Departamento de Matemáticas y Estadística

PRIMER PARCIAL DE ALGEBRA LINEAL
GRUPO 5(L- M)

PROFESOR: Luis Fernando Azcárate Mesa
Febrero 26 de 2007

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ______________________________ **CÓDIGO:** ____________

PRIMERA PARTE

1. **(25 puntos)** Determine la veracidad o falsedad de cada uno de los siguientes enunciados, ***argumentado claramente el por qué de su respuesta.***
   a. Sea A una matriz de $m \times n$. El sistema lineal $Ax = 0$ con $n > m$ es inconsistente.
   b. Si A y B son matrices de $n \times n$, siempre es cierto que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
   c. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores ortogonales unitarios de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$, entonces $\|\vec{c}\| = 1$.
   d. Si A es una matriz no singular tal que $A^2 = A$, entonces $det(A) = 1$.
   e. Sea $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ un vector tal que $A\vec{x} = \mathbf{0}$, entonces A es una matriz no singular.

2. **(10 puntos)** Sobre una matriz A de la que se conoce que $det(A) = 5$ se aplican las operaciones elementales que se indican en el diagrama siguiente y se obtienen matrices equivalentes B, C y D. Indique, **justificando claramente**, el valor del determinante de cada una de estas matrices.

$$A \xrightarrow{3F_2} B \xrightarrow{2F_2+F_3} C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} D$$

3. **(10 puntos)**

   a. Si $detA = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = 3$, entonces $det \begin{bmatrix} a_1 & 2a_3 & -2a_2 + a_1 \\ b_1 & 2b_3 & -2b_2 + b_1 \\ c_1 & 2c_3 & -2c_2 + c_1 \end{bmatrix} =$ ________. Muestre procesos.

   b. Si A, B y C son matrices 3×3 tales que $detA = 2, detB = 3$, $detC = \frac{1}{2}$ y $BXC^{-1} = -3A^T$ entonces $detX =$ ______ .

SEGUNDA PARTE:

1. **(20 puntos)** Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, con β un número real.

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 4 \\ 2x + y + 3z &= 5 \\ -3x - 3y + (\beta^2 - 5\beta)z &= \beta - 8 \end{aligned}$$

Dé condiciones sobre le parámetro β para que el sistema tenga:

a. Solución única. **b.** Infinitas soluciones. **c.** Ninguna solución.

2. **(15 puntos)** Una matriz A de $n \times n$ es antisimétrica si cumple que $A^T = -A$. Demuestre que si A es antisimétrica entonces $det(A) = (-1)^n det(A)$ y en particular para n impar, $det(A) = 0$.

3. **(20 puntos)** Dadas las rectas L_1 y L_2 y los planos π_1 y π_2 siguientes:

$$L_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 1 - t \end{cases} ; \quad L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z - 1 ; \quad \pi_1: -x + y - 2 = 0 ; \quad \pi_2 \begin{cases} \text{Plano que contiene al punto } P(2,0,1) \\ \text{y es paralelo a los vectores } \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Determine si:

a. La recta L_2 es paralela al plano π_1.
b. El plano π_2 y la recta L_1 son perpendiculares.
c. El punto $P(1,-3,1)$ pertenece al plano π_1.
d. Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

OPCIONAL (5 puntos)

Halle las coordenadas del punto Q que es simétrico al punto $P(5,2,-1)$, respecto al plano $2x - 3y + z + 23 = 0$

Departamento de Matemáticas y Estadística

PRIMER PARCIAL DE ALGEBRA LINEAL
GRUPO 5(L- M)

PROFESOR: Luis Fernando Azcárate Mesa
Febrero 26 de 2007

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ______________________________ **CÓDIGO:** ______________

PRIMERA PARTE

1. **(25 puntos)** Determine la veracidad o falsedad de cada uno de los siguientes enunciados, ***argumentado claramente el por qué de su respuesta.***
   a. Sea A una matriz de $m\times n$. El sistema lineal $Ax=0$ con $n>m$ es inconsistente.
   b. Si A y B son matrices de $n\times n$, siempre es cierto que $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$.
   c. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores ortogonales unitarios de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$, entonces $\|\vec{c}\|=1$.
   d. Si A es una matriz no singular tal que $A^2=A$, entonces $det(A)=1$.
   e. Sea $\vec{x}=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}$ un vector tal que $A\vec{x}=\mathbf{0}$, entonces A es una matriz no singular.

2. **(10 puntos)** Sobre una matriz A de la que se conoce que $det(A)=5$ se aplican las operaciones elementales que se indican en el diagrama siguiente y se obtienen matrices equivalentes B, C y D. Indique, **justificando claramente**, el valor del determinante de cada una de estas matrices.

$$A \xrightarrow{3F_2} B \xrightarrow{2F_2+F_3} C \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} D$$

3. **(10 puntos)**

a. Si $detA=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}=3$, entonces $det\begin{bmatrix}a_1 & 2a_3 & -2a_2+a_1\\ b_1 & 2b_3 & -2b_2+b_1\\ c_1 & 2c_3 & -2c_2+c_1\end{bmatrix}=$ ________. Muestre procesos.

b. Si A,B y C son matrices 3×3 tales que $detA=2, detB=3$, $detC=\frac{1}{2}$ y $BXC^{-1}=-3A^T$ entonces $detX=$ ______ .

SEGUNDA PARTE:

1. **(20 puntos)** Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, con β un número real.

$$\begin{aligned} x+\ y \qquad\qquad &= 4\\ 2x+\ y+\qquad 3z &= 5\\ -3x-3y+(\beta^2-5\beta)z &= \beta-8 \end{aligned}$$

Dé condiciones sobre le parámetro β para que el sistema tenga:
a. Solución única. **b.** Infinitas soluciones. **c.** Ninguna solución.

2. **(15 puntos)** Una matriz A de $n\times n$ es antisimétrica si cumple que $A^T=-A$. Demuestre que si A es antisimétrica entonces $det(A)=(-1)^n det(A)$ y en particular para n impar, $det(A)=0$.

3. **(20 puntos)** Dadas las rectas L_1 y L_2 y los planos π_1 y π_2 siguientes:

$$L_1:\begin{cases}x=2t\\ y=-1\\ z=1-t\end{cases} ;\ L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=z-1;\ \pi_1:-x+y-2=0;\ \pi_2\begin{cases}Plano\ que\ contiene\ al\ punto\ P(2,0,1)\\ y\ es\ paralelo\ a\ los\ vectores\ \vec{u}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} y\ \vec{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\end{cases}$$

Determine si:
a. La recta L_2 es paralela al plano π_1.
b. El plano π_2 y la recta L_1 son perpendiculares.
c. El punto $P(1,-3,1)$ pertenece al plano π_1.
d. Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

OPCIONAL (5 puntos)
Halle las coordenadas del punto Q que es simétrico al punto $P(5,2,-1)$, respecto al plano $2x-3y+z+23=0$