

Universidad Icesi

Cali, Lunes 12 de Mayo del 2003

**Examen Final
Econometría 06169**

Profesor: Julio César Alonso

Estudiante: _____

Código: _____

Instrucciones:

1. Lea cuidadosamente todas las preguntas e instrucciones.
2. Este examen consta de 4 páginas; además, deben tener dos páginas de fórmulas.
3. El examen consta de 4 preguntas que suman un total de 100 puntos. El valor de cada una de las preguntas está expresado al lado de cada pregunta.
4. Escriba su respuesta en las hojas suministradas, marque cada una de las hojas con su nombre.
5. El examen está diseñado para una hora, pero ustedes tienen 2 horas para trabajar en él.
6. **Recuerde que no se tolerará ningún tipo de deshonestad académica.**
7. Usted NO puede emplear calculadora, ni ningún material escrito diferente al examen.
8. Al finalizar su examen entregue sus respuestas con las preguntas.
9. Asigne su tiempo de forma eficiente!

Suerte.

1. (20 puntos en total, 5 puntos cada subparte)

Falso o Verdadero

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

a) $\text{Var}(X) = E(X^2)$

b) Siempre que el supuesto de normalidad del término aleatorio de error es violado en un modelo de regresión múltiple, los estimadores MCO son MELI.

c) Un investigador plantea el siguiente modelo para estudiar los determinantes del salario de los asalariados caleños:

$$w_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{añosDeEstudio}_i + \beta_2 \cdot D_{1i} + \beta_3 \cdot D_{2i} + \varepsilon_i, \text{ donde}$$

$$D_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{si indiv } i \text{ es hombre} \\ 0 & \text{o.w..} \end{cases} \quad D_{2i} = \begin{cases} 1 & \text{si indiv } i \text{ es mujer} \\ 0 & \text{o.w..} \end{cases}$$

El modelo anterior no tiene problemas de multicolinealidad perfecta.

d) El modelo $c_i = (X_1)^{\beta_1} (X_2)^{\beta_2} \cdot \varepsilon_i$ es linealizabile.

2. (40 puntos)

El econométrista del Departamento de Planeación Nacional (DNP) de la República caribeña de Banana Republic se ha enfermado y usted ha sido contratado como remplazo de él. El DNP de la Banana Republic desea estimar el siguiente modelo macroeconómico.

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 r_t + \beta_3 Y_t + u_t \quad (2)$$

$$r_t = \gamma_1 + \gamma_2 I_t + \gamma_3 M_t + v_t \quad (3)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (4)$$

Donde C_t , Y_t , I_t , M_t , G_t denotan el consumo de los hogares, el producto, la inversión de los privados, la cantidad de dinero y el gasto público, respectivamente. Estas variables están medidas en billones de pesos. Por otro lado, r_t corresponde a la tasa de interés medida en puntos porcentuales. ε_t , u_t y v_t corresponden a términos aleatorios de error.

Responda brevemente las siguientes preguntas:

- a) Identifique las variables endógenas y exógenas del sistema de ecuaciones. **(5 puntos)**
- b) Explique brevemente en qué consiste el problema de simultaneidad. **(5 puntos)**
- c) Determine cuáles de las ecuaciones del (1) al (4) están subidentificadas y probablemente sobre o perfectamente identificadas. **(5 puntos)**
- d) Escriba la ecuación estimada por el econométrista. (Los resultados se encuentran al final) ¿Corresponde esta ecuación a una ecuación de la forma estructural o de la forma reducida? **(5 puntos)**

e) Interprete y explique brevemente el significado y la significancia de los coeficientes estimados (5 puntos)

f) Describa brevemente como probaría usted la siguiente hipótesis: "Las emisiones de dinero no tiene efecto sobre el producto interno bruto" (5 puntos)

g) Se cree que en años recesivos el efecto del gasto público sobre el PIB es positivo, mientras que en años de expansión el gasto público no tiene ningún efecto en el producto. ¿Cómo se podría incluir esta hipótesis en nuestro estudio? Escriba una ecuación de la forma reducida que recoga esta idea y compruebe que el modelo si recoge esta hipótesis. Explique claramente como lo haría y demuestre que su método funcionaría. (10 puntos)

3. (40 puntos)

Un empresario de productos lácteos supone que la cantidad vendida y_t de sus productos (en 100,000 unidades) sigue la siguiente relación.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (*)$$

donde X_{2t} representa el logaritmo del tiempo de propaganda en televisión en el periodo t (medido en horas) y X_{3t} representa el número de avisos de propaganda en revistas en el periodo t (medido en 100 avisos). Además se sabe que:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2(X_{2t})^2 \quad E(\varepsilon_j \varepsilon_i) = 0 \quad \text{para todo } i \neq j$$

a) ¿Cuáles propiedades deben cumplirse el término de error aleatorio para obtener estimadores MELI? (5 puntos)

b) ¿Que otros supuestos deben cumplirse para obtener estimadores MELI? (5 puntos)

c) ¿Qué supuesto es violado en este caso? ¿Cómo solucionaría el problema? (5 puntos)

Para los últimos 9 periodos se obtuvieron los siguientes valores:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(X_{2t})^2} = 16 \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_{2t}} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_t}{(X_{2t})^2} = 13 \quad \sum_{i=1}^n \frac{X_{3t}}{(X_{2t})^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_{3t}}{X_{2t}} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_t}{X_{2t}} = 9 \quad \sum_{i=1}^n \frac{(X_{3t})^2}{(X_{2t})^2} = 10 \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_t \cdot X_{3t}}{(X_{2t})^2} = 4$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_t)^2}{(X_{2t})^2} = 25$$

d) Forme la matriz $X^T X$ (5 puntos)

e) Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud de los coeficientes del modelo; además estime σ^2 y la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores de los β 's. (10 Puntos)

f) Interprete el significado de cada uno de los coeficientes estimados. (5 Puntos)

g) El asesor comercial de esta firma cree que el modelo verdadero esta dado por $y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \beta_4 \cdot X_{4t} + \varepsilon_t$. ¿Qué problema existiría en las estimaciones realizadas en el punto e) si este modelo fuera en efecto el verdadero? (5 Puntos)

Estimaciones de EasyReg para la pregunta 2

```
Two-stage least squares:
Dependent variable:
Y = r
Characteristics:
r
First observation = 1(=1.1)
Last observation = 100(=25.4)
Number of usable observations: 100
Minimum value: -1.4614000E+001
Maximum value: 3.8290000E+001
Sample mean: 1.0564620E+001

X variables, including instrumental variables:
X(1) = I
X(2) = M
X(3) = G
X(4) = 1

Endogenous X variable:
Y*(1)= I

Exogenous X variables:
X*(1)=M
X*(2)=1

2SLS estimation results for Y = r
Variables          2SLS estimate  t-value  [p-value]
r                  0.735809      10.579   [0.00000]
M                 -1.400203     -7.827   [0.00000]
r                 6.678923      1.538   [0.12393]

[The p-values are two-sided and based on the normal approximation]

Standard error of the residuals = 11.036741E-001
Residual sum of squares (RSS) = 11.815536E+001
Total sum of squares (TSS) = 20.476477E+003
R-square = 0.994230
Adjusted R-square = 0.994111
Effective sample size (n) = 100
```

Econometría 06169, Examen Final

Prof: Julio César Alonso C

Fórmulas

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n X_{ki} \\ \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n X_{1i}X_{ki} \\ \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i X_{1i} \\ \sum_{i=1}^n y_i X_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i X_{ki} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$y^T y = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$s^2 = \frac{SSE}{n-k} = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n-k}$$

$$Var[\hat{\beta}] = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$SSR = \hat{\beta}^T X^T y - n\bar{Y}^2 \quad t = \frac{\hat{\beta}_i - c}{s_{\hat{\beta}_i}}$$

$$F_c = \frac{(c - R\hat{\beta})^T (R(X^T X)^{-1} R^T)^{-1} (c - R\hat{\beta}) / r}{SSE/n-k}$$

$$F_c = \frac{R^2 / (k-1)}{(1-R^2) / (n-k)} = \frac{MSR}{MSE}$$

$$F_c = \frac{(SSE_R - SSE_U) / r}{SSE_U / (n-k)} \quad R^2 = \frac{SSR}{SST}$$

$$\hat{\beta}_i \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-k} s_{\hat{\beta}_i} \quad \bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k}$$

$$\hat{y}_p = x_p^T \hat{\beta}, \quad x_p^T = (1 \quad x_{1p} \quad x_{2p} \quad \cdots \quad x_{kp})$$

$$\hat{y}_p \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-k} \sqrt{\sigma^2 x_p^T (X^T X)^{-1} x_p}$$

$$\hat{y}_p \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-k} \sqrt{\sigma^2 [1 + x_p^T (X^T X)^{-1} x_p]}$$

$$\hat{\beta}_j^E = \hat{\beta}_j \frac{S_{X_j}}{s_y}, \quad j = 2, 3, \dots, k \quad E_j = \hat{\beta}_j \frac{\bar{X}_j}{\bar{y}}$$

$$SST = y^T y - n\bar{Y}^2$$

Econometría 06169, Examen Final

Prof: Julio César Alonso C

Cantidades Importantes

Test de Heteroscedasticidad

Goldfeld y Quand: $F_{GQ} = \frac{SSE_2}{SSE_1} \sim F_{(n-d-2k, n-d-2k)}$

$\sqrt{2} = 1.414$
 $\sqrt{10} = 3.162$

$\sqrt{3} = 1.732$
 $\sqrt{13} = 3.606$

Breusch-Pagan: $\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = \gamma + \delta Z_i + \mu_i, BP = \frac{SSR}{2} \sim \chi_g^2$

White: $\hat{\varepsilon}_i^2 = \gamma + \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^k \delta_{sj} X_{mi} X_{ji} + \mu_i, W_a = nR^2 \sim \chi_g^2$

d_l y d_u para el test de DW al nivel de significancia del 5%

N	k-1=1		k-1=2		k-1=3	
	d _l	d _u	d _l	d _u	d _l	d _u
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74

Test de Autocorrelación

Durbin-Watson $DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$

Ho	Si	Decisión
$H_0 : \rho = 0$	$d_u < DW < 4 - d_u$	A
No auto +	$0 < DW < d_l$	R
No auto -	$4 - d_l < DW < 4$	R

Área de indecisión $d_l < DW < d_u$ y $4 - d_u < DW < 4 - d_l$

Universidad Icesi

Cali, Lunes 12 de Mayo del 2003

**Examen Final
Respuestas Sugeridas Versión
sin Asterisco
Econometría 06169**

Profesor: Julio César Alonso

1. (20 puntos en total, 5 puntos cada subparte)

Falso o Verdadero

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

a) $\text{Var}(X) = E(X^2)$

Falso. $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Únicamente en el caso que $E(X) = 0$ tendremos que $\text{Var}(X) = E(X^2)$.

b) Siempre que el supuesto de normalidad del término aleatorio de error es violado en un modelo de regresión múltiple, los estimadores MCO son MELI.

Verdadero. El supuesto de normalidad no afecta para nada que los estimadores MCO sean MELI. Recuerden que el supuesto de normalidad no es necesario para que se cumpla el Teorema de Gauss-Markov.

c) Un investigador plantea el siguiente modelo para estudiar los determinantes del salario de los asalariados caleños:

$$w_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{añosDeEstudio}_i + \beta_2 \cdot D_{1,i} + \beta_3 \cdot D_{2,i} + \varepsilon_i \text{ donde}$$

$$D_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{si indiv } i \text{ es hombre} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad D_{2i} = \begin{cases} 1 & \text{si indiv } i \text{ es mujer} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

El modelo anterior no tiene problemas de multicolinealidad perfecta.

Verdadero. el modelo tiene dos variables dummy y un intercepto. Así existirá problemas de multicolinealidad perfecta.

d) El modelo $e^{Y_i} = (X_1)^{\beta_1} (X_2)^{\beta_2} \cdot \varepsilon_i$ es linealizabile.

Verdadero. tomando logaritmo a ambos lados tendremos:

$$Y_i = \beta_1 \cdot \ln(X_1) + \beta_2 \cdot \ln(X_2) + \ln(\varepsilon_i) \text{ . Claramente este es un modelo lineal.}$$

2. (40 puntos)

El econometrista del Departamento de Planeación Nacional (DNP) de la Republica caribeña de Banana Republic se ha enfermado y usted ha sido contratado como remplazo de él. El DNP de la Banana Republic desea estimar el siguiente modelo macroeconómico.

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 r_t + \beta_3 Y_t + u_t \quad (2)$$

$$r_t = \gamma_1 + \gamma_2 I_t + \gamma_3 M_t + v_t \quad (3)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (4)$$

Donde C_t , Y_t , I_t , M_t , G_t denotan el consumo de los hogares, el producto, la inversión de los privados, la cantidad de dinero y el gasto público, respectivamente. Estas variables están medidas en billones de pesos. Por otro lado, r_t corresponde a la tasa de interés medida en puntos porcentuales. ε_t , u_t y v_t corresponden a términos aleatorios de error. Responda brevemente las siguientes preguntas:

a) Identifique las variables endógenas y exógenas del sistema de ecuaciones. (5 puntos)

Variables Endógenas:

Variables Exógenas:

$$C_t \quad Y_t \quad r_t \quad I_t$$

$$M_t \quad G_t$$

b) Explique brevemente en que consiste el problema de simultaneidad. (5 puntos)

El problema de simultaneidad consiste en que una de las variables explicativas de la forma estructural está correlacionada con el término aleatorio de error de esa ecuación. Esto provoca un problema de sesgo.

c) Determine cuales de las ecuaciones del (1) al (4) están subidentificadas y probablemente sobre o perfectamente identificadas. (5 puntos)

Para cada una de las primeras tres ecuaciones tenemos:

$$g_1 := 2 \quad g_1 - 1 = 1 \quad k_1 = 2 \quad \text{Entonces esta ecuación estará prob. Sobre Identificada}$$

$$g_2 := 3 \quad g_2 - 1 = 2 \quad k_2 = 2 \quad \text{Entonces esta ecuación estará prob. Sobre Identificada}$$

$$g_3 := 2 \quad g_3 - 1 = 1 \quad k_3 = 1 \quad \text{Entonces esta ecuación estará prob. Perfect. Identificada}$$

Noten que la ecuación (4) es una identidad y por tanto no es relevante el problema de identificación para esta identidad.

d) Escriba la ecuación estimada por el econometrista. (Los resultados se encuentran al final) ¿Corresponde esta ecuación a una ecuación de la forma estructural o de la forma reducida? (5 puntos)

$$\text{El modelo que fue estimado es } r_t = \gamma_1 + \gamma_2 I_t + \gamma_3 M_t + v_t$$

$$\text{En especial la ecuación estimada es } \hat{r}_t = 6.6789 + 0.7358 \cdot I_t - 1.40 \cdot M_t$$

Esta ecuación estimada corresponde a la forma estructural

e) Interprete y explique brevemente el significado y la significancia de los coeficientes estimados (5 puntos)

Noten que esta ecuación corresponde a una función inversa de oferta de recursos prestables.

Por tanto

$\hat{\gamma}_{t1} = 6.6789$ Es la tasa de interés mínima que se necesita para ofrecer fondos prestables. Este coeficiente no es significativo

$\hat{\gamma}_{t2} = 0.7358$ Un aumento de un billón de pesos en fondos prestables implicará un aumento de 0.7358 puntos porcentuales en la tasa de interés. Este coeficiente es significativo al 1%.

$\hat{\gamma}_{32} = -1.4$ Un aumento de un billón de pesos en la cantidad de dinero implicará una disminución de 1.4 puntos porcentuales en la tasa de interés. Este coeficiente es significativo al 1%.

f) Describa brevemente como probaría usted la siguiente hipótesis: "Las emisiones de dinero no tiene efecto sobre el producto interno bruto" (5 puntos)

Para investigar si las emisiones de dinero no tiene efecto sobre el producto interno bruto, debemos considerar la forma reducida para el producto interno bruto. Es decir,

$$Y_t = \pi_{11} + \pi_{12} \cdot G_t + \pi_{13} \cdot M_t + \mu_{1t}$$

Ahora, esta hipótesis puede ser probada por medio de la siguiente hipótesis nula: H_0 :

$\pi_{13} = 0$ versus la hipótesis alterna H_A : $\pi_{13} \neq 0$. Esto se puede hacer fácilmente por medio de una prueba t.

g) Se cree que en años recesivos el efecto del gasto público sobre el PIB es positivo, mientras que en años de expansión el gasto público no tiene ningún efecto en el producto. ¿Cómo se podría incluir esta hipótesis en nuestro estudio? Escriba una ecuación de la forma reducida que recoga esta idea y compruebe que el modelo si recoge esta hipótesis. Explique claramente como lo haría y demuestre que su método funcionaría. (10 puntos)
Sea

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ año recesivo} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

Ahora consideremos de nuevo la forma reducida para el PIB, pero incluiremos el cambio en la relación del gasto publico y el PIB. Es decir:

$$Y_t = \pi_{11} + \pi_{12} \cdot D_t \cdot G_t + \pi_{13} \cdot M_t + \mu_{1t}$$

Noten que en caso de un año recesivo, $D_t = 1$, y por tanto

$$E(Y_t) = \pi_{11} + \pi_{12} \cdot G_t + \pi_{13} \cdot M_t$$

Y en caso de que el año sea de expansión tendremos, $D_t = 0$ y por tanto

$$E(Y_t) = \pi_{11} + \pi_{13} \cdot M_t$$

Por tanto podríamos probar esta hipótesis por medio de una hipótesis nula H_0 : $\pi_{12} \leq 0$ versus la hipótesis alterna H_A : $\pi_{12} > 0$.

3. (40 puntos)

Un empresario de productos lacteos supone que la cantidad vendida y_t de sus productos (en 100,000 unidades) sigue la siguiente relación.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots \quad (*)$$

donde X_{2t} representa el logaritmo del tiempo de propaganda en televisión en el periodo t (medido en horas) y X_{3t} representa el número de avisos de propaganda en revistas en el periodo t (medido en 100 avisos). Además se sabe que:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 (X_{2t})^2 \quad E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \text{ para todo } i \neq j$$

a) ¿Cuáles propiedades deben cumplir el término de error aleatorio para obtener estimadores MELI? (5 puntos)

De acuerdo al teorema de Gauss-Markov para obtener estimadores MELI para los parámetros β , el término de error debe cumplir las siguientes condiciones:

- Media cero, es decir $E(\varepsilon_t) = 0$
- Varianza constante (Homocedasticidad) ($\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$), y
- Linealmente independientes entre si (No - Autocorrelación) ($E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ para todo $i \neq j$)

b) ¿Que otros supuestos deben cumplirse para obtener estimadores MELI? (5 puntos)

De acuerdo al teorema de Gauss-Markov para obtener estimadores MELI para los parámetros β , además se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Exista una relación lineal entre y y las X 's
2. Las X 's son no estocásticas y linealmente independientes entre si.

c) ¿Qué supuesto es violado en este caso? ¿Cómo solucionar el problema? (5 puntos)

En este caso se viola el supuesto de homocedasticidad. Es decir el término de error no tiene varianza constante. El problema se puede solucionar fácilmente empleando los mínimos cuadrados ponderados. Es decir, dividiendo todo el modelo por X_{2t} .

$$\frac{y_t}{X_{2t}} = \beta_1 \frac{1}{X_{2t}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{X_{2t}} + \beta_3 \frac{X_{3t}}{X_{2t}} + \frac{\varepsilon_t}{X_{2t}} \quad t = 1, 2, \dots$$

Así tendremos que

$$\text{Var}\left(\frac{\varepsilon_t}{X_{2t}}\right) = \frac{1}{(X_{2t})^2} \cdot \text{Var}(\varepsilon_t) = \frac{1}{(X_{2t})^2} \cdot [\sigma^2 (X_{2t})^2] = \sigma^2$$

Y por tanto el problema de heterocedasticidad ha sido solucionado

Para los últimos 9 periodos se obtuvieron los siguientes valores:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(X_{2t})^2} = 16 \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_{2t}} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_t}{(X_{2t})^2} = 13 \quad \sum_{i=1}^n \frac{X_{3t}}{(X_{2t})^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_{3t}}{X_{2t}} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_t}{X_{2t}} = 9 \quad \sum_{i=1}^n \frac{(X_{3t})^2}{(X_{2t})^2} = 10 \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_t \cdot X_{3t}}{(X_{2t})^2} = 4$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_t)^2}{(X_{2t})^2} = 25$$

d) Forme la matriz $X^T X$ (5 puntos)

Es fácil obtener

$$X^T X = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

- e) Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud de los coeficientes del modelo; además estime σ^2 y la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores de los β 's. **(10 Puntos)**

La correspondiente matriz inversa es

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Primero debemos armar la matriz $X^T y$. En este caso tenemos que:

$$X^T y = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Así tenemos que:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T y$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{16} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Noten que

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{16} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Además

$$s^2 = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T \cdot X^T \cdot y}{n}$$

En este caso $y^T y = 25$, entonces

Nota: recuerden que en el caso de los estimadores de MV el denominador es n y no $n - k$

$$s^2 = \frac{25 - \left(1 \cdot \frac{13}{16} + \frac{2}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}}{9} = \frac{25 - \frac{1693}{80}}{9} = \frac{307}{720} = .426$$

Y la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores MCO es

$$s^2 \cdot (X^T X)^{-1} = \frac{307}{720} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

- f) Interprete el significado de cada uno de los coeficientes estimados. **(5 Puntos)**

Antes encontramos que

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{16} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

La interpretación de estos resultados es la siguiente:

$\hat{\beta}_2 = 1$, un aumento del 1% en el tiempo de propagandas de televisión aumentará las ventas en 100.000 unidades

$\hat{\beta}_3 = \frac{2}{5} = 0.4$, un aumento de 100 avisos de prensa aumentará las ventas en 40,000 unidades

$\hat{\beta}_1 = \frac{13}{16} = 0.813$, carece de interpretación económica.

- g) El asesor comercial de esta firma cree que el modelo verdadero está dado por $y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2,t} + \beta_3 \cdot X_{3,t} + \beta_4 \cdot X_{4,t} + \varepsilon_t$. ¿Qué problema existiría en las estimaciones realizadas en el punto e) si este modelo fuera en efecto el verdadero? **(5 Puntos)**

En este caso estaríamos omitiendo variables. En caso que $X_{4,t}$ presentará correlación con $X_{2,t}$ y/o $X_{3,t}$, entonces los EMCO serán sesgados e ineficientes. En caso contrario los EMCO aún son insesgados y eficientes.

Estimaciones de EasyReg para la pregunta 2

Two-stage least squares:
Dependent variable:
Y = r
Characteristics:
r
First observation = 1(=1.1)
Last observation = 100(=25.4)
Number of usable observations: 100
Minimum value: -1.4614000E+001
Maximum value: 3.8290000E+001
Sample mean: 1.0564620E+001

X variables, including instrumental variables:
X(1) = I
X(2) = M
X(3) = G
X(4) = 1

Endogenous X variable:
Y*(1) = I

Exogenous X variables:
X*(1) = M
X*(2) = 1

2SLS estimation results for Y = r

Variables	2SLS estimate	t-value	[p-value]
I	0.735809	10.579	[0.00000]
M	-1.400203	-7.827	[0.00000]
1	6.678923	1.538	[0.12393]

[The p-values are two-sided and based on the normal approximation]

Standard error of the residuals = 11.036741E-001
Residual sum of squares (RSS) = 11.815536E+001
Total sum of squares (TSS) = 20.476477E+003
R-square = 0.994230
Adjusted R-square = 0.994111
Effective sample size (n) = 100