QUE SON SISTEMAS ANALOGOS Y ALGUNAS DE SUS VENTAJAS

HUMBERTO RINCON C.

Ingeniero Civil, Universidad Nacional. M.Sc. in C.E., University of Pennsylvania. M.Sc. in E.M., University of Pennsylvania. Ex instructor, University of Pennsylvania. Ex profesor Univalle, Jefe Area Cuantitativa ICESI.

INTRODUCCION

Presentaremos el tema mediante dos ejemplos marcadamente diferentes: un caso dinámico-eléctrico de gran sencillez y un caso elástico de relativa sofisticación.

Cuando dos sistemas son describibles por la misma ecuación o ecuaciones, suele aprovecharse cualquier ventaja de tipo experimental que brinde uno de ellos, para estudiar el otro.

También puede ocurrir que las ecuaciones que describen un sistema son más fácilmente identificables que las del otro, que es el que verdaderamente nos interesa.

ANALOGIA FUERZA-VOLTAJE

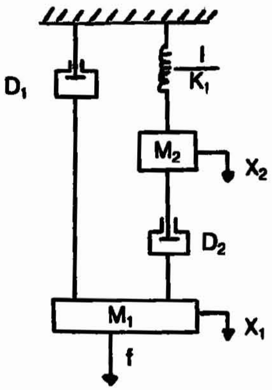

FIGURA 1

El sistema de la la figura 1 consta de dos masas M_1, M_2 conectadas a un resorte $(1/K_1)$ y a dos amortiguadores D_1 y D_2. Supondremos que el resorte se opone al movimiento con fuerza proporcional al desplazamiento y que los amortiguadores lo hacen con fuerzas proporcionales a las velocidades.

Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos:

$$M_1 \frac{d^2X_1}{dt^2} = f - D_1 \frac{dX_1}{dt} - D_2 \left(\frac{dX_1}{dt} - \frac{dX_2}{dt}\right) \quad (1)$$

$$M_2 \frac{d_2X_2}{dt_2} = -\frac{1}{K_1} X_2 - D_2 \left(\frac{dX_2}{dt} - \frac{dX_1}{dt}\right) \quad (2)$$

Observemos el circuito de dos bucias de la figura 2 en donde U_1 y U_2 son las corrientes de bucia, M_1 y M_2 inductancias, D_1 y D_2 resistencias y K_1 capacitancia. Aplicando Kirchoff tenemos:

$$f - M_1 \frac{dU_1}{dt} - D_2 (U_1 - U_2) - D_1 U_1 = 0$$

$$- M_2 \frac{dU_2}{dt} - \frac{1}{K_1}\int_0^t U2 \, dt - D_2 (U_2 - U_1) = 0$$

En donde $U_1 = \frac{dX_1}{dt} =$ velocidad y por lo tanto

$\frac{1}{K_1}\int_0^t U_2 \, dt = X_2 (t) - X_2 (0)$ o simplemente

X_2 (t), si suponemos condiciones iniciales nulas.

Ahora:

$$f - M_1 \frac{d^2X_1}{dt^2} - D_2\left(\frac{dX_1}{dt} - \frac{dX_2}{dt}\right) - D_1 \frac{dX_1}{dt} = 0$$

$$- M_2 \frac{d^2X^2}{dt^2} - \frac{1}{K_1} X_2 - D_2\left(\frac{dX_2}{dt} - \frac{dX_1}{dt}\right) = 0$$

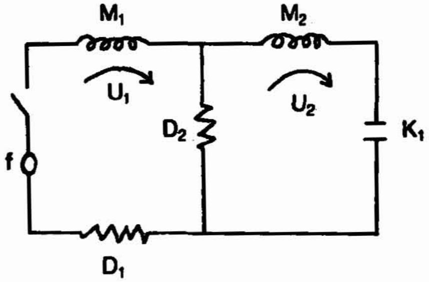

FIGURA 2

que equivalen idénticamente a (1) y (2). La analogía "fuerza-voltaje" contiene los siguientes pares análogos:

fuerza	voltaje
masa	inductancia
D	resistencia
K	capacitancia
velocidad	corriente
desplazamiento	carga eléctrica

Resulta claro que el circuito eléctrico análogo es fácil y económicamente realizable, que sus parámetros pueden ser fácilmente cambiados y que se pueden extraer toda clase de consecuencias útiles aplicables al sistema mecánico.

ANALOGIA DE LA MEMBRANA

La analogía anterior requirió únicamente conocimientos de física general, entre otros, la segunda ley de Newton y las leyes de Kirchoff.

La analogía de la membrana tiene que ver con la teoría de la elasticidad y fue establecida por el investigador alemán PRANDTL EN 1905.

Consideremos un tubo cilíndrico, uno de cuyos extremos está sellado por una membrana inicialmente plana. Si por el otro extremo se introduce aire a presión (p) es muy claro que la membrana experimentará un cambio de forma (deformación) análogo al que se producía inicialmente en el extremo de las cañas con agua-jabón que usábamos en la niñez. Esa nueva forma está caracterizada por la ecuación diferencial.

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{-p}{T} \quad (3)$$

En donde x, y son coordenadas que se miden sobre la superficie inicialmente plana de la membrana, z el corrimiento longitudinal que sufre un punto de la membrana, p la presión aplicada y T la "fuerza de membrana".

El sistema análogo es una pieza cilíndrica (eje) con sección transversal igual a la cubierta por la membrana del tubo y bajo la acción *de un torque o par de torsión* T. Esta es la situación que se presenta siempre que transmitimos potencia de una parte de un eje a otra.

Obviamente éste es el sistema técnicamente importante. El fácilmente reproducible y analizable es el del tubo con su tapa-membrana. El análisis de la torsión de un eje conduce a la ecuación (Timoshenko, Theory of Elasticity).

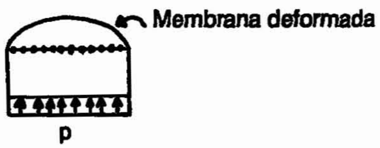

FIGURA 3

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x_2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} = -2G\theta \quad (4)$$

que es la ecuación de POISSON. Aquí ϕ es la "función de esfuerzo", G es el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante y θ el ángulo de torsión. Trataremos el caso simple del eje de sección circular.

Si la membrana cubre una abertura circular, tendremos simetría rotacional y pasando a coordenadas polares la ecuación (3), tendremos:

$$\frac{d^2z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dz}{dr}\right) = -\frac{p}{T}$$

$$\therefore z = -\frac{pr2}{4T} + C_1 \ln r + C_2$$

Pero es claro que $C_1 = 0$ y como $z = 0$ en $r = a$, tenemos

$$z = \frac{p}{4T}(a^2 - r^2)$$

Pasando al sistema análogo (z: ϕ $\frac{P}{T}$: $G\theta$)

obtenemos:

$$\phi = \frac{G\theta}{2}(a^2 - r^2)$$

$$\text{pero } \tau = -\frac{d\phi}{dr} = \frac{-G\theta}{2}(-2r) = G\theta r \quad (5)$$

El torque será

$$T = \int \tau r^2 \, dA = G\theta \int_0^a r^2 \, dA = G\theta J \therefore G\theta = \frac{T}{J}$$

$$\therefore \tau = \frac{Tr}{J} \quad (6)$$

que es la ecuación de diseño de ejes circulares. J es el momento polar de inercia de la sección, T el torque que actúa sobre la sección.

CONCLUSIONES

En el ejemplo 1 vimos cómo el circuito análogo nos permite escribir las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico o, al menos, verificarlas.

Además, nos permite experimentar indirectamente con el sistema mecánico a través del eléctrico.

En el ejemplo 2 vimos que la integración de la ecuación (3) nos permite evadir la (4). Una vez integrada la (3), la alteramos mediante la analogía y obtenemos (5) y (6) como si hubiéramos resuelto a (4), cosa que nunca ocurrió. A pesar de que el caso de la sección circular admite una solución elemental, el ejemplo 2 ilustra bien el uso de la analogía.