Segundo Parcial de Álgebra Lineal

Profesor: Johann Suárez Motato Julio 2 de 2010

1. (12 pts) Determine la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados **justificando** su respuesta:

   a) $\text{Gen}\{(1,0,2);(0,1,-3),(4,3,-1),(-5,2,-16)\}$ es el plano $2x-3y-z=0$.

   b) Si A es una matriz de 7×6 entonces sus columnas forman un conjunto l.d.

   c) El polinomio $\frac{1}{3}-\sqrt{2}x+x^2$ pertenece al $\text{Gen}\{1,x^2,1+x^2,1-x\}$.

   d) El conjunto $S=\{1-t,2-t^2\}$ es una base del subespacio $W=\{at^2+bt+c : b=-2c+a\}$.

2. Considere el conjunto $W=\{A\in\mathbb{M}_{3\times 3} : A=A^T\}$:

   a) (5 pts) Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{M}_{3\times 3}$.

   b) (5 pts) Halle una base para W y determine su dimensión.

3. (12 pts) Considere los puntos $Q_1(1,0,1)$, $Q_2(-3,2,4)$ y $Q_3(-2,1,6)$:

   a) Calcule la ecuación vectorial de la recta que pasa por Q_1 y es ortogonal a la recta que pasa por Q_2 y Q_3.

   b) Encuentre la ecuación normal del plano que pasa por los puntos Q_1, Q_2 y Q_3.

   c) Halle las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por Q_2 y sea ortogonal al plano $2x+y-z=1$.

4. Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7 & 0\\ 1 & -1 & 4 & 0\\ 3 & 2 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

   a) (6 pts) Halle una base para los espacios fila y columna de A y determine el rango.

   b) (4 pts) Encuentre una base para el espacio nulo de A y determine la nulidad.

5. (10 pts) Demuestre los siguientes enunciados:

   a) Suponga que $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ es una base para un espacio vectorial V. Muestre que $T=\{w_1,w_2,w_3\}$ donde $w_1=v_1+v_2+v_3$, $w_2=v_2+v_3$ y $w_3=v_3$ también es una base para el espacio vectorial V.

   b) Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Considere el conjunto $W_1+W_2=\{u\in V : u=w_1+w_2 \text{ donde } w_1\in W_1 \text{ y } w_2\in W_2\}$. Muestre que W_1+W_2 es un subespacio de V.