|\vec{c}\|=1$
   c. Si A y B son matrices de $n\times n$, siempre es cierto que $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.
   d. Sea $\vec{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$ un vector tal que $A\vec{x}=\mathbf{0}$, entonces A es una matriz no singular.
   e. Si A es una matriz no singular tal que $A^2=A$, entonces $det(A)=1$.

2. **(10 puntos)** Sobre una matriz A de la que se conoce que $det(A)=5$ se aplican las operaciones elementales que se indican en el diagrama siguiente y se obtienen matrices equivalentes B, C y D. Indique, **justificando claramente**, el valor del determinante de cada una de estas matrices.

$$A\xrightarrow{-3F_2}B\xrightarrow{2F_2+F_3}C\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}D$$

3. **(10 puntos)**
   a. Si $detA=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}=-2$, entonces $det\begin{bmatrix}a_1 & 2a_3 & -2a_2+a_1\\ b_1 & 2b_3 & -2b_2+b_1\\ c_1 & 2c_3 & -2c_2+c_1\end{bmatrix}=$ _______.
   b. Si A, B y C son matrices 3×3 tales que $detA=2, detB=3, detC=\frac{1}{2}$ y $BXC^{-1}=-3A^T$ entonces $detX=$ ______.

SEGUNDA PARTE:

1. **(20 puntos)** Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, con β un número real.

$$\begin{aligned} x+y &= 4\\ 2x+y+3z &= 5\\ -3x-3y+(\beta^2-5\beta)z &= \beta-8\end{aligned}$$

   Dé condiciones sobre le parámetro β para que el sistema tenga:
   a. Solución única. **b.** Infinitas soluciones. **c.** Ninguna solución.

2. **(15 puntos)** Una matriz A de $n\times n$ es antisimétrica si cumple que $A^T=-A$. Demuestre que si A es antisimétrica entonces $det(A)=(-1)^n det(A)$ y en particular para n impar, $det(A)=0$.

3. **(20 puntos)** Dadas las rectas L_1 y L_2 y los planos π_1 y π_2 siguientes:: $L_1:\begin{cases}x=5-2t\\ y=-1+t\\ z=1-t\end{cases}$; $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=z-1$;

$\pi_1: -x+y-2=0$; $\pi_2:\begin{cases}\textit{Plano que contiene al punto } P(2,0,1)\\ \textit{y es paralelo a los vectores } \vec{u}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \text{ y } \vec{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}.\end{cases}$

Determine si:
a. La recta L_2 es paralela al plano π_1.
b. El plano π_2 y la recta L_1 son perpendiculares.
c. El punto $P(-1,-2,5)$ pertenece al plano π_1.
d. Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

OPCIONAL (5 puntos)
Halle las coordenadas del punto Q que es simétrico al punto $P(5,2,-1)$, respecto al plano $2x-3y+z+23=0$