ALGEBRA LINEAL.
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL.
Grupo 5

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ____ CODIGO _________________

NOTA: El exámen se califica sobre 100 puntos.

1. (20 ptos) Considere los vectores $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (2, 3, -1)$. Resuelva los siguientes ejercicios de acuerdo con los vectores dados:
   (a) Determine si los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son paralelos.
   (b) Halle un vector $\boldsymbol{w}$ que sea combinación lineal de $\boldsymbol{u}$ y de $\boldsymbol{v}$.
   (c) Encuentre un vector ortogonal a $\boldsymbol{w}$.
   (d) Halle la ecuación del plano que contiene a $\boldsymbol{u}$ y a $\boldsymbol{v}$, que pase por el punto $(-1, 1, -1)$.

2. (20 ptos) Encuentre una recta paralela a la recta intersección de los planos $\pi_1 : 2x - 3y + z = 2$ y $\pi_2 : 2x + y - z = 4$ que esté contenida en uno sólo de los dos planos.

3. (42 ptos) Determine para cada una de las siguientes afirmaciones su veracidad, argumentando en cada caso su respuesta:
   (a) Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ entonces $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.
   (b) El conjunto $V = \mathbb{R}$ dotado con las operaciones $u \oplus v = 2u - v$ y $c \odot u = cu$, es un espacio vectorial.
   (c) Sean a, b, c, α, β y γ números reales. Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son: $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\mathbb{R}^3$, los planos de la forma $ax + by + cz = 0$ y las rectas con ecuación paramétrica de la forma
   $$\begin{aligned} x &= \alpha t \\ y &= \beta t \\ z &= \gamma t \end{aligned}$$
   (d) Sean W_1 y W_2 subespacios del espacio vectorial W. Sea $W_1 + W_2 = \{w \in W : w = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de W.
   (e) Sea $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Sea A una matriz $n \times n$ no singular. Muestre que el conjunto $\{A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, ..., A\boldsymbol{v}_n\}$ también es una base de $\mathbb{R}^n$.

4. (28 ptos) Considere la matriz
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$
   (a) Considere el vector $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Escriba las soluciones $\boldsymbol{x}$ del sistema no homogéneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en la forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$. Donde $\boldsymbol{x}_p$ es una solución particular y $\boldsymbol{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado.
   (b) Encuentre una base y la dimensión del espacio nulo de la matriz A, justificando por qué los vectores escogidos forman dicha base.