



EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DE UNA VARIABLE. 14 de mayo de 2009

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

PROFESOR: _____ GRUPO: _____

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de 120 puntos. SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.

1. (24 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si el enunciado es cierto o falso. Justifique claramente su respuesta.

a) La ecuación $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ tiene exactamente una solución real.

b) Si $f'(x) > 0$ para $x \in (2, 8)$, entonces $f(3) > f(5)$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = 2$

d) Si $y(x) = \int_1^{\arctan x} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$ entonces $y'(x) = \left(\frac{\sin(\arctan x)}{\arctan x} \right)^2$

2. (18 puntos) Determine los valores de a , b y c tales que la función f sea continua en $[0, 3]$ y derivable en $(0, 3)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + c & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

3. (18 puntos) En cada uno de los siguientes casos calcule la derivada que se pide:

a) $f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{1/2}$, $f'(x) = ?$

b) $y^2(x^2 + y^2) = 2x^2$, $\frac{dy}{dx}(1, 1) = ?$

c) $y = (\ln x)^{\sin x}$, $y'(x) = ?$

4. (12 puntos) Encuentre la distancia mínima del punto $P(0, 2)$ a la curva $y = 4 - x^2$

5. (18 puntos) Considere la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, y $y = 4x - x^2$

a) Dibuje la región R

b) Escriba una expresión integral que represente el área de la región R (No evalúe la integral).

c) Escriba una expresión integral que represente el volumen del sólido que resulta al girar la región R alrededor de la recta $x = 4$ (No evalúe la integral).

6. (30 puntos) Calcule las siguientes integrales:

i) $\int_0^1 x^2 e^x dx$ ii) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{25 - x^2}} dx$ iii) $\int \frac{5x^2 - x + 2}{x^3 + x} dx$ iv) $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$