MATEMATICA DISCRETA.
PRIMER EXAMEN PARCIAL.

Profesor ANIBAL SOSA

1. (24 ptos) Considere los siguientes enunciados:

   (a) Existe una única solución de la ecuación $ax + b = c$, para cualquier terna de números reales a, b y c con $a \neq 0$.

   (b) Sea $f : A \to B$ una función inyectiva y suponga que $X \subset A$ y $Y \subset A$. Entonces $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

   Establezca explícitamente la hipótesis, la tesis y luego dé una demostración de cada enunciado.

2. (16 ptos)

   (a) Demuestre o refute con un contraejemplo el siguiente enunciado: *Sea R una relación simétrica y transitiva en un conjunto A, entonces R es reflexiva.*

   (b) Suponga que una relación R dada sobre un conjunto A es asimétrica.[1] ¿Es R necesariamente antisimétrica? Explique.

3. (a) (ptos) Muestre que la relación R sobre el conjunto de todas las funciones diferenciables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que consiste en todos los pares (f, g) tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo x, es una relación de equivalencia. Describa las clases de equivalencia definidas por R y determine que funciones pertenecen a la misma clase de equivalencia de la función $h(x) = e^x + 2x^3$.

   (b) (ptos) Use un argumento convincente para mostrar que la partición del conjunto de cadenas de bits de longitud 8, formada a partir de las clases de equivalencia dadas por las cadenas que coinciden en sus primeros 5 bits, es un *refinamiento*[2] de la partición formada por las clases de equivalencia de las cadenas de bits que coinciden en sus tres primeros bits.

4. (18 ptos)

   (a) Demuestre utilizando las propiedades de las álgebras de Boole que $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$.

   (b) Considere la función booleana $F(x, y, z) = xy + x\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$. Dibuje un circuito que produzca las mismas salidas que F usando sólo compuertas NAND.

5. (14 ptos)

   (a) Considere la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Determine el dominio y el rango de f. ¿Es f una función inyectiva? Explique.

   (b) Sea U un conjunto dado y $X \subset U$. Defina la función $C : X \to \{0, 1\}$

   $$C_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in X, \\ 0, & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

   C_X es la *función característica* de X. Verifique que $C_{X-Y}(x) = C_X(x)[1 - C_Y(x)]$ para toda $x \in U$. ¿Es f una función sobre? Explique.

---

[1] Una relación R es asimétrica si $(a, b) \in R$ implica que $(b, a) \notin R$.

[2] Una partición P es un refinamiento de la partición Q, si cada conjunto de P es un subconjunto de alguno de los conjuntos de Q.