UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

10 de Abril de 2007.

Álgebra lineal. Período Académico 071. G-27. Segundo parcial.

Nombre ______________________________ Código __________

1. (10 puntos) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial M_{nn} son subespacios?

   a) El conjunto de todas las matrices diagonales de $n \times n$.

   b) El conjunto de todas las matrices no singulares de $n \times n$.

2. (8 puntos) Las matrices B y C son la forma escalonada reducida de A y A^T respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Halle bases para los espacios fundamentales asociados a la matriz A.

3. (10 puntos) Sean $S = \{t+1, t-2\}$ y $T = \{t-5, t-2\}$ bases de P_1 y $\mathbf{v} = -2t+1$.

   a) Encuentre $P_{S \leftarrow T}$ y $Q_{T \leftarrow S}$.

   b) Determine $[\mathbf{v}]_T$ y a continuación halle $[\mathbf{v}]_S$ utilizando $P_{S \leftarrow T}$.

4. (10 puntos) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que consiste en todos los vectores (a, b, c) tales que $a + b + c = 0$. Halle $\text{proy}_W \mathbf{v}$ donde $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$.

5. (12 puntos) a) El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales (x, y, z) junto con las operaciones $(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ y $c \odot (x, y, z) = (x, 1, z)$ *no* es un espacio vectorial. Muestre por medio de contraejemplos tres propiedades de la definición de espacio vectorial que no se cumplen.

   b) Suponga que el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene 20 incógnitas y que su espacio solución tiene dimensión 6. ¿Cuál es el rango de A? ¿A puede tener tamaño 13×20? Justifique sus respuestas.

   c) Sea $W = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^n$ pertenece a $W^\perp$ si, y sólo si $\mathbf{u}$ es ortogonal a cada vector $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.