

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

PRIMER PARCIAL DE ALGEBRA LINEAL

1. Determine todos los valores de  $a$  para los cuales el sistema lineal resultante (i) no tenga solución, (ii) tenga una única solución y (iii) tenga infinitas soluciones.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\x + 2y + z &= 3 \\x + y + (a^2 - 5)z &= a.\end{aligned}$$

2. Determine todos los valores de  $\lambda$  para los cuales

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

3. Demuestre las proposiciones siguientes:

(a) Si  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones del sistema lineal  $Ax = b$ , entonces

$$w = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 \text{ es una solución de } Ax = b.$$

(b) Si  $A$  es una matriz antisimétrica de  $n \times n$  y  $n$  es impar entonces  $\det A = 0$ .

(c) Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  entonces  $A$  se puede escribir como  $A = S + K$  donde  $S$  es simétrica y  $K$  es antisimétrica.

(d) Si  $A$  es invertible entonces  $\det(A) \neq 0$  y  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

(e) Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  entonces  $\det(AA^T) \geq 0$ .

(f) Si  $P$  es una matriz invertible y  $B = PAP^{-1}$  entonces  $\det B = \det A$ .

