Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL.

PRIMER EXAMEN PARCIAL.

Grupo 17

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ____ CODIGO ________________

(14 ptos) Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y \quad\quad + 3z &= 3 \\ x + \quad\quad\quad\quad z &= 2 \\ -3x - 3y + (a^2 - 5a)z &= a - 5 \end{aligned}$$

(a) Determine los valores de la constante a para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones, y escriba la solución general en este caso.

(b) Para que valores de a, la matriz A sería singular. Justifique su respuesta.

2. (10 ptos) Considere la matriz $X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(X)$.

3. (20 ptos) Para cada uno de los siguientes enunciados determine si es verdadero o falso, y argumente en cada caso el por qué de su respuesta:

   (a) Sea $A = \begin{bmatrix} & \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ entonces $-A^2 - 2A = 4I_2$.

   (b) Toda combinación lineal de matrices simétricas de $n \times n$ es una matriz simétrica.

   (c) Si A es una matriz antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.

   (d) Sea $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. El sistema $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ tiene infinitas soluciones.

   (e) Sea $B = [b_{ij}]$ una matriz $n \times n$. Se define la *traza* de B como $tr(B) = b_{11} + b_{22} + \quad + b_{nn}$. Si una matriz A de $n \times n$ es tal que $tr(AA^T) = 0$, entonces se tiene que $A = O$.

4. (6 ptos)

   (a) Demuestre o dé un argumento con el cual pruebe que la siguiente matriz

   $$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

   no es regular, en el sentido de las matrices de transición de cadenas de Markov.

   (b) Suponga que $A(G) = [a_{ij}]$ es la matriz de adyacencia de un digrafo G. ¿Cuál es el significado de la entrada c_{12} la matriz $C = [c_{ij}] = [A(G)] + [A(G)]^2 + [A(G)]^3$?

5. (Opcional 8 ptos) Sea $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ un $n-$vector tal que $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w} = 1$. La matriz de $n \times n$ $H = I_n - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$ es la matriz *Householder*. Muestre H es simétrica y no singular.