

MATEMÁTICAS PARA EL DISEÑO
EXAMEN FINAL

Noviembre 19 de 2009

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: _____ CÓDIGO: _____

1.
 - a. (8 Puntos) Dados los puntos $M(2,2)$ y $N(5,-2)$. Use vectores para hallar, sobre el eje de las abscisas, un punto P de tal modo que el ángulo $\angle MPN$ sea recto.
 - b. (8 Puntos) Determine, analíticamente, las coordenadas de los extremos A y B del segmento que es dividido en tres partes iguales por los puntos $P(2,2)$ y $Q(1,5)$.
2. Considere el triángulo con vértices en los puntos $A(0,0)$, $B(4,2)$ y $C(-2,6)$.
 - a. (8 Puntos) Construya sobre sus lados tres triángulos equiláteros y muestre que los circuncentros de estos triángulos forman otro triángulo equilátero. *Use instrumentos de dibujo.*
 - b. (10 Puntos) Construya la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$ y determine su radio.
3. Dada la función $f(x) = 4x - x^2$,
 - a. (10 Puntos) determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$. Determine las coordenadas del punto de corte de estas rectas y llámelo A .
 - b. (6 Puntos) Encuentre el ángulo que forman las rectas y determine sus cortes con el eje x (llámelos B y C)
 - c. (4 Puntos) Encuentre, geoméricamente, el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$.
4. (20 Puntos) Halle lo indicado en cada caso.
 - a. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.
 - b. Halle el valor de la constante a para que $h(x) = \begin{cases} 4 \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ a - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua en todo \mathbb{R}
 - c. Calcule $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{3 \sin(x^2)}{\cos^2 x}$.
 - d. La ecuación $\ln(xy^2) - 3x^2 + 4y = 1$ define a y como una función implícita de x . Encuentre y' y úsela para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(-1,1)$.
5. (15 Puntos) A un segmento \overline{AB} con extremos en los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se le aplica una dilatación con centro en el origen y factor $k = 2$; seguidamente, a la imagen dilatada, se le aplica una reflexión respecto a la recta $\ell: y = 0$ obteniendo como imagen final el segmento $\overline{A''B''}$, donde $A''(-8,0)$ y $B''(0,8)$. Basado en esta información:
 - a. Describa la secuencia de transformaciones sobre el segmento \overline{AB} como una composición $h = f \circ g$, identificando claramente cada una de las funciones f y g .
 - b. Encuentre las matrices asociadas a cada una de las transformaciones: f , g y h . Determine la fórmula general que define la función h .
 - c. Calcule analíticamente las coordenadas de los puntos iniciales A y B . Verifique sus resultados con un dibujo.
6. (6 Puntos) Un globo esférico se expande bajo la influencia de la radiación solar. Su radio crece a razón de 2 centímetros por minuto. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen cuando el radio es de 5cm?
7. (10 Puntos) Halle las dimensiones de la base de una caja rectangular de volumen máximo que puede construirse con 200cm^2 de cartón, si la base ha de ser tres veces más larga que ancha.