UNIVERSIDAD ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL.
PRIMER EXAMEN PARCIAL.
Grupo 13

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ______________________ CODIGO ____________

1. (12 ptos) Determine todos los valores de k tales que el sistema

$$\begin{aligned} x + y + \quad z &= 2 \\ x + 2y + \quad 2z &= 3 \\ 3x + 4y + k^2 z &= k + 5 \end{aligned}$$

   a) tenga única solución y b) tenga infinitas soluciones.

2. (12 ptos)

   (a) Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ soluciones del sistema no homogéneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Suponga que existen escalares r y s tales que $r + s = 1$. Muestre que la combinación lineal $r\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$ también es solución del sistema y determine si la matriz A del sistema se puede llevar a la forma escalonada. Argumente su respuesta.

   (b) Sea $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ Calcule det B, determine si la matriz B es no singular y decida si el sistema $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única.

3. (8 ptos) Considere una red de 6 delatores, cada una de las cuales es representado como un vertice y donde cada arista representa un canal de comunicación. Suponga que describimos la red con la siguiente matriz de adyacencia

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Trace el digrafo G correspondiente a $A(G)$.

   (b) Determine de cuántas formas se comunica P_2 con P_1, y P_6 con P_5 en exactamente dos etapas.

4. (18 ptos) Determine para cada una de las siguientes afirmaciones su veracidad, argumentando el por qué de su respuesta:

   (a) Si $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ entonces $X^2 - 5X + 6I_2 = 0$.

   (b) Sea A una matriz cuadrada tal que $\det A = 0$, entonces el sistema homogéneo asociado al sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene sólo la solución trivial.

   (c) Sean A y B matrices cuadradas, entonces para $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$.

   (d) Si A es una matriz no singular tal que $A^2 = A$, entonces $\det\ A = 1$.

   (e) Sea $\boldsymbol{w}$ un vector $n \times 1$ tal que $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w} = 1$. La matriz $H = I_n - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$ es una matriz de Householder. Muestre que H es simétrica y que $H^{-1} = H^T$

   (f) Suponga que A y B son matrices 3×3 tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$. Entonces $\det(3A^TB^{-1}(A^{-1})^T) =$