UNIVERSIDAD ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

SEGUNDO PARCIAL DE ALGEBRA LINEAL

1. (a) Determine la ecuación del plano que contenga a las rectas

$$\begin{aligned} x &= 3+2t \\ y &= 4-3t \\ z &= 5+4t \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x &= 1-2t \\ y &= 7+4t \\ z &= 1-3t \end{aligned}.$$

(b) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(3,-1,-3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(3,-2,4)$ $y$ $(0,3,5)$.

2. (a) Determine si el conjunto de todas las matrices de $n\times n$ cuyo determinante es uno es un subespacio del espacio vectorial $M_{nn}$.

(b) Determine una base para el subespacio de todos los vectores de la forma $(a,b,c,d)$ donde $d=a+b$.

3. (a) Demuestre que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\frac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ para todo $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$.

(b) Demuestre que $\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$.

(c) Muestre que el conjunto de todas las soluciones de $Ax=b$, donde $A$ es de $m\times n$, no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ si $b\neq 0$.

(d) Sea $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial $V$. Muestre que $S$ es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores en $S$ es una combinación lineal de los demás vectores en $S$.

**(e) Demuestre que si $V$ es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces cada subespacio no nulo $W$ *de* $V$ tiene una base finita y**

$\dim W \le \dim V$.

**4. Si** $$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

**(a) Determine una base para el espacio nulo de la matriz $A$.**

**(b) Determine una base para el espacio generado por los renglones de $A$.**

**(c) Calcule el rango y la nulidad de $A$.**