UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES.
EXAMEN FINAL. 23 de mayo de 2006

NOMBRE:______________________________ GRUPO:_____

1. (15 puntos)

   (a) Si $u = f(x, y)$ donde $x = se^t$ y $y = \text{sen}(t^2)$, calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$.

   (b) Escriba la expresión en términos de integrales que permite calcular el volumen del sólido acotado encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (NO CALCULE el volumen).

   (c) Haciendo un **cambio adecuado de variables** evalúe la integral $\displaystyle\iint_R \text{sen}(25x^2+36y^2)\, dA$, donde R es la región plana acotada por la elipse $25x^2 + 36y^2 = 1$.

2. (15 puntos)

   (a) Muestre que la sucesión definida por $a_1 = 1$ $a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n}$ satisface $a_n < 3$ para toda n y que es creciente. Deduzca que la sucesión es convergente y determine su límite.

   (b) Si la enésima suma parcial de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, determine a_n y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (c) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$.

3. (12 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si la serie dada es convergente o divergente. Indique los criterios que utiliza.

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{1+n^2} \qquad \text{iii) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

4. (10 puntos)

   (a) Encuentre el volumen de la caja rectangular más grande que esté en el primer octante y que tenga tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

   (b) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente en el punto (-1,1,2) a la curva de intersección de las superficies $z = x^2 + y^2$ y $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

5. (16 puntos) Determine el valor de verdad de las proposiciones siguientes, justificando en cada caso su respuesta:

   (a) La dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y,z) = z^2 e^{x/y}$ en el punto (0,1,1) ocurre en la dirección del vector $\vec{v} = (1,0,2)$.

   (b) La función f definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$, es continua en $(0,0)$.

   (c) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series divergentes, entonces la serie $\sum(a_n + b_n)$ es divergente.

   (d) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

NOTA: se califica sobre 60 puntos.