UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

Álgebra lineal. Período Académico 062. G-13. Segundo parcial. Octubre 17 de 2006.

Nombre ______________ ______________________ Código

1. (10 puntos) a) Encuentre la ecuación de una recta l que pasa por el punto $(4,6,0)$ y es ortogonal a las rectas

$$\frac{x-4}{[illegible]} = \frac{y+4}{[illegible]} = \frac{z-3}{[illegible]} \qquad \frac{x}{[illegible]} = \frac{y-1}{[illegible]} = \frac{z+7}{[illegible]}$$

b) Determine el punto de intersección de la recta l y el plano perpendicular a ella que pasa por el punto $(-4,4,0)$.

(8 puntos) Halle una base para el subespacio de P_3 formado de todos los polinomios de la forma $(a+c)t^3 + (a-b)t^2 + (b+c)t - a + b$.

3. (10 puntos) Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineal y suponga que la forma escalonada reducida de $[A|\mathbf{b}]$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine el rango y la nulidad de A.

b) Halle una base para el espacio nulo de A.

c) Escriba las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, donde $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema dado y $\mathbf{x}_h$ es la solución general del sistema homogéneo asociado.

d) De ser posible, dé una base para el espacio fila de A. Si no es así, explique por qué y diga cuál información adicional requiere.

e) De ser posible, dé una base para el espacio columna de A. Si no es así, explique por qué y diga cuál información adicional requiere.

4. (10 puntos) Sean S la base estándar de $\mathbf{R}^2$, T la base $T = \{(1,1), (-1,1)\}$ y $\mathbf{v}$ $(4,-2)$.

a) Encuentre $P_{S\leftarrow T}$ y $Q_{T\leftarrow S}$.

b) Determine $[\mathbf{v}]_T$ y a continuación halle $[\mathbf{v}]_S$ utilizando $P_{S\leftarrow T}$.

5. (12 puntos) a) Proporcione un ejemplo de un subespacio de M_{22} cuya dimensión sea 2.

b) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^n$. Demuestre que si $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a cualquier $\mathbf{x} \in \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

c) Pruebe que si $\theta \in \mathbf{R}$, entonces $(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$ y $(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ son linealmente independientes.

d) Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $T = \{t-1, t+1\}$ bases para P_1. Si $P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, determine los vectores de S.