



UNIVERSIDAD
ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de
Matemáticas y Estadística

Primer Parcial de Álgebra Lineal

Septiembre 13 de 2007

Grupo 13

Profesor: Johann Suárez Motato

Nombre _____

Código: _____

1. (30 pts) Demuestre los siguientes enunciados:

- Si A es una matriz de $n \times n$, $A + A^T$ es simétrica.
- Si $Ax = b$ es un sistema lineal que tiene más de una solución; entonces, tiene un número infinito de soluciones (*Sugerencia*: Si u_1 y u_2 son soluciones, considere $w = ru_1 + su_2$, donde $r + s = 1$)
- Sea θ el ángulo entre los vectores no nulos $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$ en el plano. Si \vec{u} y \vec{v} son paralelos, entonces $\cos \theta = \pm 1$
- Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Si y solo si $u \cdot v = 0$

2. (15 pts) Determine una ecuación del plano que pasa por el punto $(-2, 3, 4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(4, -2, 5)$ y $(0, 2, 4)$

3. (10 pts) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcule $(BC - A)^T$

4. (15 pts) Determine todos los valores de t para los cuales el sistema lineal resultante:

- No tenga solución
- Tenga solución única
- Tenga infinitas soluciones

$$\begin{aligned} x + z &= 4 \\ 2x + y + 3z &= 5 \\ -3x - 3y + (t^2 - 5t)z &= t - 8 \end{aligned}$$

5. (20 pts) Una refinera produce gasolina con *azufre* y *sin azufre*. Para producir cada tonelada de gasolina *sin azufre* necesita 5 minutos en la planta mezcladora y 4 minutos en la planta de refinación; mientras que cada tonelada de gasolina con *azufre* requiere 4 minutos en la planta mezcladora y 2 minutos en la planta de refinación. Si la planta mezcladora está disponible 3 horas y la de refinación 2 horas. ¿Cuántas toneladas de cada tipo de gasolina deben producirse de modo que las plantas operen a toda su capacidad?

6. (10 pts) Determine todas las soluciones del sistema lineal dado

$$x + 2y + 3z - w = 0$$

$$2x + y - z + w = 3$$

$$x - y + w = -2$$

1. (30 pts) Demuestre las siguientes afirmaciones:

- Si A es una matriz de $n \times n$, $A + A^T$ es simétrica.
- Si $Ax = b$ es un sistema lineal que tiene más de una solución, entonces, tiene un número infinito de soluciones. (Sugerencia: Si u_1 y u_2 son soluciones, considere $w = \alpha u_1 + \beta u_2$, donde $\alpha + \beta = 1$.)
- Sea θ el ángulo entre los vectores no nulos $\vec{u} = (x_1, x_2)$ y $\vec{v} = (y_1, y_2)$ en el plano. Si \vec{u} y \vec{v} son paralelos, entonces $\cos \theta = \pm 1$.
- Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ si y solo si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2. (15 pts) Determine una ecuación del plano que pasa por el punto $(-2, 3, 4)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(4, -2, 6)$ y $(10, 1, 4)$.

3. (10 pts) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcule $(BC - A)^T$.

4. (15 pts) Determine todos los valores de t para los cuales el sistema lineal resultante:

- No tenga solución.
- Tenga solución única.
- Tenga infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} x + z &= 4 \\ 2x + y + 3z &= 5 \\ -3x - 2y + (t^2 - 5)x &= t - 8 \end{aligned}$$