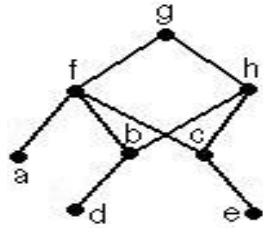


**MATEMATICAS DISCRETAS.  
EXAMEN FINAL.**

1. (12 pts) En cada uno de los siguientes enunciados llene los espacios, subraye y argumente, según el caso, para justificar su respuesta.

- (a) Considere la relación  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$  sobre el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Se puede decir que  $R$  es una relación que satisface la propiedad \_\_\_\_\_ y la propiedad \_\_\_\_\_ pero no la propiedad \_\_\_\_\_. Si agregamos los pares ordenados \_\_\_\_\_, entonces  $R$  adquiere esta última propiedad y se convierte así en una \_\_\_\_\_.
- (b) Los puntos siguientes se refieren al diagrama adjunto de una relación de orden sobre el conjunto  $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ .



- i.  $\max_B = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $\min_B = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- ii.  $\inf_B\{b, f, g, h\} = \underline{\hspace{2cm}}$
- iii. El conjunto de cotas superiores sobre  $B$  del subconjunto  $C = \{b, c, d, e\}$  es \_\_\_\_\_.
- iv.  $\min_B\{b, f, g, h\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (c) El grupo  $(S_4, \circ)$  donde  $\circ$  es la composición de permutaciones *(es)*/*(no es)* isomorfo al grupo de simetrías del cuadrado porque \_\_\_\_\_. Pero este grupo de simetrías *(tiene)*/*(no tiene)* un subgrupo isomorfo a  $Z_4$ . Explique aquí su respuesta \_\_\_\_\_.
- (d) Sea  $E : B^5 \rightarrow B^{25}$  ( $B = Z_2$ ) una función codificadora con distancia mínima entre las palabras codificadas igual a 9. El máximo valor de  $k$  para detectar errores de peso  $\leq k$  es \_\_\_\_\_ y *(se puede)*/*(no se puede)* corregir errores de peso igual a 6 porque \_\_\_\_\_.

2. (a) (6 pts) Demuestre que  $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$ .
- (b) (10 pts) Defina recursivamente el conjunto  $L$  de las cadenas de la forma  $a^n b a^n$ . Muestre mediante inducción estructural que todas las cadenas de  $L$  tienen un número impar de caracteres. Determine la gramática  $G$  que genera el lenguaje  $L = \{a^n b a^n : n \geq 1\}$ . ¿Es  $L$  un lenguaje regular? ¿Por qué?
3. (12 pts) Un modelo para el número de langostas que se capturan cada año se basa en la suposición de que el número de langostas que se capturan durante un año es el promedio del número de langostas capturadas en los dos años inmediatamente anteriores.
- (a) Determine una relación de recurrencia para  $\{L_n\}$ , donde  $L_n$  es el número de langostas capturadas durante el año  $n$  según la hipótesis de este modelo.
- (b) Determine  $L_n$  si el primer año se capturaron 100.000 langostas y en el segundo año se capturaron 310.000 langostas.

4. (10 ptos)

- (a) Explique por qué la suma directa  $Z_2 \oplus Z_4 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (0,2), (1,2), (0,3), (1,3)\}$  es un contraejemplo del siguiente resultado: Si  $G$  es un grupo cíclico y  $H$  es un grupo cíclico entonces  $G \oplus H$  es cíclico.
- (b) Sea  $G$  un grupo cualquiera y  $g$  un elemento fijo de  $G$ . Defina  $\phi : G \rightarrow G$  por  $\phi(x) = gxg^{-1}$ . Pruebe que  $\phi$  es un isomorfismo de  $G$  sobre  $G$ .

5. (10 ptos) La función de codificación  $E : B^2 \rightarrow B^5$  está definida mediante la matriz de verificación de paridad  $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (a) Determine el código de grupo  $C$ .
- (b) Suponga que tiene las siguientes palabras recibidas:  $r_1 = 01001$ ,  $r_2 = 10101$  y  $r_3 = 11011$ . De ser posible, decodifique cada una de estas palabras e indique las razones por las cuales puede asegurar que la palabra fue bien decodificada o no.

6. (15 ptos) Se define una gramática  $G$  como sigue:

$$\begin{array}{l} \Sigma \rightarrow aB \quad D \rightarrow bC \\ \Sigma \rightarrow aC \quad D \rightarrow bD \\ G : B \rightarrow aA \quad D \rightarrow aA \\ C \rightarrow bD \quad A \rightarrow cA \\ A \rightarrow c \end{array}$$

- (a) Construya un reconocedor finito  $M$  para  $L(G)$ .
- (b) Formule el sistema descriptor del reconocedor  $M$ .
- (c) Encuentre una expresión regular que describa  $L(G)$ .
- (d) ¿Pertenece la cadena  $aaccabac$  a este lenguaje? En caso afirmativo ¿qué trayectoria determina en el reconocedor?

7. (15 ptos) Considere la siguiente máquina  $M$

	0	1	
A	B	E	0
B	C	D	1
C	B	A	0
D	B	B	1
E	B	A	0
F	G	G	1
G	F	H	0
H	I	G	0
I	G	G	1

Muestre la tabla de estados de una máquina de *Moore* reducida y conexa equivalente a  $M$ . Diga por qué es conexa. Si existe alguna cadena que diferencia entre  $A$  y  $C$  determine la longitud mínima de tales cadenas.

8. (10 ptos) Construya un reconocedor para el lenguaje  $L = (a^* \cup (ab)^* \cup (abc)^*)^*cd$ . Si utiliza  $\lambda$  transiciones debe eliminarlas en la máquina final.