UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

10 de Abril de 2007.

Álgebra lineal. Período Académico 071. G-15. Segundo parcial.

Nombre ______________________________ Código __________

1. (10 puntos) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial M_{nn} son subespacios?

   a) El conjunto de todas las matrices simétricas de $n \times n$.

   b) El conjunto de todas las matrices singulares de $n \times n$.

2. (8 puntos) Las matrices B y C son la forma escalonada reducida de A y A^T respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Halle bases para los espacios fundamentales asociados a la matriz A.

3. (10 puntos) Sean $S = \{t, t-3\}$ y $T = \{t-1, t+1\}$ bases de P_1 y $\mathbf{v} = 5t + 1$.

   a) Encuentre $P_{S \leftarrow T}$ y $Q_{T \leftarrow S}$.

   b) Determine $[\mathbf{v}]_T$ y a continuación halle $[\mathbf{v}]_S$ utilizando $P_{S \leftarrow T}$.

4. (10 puntos) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que consiste en todos los vectores (a, b, c) tales que $a+b+c = 0$. Halle $\text{proy}_W \mathbf{v}$ y la distancia de $\mathbf{v}$ a W donde $\mathbf{v} = (2, 1, -3)$.

5. (12 puntos) a) Pruebe que el conjunto de todos los números reales positivos $\mathbf{u}$ junto con las operaciones $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{uv}$ y $c \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}^c$ es un espacio vectorial.

   b) Sea A una matriz de 7×3 cuyo rango es 3. ¿Son las columnas de A linealmente dependientes o linealmente independientes? Justifique su respuesta.

   c) Sea W el espacio fila de la matriz A de $m \times n$. Muestre que si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x} \in W^{\perp}$.