2. DESARROLLO DE FORMULAS PARA PAGOS SIMPLES

Por pagos simples entendemos aquellos que envuelven una sola transacción, vr. gr. se invierte* hoy una suma P, principal, y se recibe la suma F al concluir el período **n**, de acuerdo a un rédito o tasa **i**, compuesto.

Para el caso tradicional de intereses vencidos, el interés compuesto trabaja agregando, al final de cada período, al principal acumulado el interés devengado, constituyendo todo ello un nuevo principal para efectos de la composición en el período siguiente.

La forma usual de relacionar la suma F a recibir al final del período con el principal P invertido es:

Final del Período	**Efectivo Acumulado**		
0	P	=	P
1	$P + Pi$	=	$P(1+i)$
2	$P(1+i) + [P(1+i)]\,i$	=	$P(1+i)^2$
. .		. .	
. .		. .	
n	. . . .	=	$P(1+i)^n$

Esta fórmula se traduce en la tradicional:

$$F = P(1+i)^n \qquad (1)$$

Otra manera de llegar al mismo resultado consiste en asumir que al inversionista se le entrega el interés al final de cada período y él procede a invertirlo a la misma tasa. Los intereses, Pi, se entregan al final de cada período, incluyendo el último o enésimo, en el cual recibe además de vuelta el principal P.

---

* Aunque siempre nos referimos al inversionista que compromete un principal P en busca de un mayor pago futuro F, todo lo que aquí se deduce aplica también a un deudor que toma en préstamo P y repaga F.

El siguiente gráfico nos muestra esta situación:

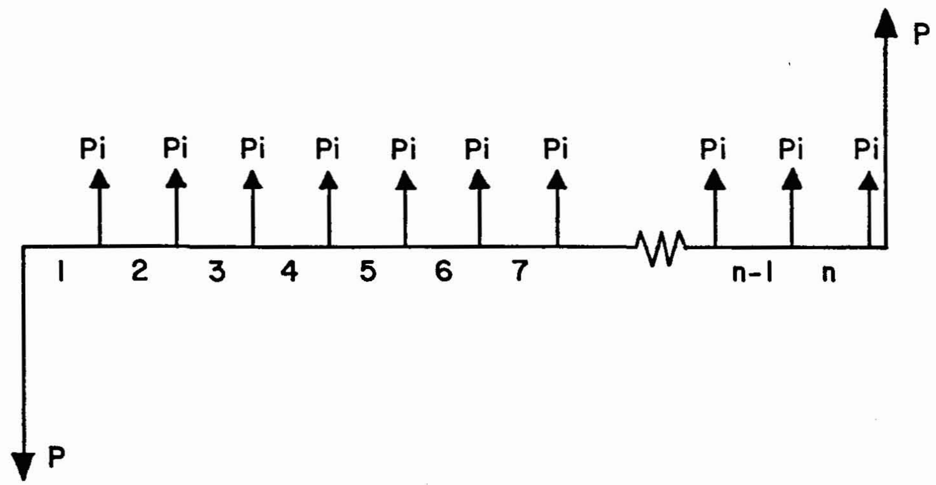


GRAFICO No. 1

El efectivo que habrá recogido el inversionista al final del período **n** incluye:

1) Los primeros Pi que recibe como intereses, al final del primer período, se reinvierten durante (n-1) períodos a la misma tasa de interés compuesto **i** y generan:

$$Pi\ (1 + i)^{n-1}$$

2) Los segundos Pi recibidos se reinvierten durante (n-2) períodos y generan:

$$Pi\ (1 + i)^{n-2}$$

3) Sucesivamente los Pi de los períodos siguientes compondrán intereses por un período menos, siendo que los últimos, localizados al final del período **n**, no alcanzan a redituar dada su ubicación justo al final del intervalo considerado.

4) Finalmente, al concluir el período **n** se recibe también el principal, P.

Podemos, pues, considerar el valor final F recibido como la siguiente suma:

$$F = Pi\,(1+i)^{n-1} + Pi\,(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots. + Pi\,(1+i)^2 + Pi\,(1+i) + Pi + P \qquad (2)$$

Los dos miembros de la ecuación (2) pueden multiplicarse por (1 + i) dando origen a la expresión (3):

$$(1+i)\,F = Pi\,(1+i)^n + Pi\,(1+i)^{n-1} + Pi\,(1+i)^{n-2} + \ldots + Pi\,(1+i)^2 + Pi\,(1+i) + P\,(1+i) \qquad (3)$$

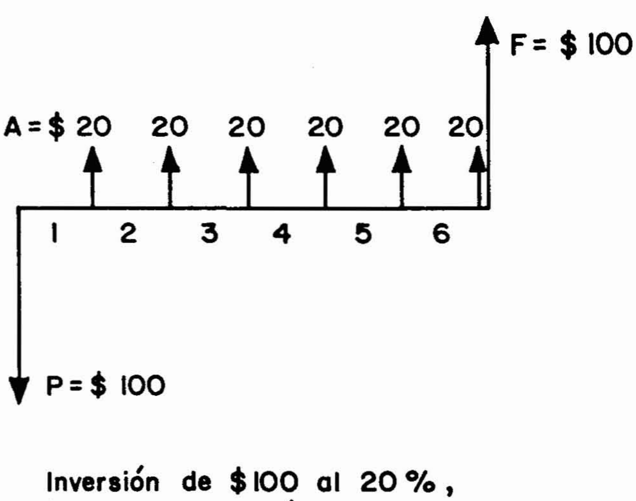
Al restar la expresión (2) de la (3) obtenemos:

$$\begin{aligned} iF &= Pi\,(1+i)^n + P\,(1+i) - Pi - P \\ &= Pi\,(1+i)^n + P + Pi - Pi - P \end{aligned}$$

De donde se llega finalmente a la tradicional ecuación (1):

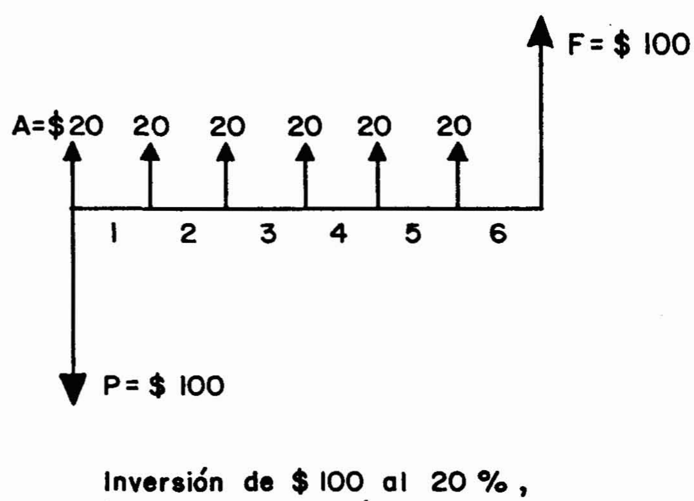
$$F = P\,(1+i)^n \qquad (1)$$

Toda la disgresión anterior nos servirá para entender mejor lo que ocurre en el caso de los intereses anticipados. En este evento el inversionista recibe sus intereses, Pi, al comienzo de cada período, así que la diferencia entre los flujos de efectivo que generan las dos alternativas, una con intereses por período vencido y otra por período anticipado, se reflejará, en la práctica, en los períodos cero y **n**. Veámoslo en los siguientes gráficos:



Inversión de $ 100 al 20 %, intereses por período vencido, durante 6 años.

GRAFICO No. 2



Inversión de $ 100 al 20 %, intereses sobre período anticipado, durante 6 años.

GRAFICO No. 3

Obsérvese que en ambos casos el inversionista recibiría $ 220 si los pesos de diferentes períodos se pudieran sumar. Como puede observarse los intereses anticipados permiten al inversionista comenzar a reinvertir sus réditos un período antes, y aunque no recibe intereses al final del período **n**, la inversión descrita en el Gráfico No. 3 es necesariamente mejor que la representada en el Gráfico No. 2, por cuanto el dinero se recibe antes, o lo que es lo mismo, se pone a trabajar antes. Veamos ahora qué tanto mejor es la inversión con intereses anticipados y para ello generalicemos de nuevo la situación, mediante la inversión descrita en el Gráfico No. 4 que corresponde al caso de intereses anticipados.

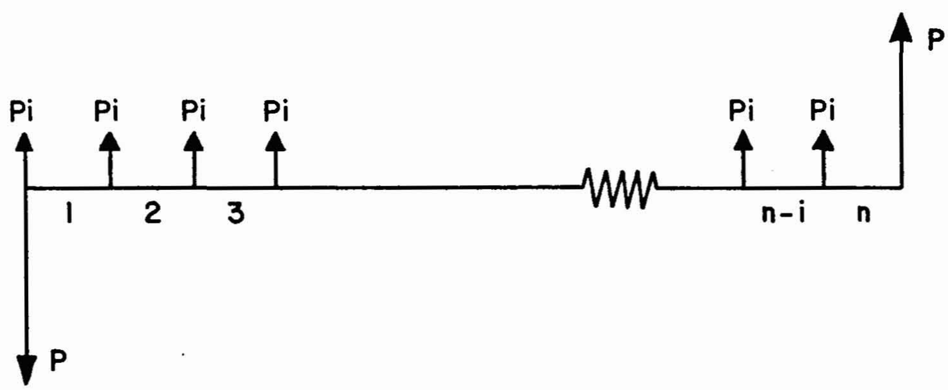


GRAFICO No. 4

Al igual que en el caso anterior el inversionista reinvierte sus intereses, pero esta vez al comienzo de cada período. La cantidad final recibida, que denominaremos **f**, es la siguiente suma, observando que al término del período **n** sólo recibe el principal:

$$f = Pi\,(1 + i)^{n} + Pi\,(1 + i)^{n-1} + \ldots + Pi\,(1 + i) + P \qquad (4)$$

Aplicando de nuevo el artificio de cálculo de multiplicar los dos miembros de la ecuación (4) por (1 + i) tenemos:

$$(1 + i)\,f = Pi\,(1 + i)^{n+1} + Pi\,(1 + i)^{n} + \ldots + Pi\,(1 + i)^{2} + P\,(1 + i) \qquad (5)$$

Haciendo, como en oportunidad anterior, la resta (5) — (4) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
if &= Pi\,(1 + i)^{n+1} + P\,(1 + i) - Pi\,(1 + i) - P \\
&= Pi\,(1 + i)^{n+1} - Pi^2
\end{aligned}
$$

Luego:

$$f = P\,(1 + i)^{n+1} - Pi \qquad (6)$$

La f deducida tiene el mismo significado de la F utilizada anteriormente, salvo que utilizamos minúscula para diferenciar el caso de los intereses anticipados.

Esta ecuación reviste gran importancia pues liga los factores F y P para casos de intereses anticipados y nos permite trabajar con las tablas o las calculadoras existentes, bastando para ello que se asuma para el cálculo tradicional un período más y que a la respuesta se le sustraiga el valor Pi.

En efecto, $(1 + i)^{n+1}$ es el factor para hallar F conocido P, al i% de interés compuesto vencido* que se encuentra tabulado en los distintos textos. Solo se requiere efectuar el cálculo considerando un período más. Igual procedimiento puede emplearse con las calculadoras financieras.

Una alternativa un tanto extrema, pero muy interesante, surge sí el inversionista decide reinvertir sus intereses, Pi, también bajo la modalidad de la composición anticipada. Tomemos el ejemplo descrito en el Gráfico No. 3, que representa una inversión de \$100 al \$20 le generaría, de inmediato, al mismo 20 % de interés anticipado, otros \$4 que, a su turno, también podría reinvertir, recibiendo por ellos \$0.80 y así indefinidamente, mientras el costo de la transacción no lo haga impráctico.

---

*Este factor se denomina en los libros sobre el tema (F/P, i% , n) o (caf, i% , n). Es el factor de cantidad compuesta.

La situación anterior puede tratarse analíticamente y deducir cuál es la máxima suma que el inversionista puede acumular al comienzo de cada período, a fin de determinar la cantidad de efectivo F que tendrá acumulada al final del período **n**.

Los Pi que obtiene originalmente podrán reinvertirse inmediatamente, recibiendo otros intereses equivalentes a (Pi) i, es decir Pi^2. Estos, a su vez, también se reinvertirán en el acto, dando lugar a otro $(Pi^2)i$, es decir, Pi^3, y así se repetirá la operación **m*** veces, lo cual conduce a que al comienzo de cada período el inversionista dispondrá de una suma A igual a:

$$A = Pi + Pi^2 + Pi^3 + \dots + Pi^m \qquad (7)$$

Multiplicando por **i** los dos miembros de la ecuación (7):

$$Ai = Pi^2 + Pi^3 + Pi^4 + \dots + Pi^{m+1} \qquad (8)$$

Si $i < 1$, como es lo usual, entonces las expresiones (7) > (8) luego al efectuar la resta (7) — (8):

$$A - Ai = Pi - Pi^{m+1}$$

De donde

$$A = \frac{Pi - Pi^{m+1}}{1 - i}$$

Como la operación de reinversión se puede repetir indefinidamente, o al menos hasta que el costo de la transacción lo haga impráctico, el límite cuando **m** tiende a infinito nos produce la máxima cantidad de efectivo que el inversionista logra recoger al comienzo de cada período:

$$\lim_{m \to \infty} A = \frac{Pi}{1 - i} \qquad (9)$$

---

*No confundir **m** y **n**. El segundo se refiere al número de períodos, vr. gr. meses, considerados, mientras que el primero indica el número de veces que reinvertimos el interés acumulado.

ya que i^{m+1} tiende a cero al crecer **m** indefinidamente.

La serie anteriormente descrita es rápidamente convergente. Obsérvese que en el ejemplo los \$100 produjeron \$20, éstos produjeron \$4, y éstos \$0.80, es decir, que en solo dos etapas de reinversión ya hemos recogido \$24.80, cuando el límite máximo de reinversión es \$25, [\$20/(1—0, 20)].

Tomemos ahora una inversión un tanto distinta y que se describe en el Gráfico No. 5.

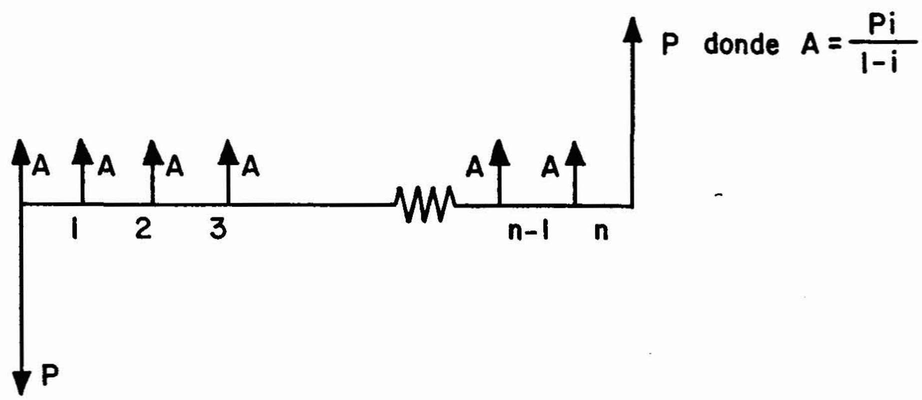


GRAFICO No. 5

Llamemos ϕ^* la suma acumulada al final del período **n** y que será, en este caso igual a:

$$\phi = \frac{Pi}{1-i}(1+i)^n + \frac{Pi}{1-i}(1+i)^{n-1} + \dots + \frac{Pi}{1-i}(1+i) + P \qquad (10)$$

Al efectuar la diferencia (11) — (10):

$$i\phi = \frac{Pi}{1-i}(1+i)^{n+1} + P(1+i) - \frac{Pi}{1-i}(1+i) - P$$

$$= \frac{Pi}{1-i}(1+i)^{n+1} + P + Pi - \frac{Pi}{1-i}(1+i) - P$$

$$= \frac{Pi}{1-i}(1+i)^{n+1} + \frac{Pi\,(1+i)}{1-i} - \frac{Pi\,(1+i)}{1-i}$$

$$= \frac{Pi}{1-i}(1+i)^{n+1} + \frac{Pi - Pi^2 - Pi - Pi}{1-i}$$

$$= \frac{Pi}{1-i}(1+i)^{n+1} - \frac{2Pi^2}{1-i}$$

Luego:

$$\phi = \frac{P}{1-i}(1+i)^{n+1} - \frac{2Pi}{1-i}$$

$$\phi = \frac{P\,(1+i)^{n+1} - 2i}{1-i} \qquad (12)$$

Esta es la máxima suma ϕ que el inversionista podría llegar a acumular al final del período **n** si hubiera procedido a reinvertir indefinidamente sus intereses anticipados bajo la misma modalidad.

La única limitación sería el costo de la transacción que podría limitar el número de reinversiones. Sin embargo, en la práctica, este hecho ocurre en las instituciones financieras que pueden congregar pequeñas sumas procedentes de reinversiones varias, reuniendo así un nuevo principal que puede ameritar incurrir en el costo de la transacción.

Desde el punto de vista del deudor, caso en el cual ϕ sería el monto a pagar al final del período **n**, la situación sería real si algún día se institucionalizara este esquema de pago, o si, no habiendo hecho pagos anticipados Pi, y cancelando P al final de **n**, el deudor fuera también una entidad financiera que hubiese podido emplear los intereses anticipados como lo hizo el inversionista hipotético descrito. Es decir, este costo extremo sería un costo extremo de oportunidad, para el deudor.