Taller #6

Regresión Múltiple
Econometría 06216

Profesor: Julio César Alonso
Monitora: Stephanie Vergara
Mauricio A. Arcos

Notas:

- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 28 de febrero.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador y entregado en papel.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

En este taller continuaremos con las preguntas planteadas en el Taller #5, en especial las preguntas uno y dos.

1. Primero concentrémonos en la aproximación que emplea la función de producción Cobb-Douglas (pregunta 2)
   a) De acuerdo a los resultados de la pregunta 2 b), la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala. Incorpore este hecho en la estimación de sus coeficientes. En otras palabras, emplee los Minimos Cuadrados restringidos para encontrar los coeficientes del modelo dada la restricción. Sea lo más claro posible en mostrar cómo alcanza sus resultados y reporte los resultados en una tabla.
   b) Interprete los coeficientes estimados en la pregunta anterior.

2. Ahora, retornemos al modelo lineal para la función de la producción (primera pregunta del Taller #5). Para determinar el efecto que produce los cambios de unidades en las variables (cambios de escala) sobre los estimadores MCO, estudiaremos los siguientes casos:

$$P_t = \alpha_0 + \alpha_1 L_t + \alpha_2 K_t + \varepsilon_t \quad (1)$$
$$P_t = \beta_0 + \beta_1 ML_t + \beta_2 MK_t + \varepsilon_t \quad (2)$$
$$P_t = \gamma_0 + \gamma_1 ML_t + \gamma_2 K_t + \varepsilon_t \quad (3)$$
$$MP_t = \delta_0 + \delta_1 L_t + \delta_2 K_t + \varepsilon_t \quad (4)$$
$$MP_t = \theta_0 + \theta_1 ML_t + \theta_2 MK_t + \varepsilon_t \quad (5)$$
$$MP_t = \phi_0 \left(M \cdot 1\right) + \phi_1 ML_t + \phi_2 MK_t + \varepsilon_t \quad (6)$$

   Donde una M que precede a la variable original representa que dicha variable ha sido multiplicada por 10.
   a) Estime los coeficientes de los 6 modelos anteriores y repórtelos en una tabla.
   b) Elabore una conclusión en torno al efecto que tiene el cambio de escala en las variables sobre los estimadores MCO (incluyendo el intercepto.

3. Ahora analicemos el efecto que produce los cambios de origen en las variables (cuando se le resta o suma la misma cantidad a todas las observaciones de una variable) sobre los estimadores MCO, Para eso tenga en cuenta los siguientes casos:

$$P_t = \alpha_0 + \alpha_1 L_t + \alpha_2 K_t + \varepsilon_t \quad (7)$$
$$P_t = \beta_0 + \beta_1 RL_t + \beta_2 RK_t + \varepsilon_t \quad (8)$$

$$P_t = \gamma_0 + \gamma_1 RL_t + \gamma_2 K_t + \varepsilon_t \quad (9)$$
$$RP_t = \delta_0 + \delta_1 L_t + \delta_2 K_t + \varepsilon_t \quad (10)$$
$$RP_t = \theta_0 + \theta_1 RL_t + \theta_2 RK_t + \varepsilon_t \quad (11)$$
$$RP_t = \phi_0 \left(R \cdot 1\right) + \phi_1 RL_t + \phi_2 RK_t + \varepsilon_t \quad (12)$$

   Donde una R que precede a la variable original representa que a dicha variable se la sustraen 500 unidades.
   a) Estime los coeficientes de los 6 modelos anteriores (del (7) al (12)) y repórtelos en una tabla.
   b) Elabore una conclusión en torno al efecto que tiene el cambio de origen en las variables sobre los estimadores MCO (incluyendo el intercepto).

4. Regresemos al modelo lineal, es decir al modelo (1). Ahora responda:
   a) ¿Cuál es la elasticidad de la producción con respecto al capital? Explique su respuesta.
   b) ¿Cuál de las dos variables, K o L, tienen una mayor influencia sobre la producción? Explique su respuesta.

5. Ahora, suponga que deseamos determinar la producción promedio para 1997 cuando se esperaba que el capital fuera de 21 millones de dólares (el capital así como la producción originalmente estaba medida en dólares) y 2121 unidades de trabajo (el trabajo estaba medido en unidades de trabajo)
   a) Encuentre el valor esperado para la producción. Comente su resultado.
   b) Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la producción esperada. Comente su resultado.

Taller #6

Respuestas Sugeridas
Regresión Múltiple
Econometría 06216

Profesor: Julio César Alonso
Monitora: Stephanie Vergara
Mauricio A. Arcos

Notas:

- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 28 de febrero.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador y entregado en papel.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

En este taller continuaremos con las preguntas planteadas en el Taller #5, en especial las preguntas uno y dos.

1. Primero concentrémonos en la aproximación que emplea la función de producción Cobb-Douglas (pregunta 2)
   a) De acuerdo a los resultados de la pregunta 2 b), la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala. Incorpore este hecho en la estimación de sus coeficientes. En otras palabras, emplee los Mínimos Cuadrados restringidos para encontrar los coeficientes del modelo dada la restricción. Sea lo más claro posible en mostrar cómo alcanza sus resultados y reporte los resultados en una tabla.

La respuesta podría ser alcanzada de dos formas. Empleando un método similar al empleado en la pregunta 3 del taller #5 de este semestre o empleando los Mínimos Cuadrado Restringidos (MCR). En el primer caso, dado el modelo

$$\ln(P_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(L_t) + \beta_2 \ln(K_t) + \varepsilon_t \qquad (*)$$

Y la restricción $\beta_1 + \beta_2 = 1$ (**), tenemos que uno de los posibles modelos a estimar que recoja esta restricción sería:

$$\left[\ln(P_t) - \ln(L_t)\right] = \beta_0 + \beta_2\left[\ln(K_t) - \ln(L_t)\right] + \varepsilon_t \qquad (***)$$

Donde $\beta_1 = 1 - \beta_2$.

Empleando el método de MCR tenemos que:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \text{ y } \left(\hat{\beta}_{MCO}\right)^T = \begin{bmatrix} 4{,}3929 & 0{,}6178 & 0{,}4123 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + \left(X^T X\right)^{-1} R^T \left[R\left(X^T X\right)^{-1} R^T\right]^{-1} \left(C - R\hat{\beta}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4{,}3929 \\ 0{,}6178 \\ 0{,}4123 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 90.431 & 190.97 \\ 90.431 & 681.65 & 1440.1 \\ 190.97 & 1440.1 & 3044.7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\left(X^T X\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4{,}3929 \\ 0{,}6178 \\ 0{,}4123 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4{,}3929 \\ 0{,}6178 \\ 0{,}4123 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1749 \\ -0.0363 \\ 0.0062 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5678 \\ 0.5815 \\ 0.4185 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de varianzas y covarianzas es:

$$Var\left[\hat{\beta}^*\right] = \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1} - \sigma^2 \left(X^T X\right)^{-1} R^T \left[R\left(X^T X\right)^{-1} R^T\right]^{-1} R\left(X^T X\right)^{-1}$$

$$Var\left[\hat{\beta}^*\right] = 0.0013\left(X^T X\right)^{-1} - 0.0013\left(X^T X\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\left(X^T X\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\left(X^T X\right)^{-1}$$

$$Var\left[\hat{\beta}^*\right] = \begin{bmatrix} 0.023585 & 0.0028024 & -0.0028024 \\ & 0.00033448 & -0.00033448 \\ & & 0.00033448 \end{bmatrix}$$

Así mismo, tenemos que SST=1.5097, SSR=1.4506 y por tanto el R^2 del modelo es 0.9608.

Tabla 1. Estimaciones de la Función de Producción Cobb-Douglas

	VARIABLE DEPENDIENTE: ***$LN(P_t)$*** Estadísticos t entre paréntesis	
	MCO	MCR
constante	4,3929 (2,56) **	4,5678 (29,74) ***
$ln(L_t)$	0,6178 (1,74)	0,5815 (31,80) ***
$ln(K_t)$	0,4123 (6,53) ***	0,4185 (22,88) ***
R^2	0,99240	0,96083
F	(588,73) ***	NA
# de Obs.	12	12

(*) nivel de significancia: 10%
(**) nivel de significancia: 5%
(***) nivel de significancia: 1%

b) Interprete los coeficientes estimados en la pregunta anterior.

El intercepto carece de interpretación económica, además tenemos que la elasticidad estimada del producto con respecto al trabajo es de 0.5815, mientras que la elasticidad estimada del trabajo con respecto al capital es de 0.4185.

2. Ahora, retornemos al modelo lineal para la función de la producción (primera pregunta del Taller #5). Para determinar el efecto que produce los cambios de unidades en las variables (cambios de escala) sobre los estimadores MCO, estudiaremos los siguientes casos:

$$P_t = \alpha_0 + \alpha_1 L_t + \alpha_2 K_t + \varepsilon_t \quad (1)$$
$$P_t = \beta_0 + \beta_1 ML_t + \beta_2 MK_t + \varepsilon_t \quad (2)$$
$$P_t = \gamma_0 + \gamma_1 ML_t + \gamma_2 K_t + \varepsilon_t \quad (3)$$
$$MP_t = \delta_0 + \delta_1 L_t + \delta_2 K_t + \varepsilon_t \quad (4)$$
$$MP_t = \theta_0 + \theta_1 ML_t + \theta_2 MK_t + \varepsilon_t \quad (5)$$
$$MP_t = \phi_0 \left(M \cdot 1\right) + \phi_1 ML_t + \phi_2 MK_t + \varepsilon_t \quad (6)$$

Donde una M que precede a la variable original representa que dicha variable ha sido multiplicada por 10.

a) Estime los coeficientes de los 6 modelos anteriores y repórtelos en una tabla.

Los resultados se reportan en la Tabla 2 y la Tabla 3.

Tabla 2. Estimaciones de los modelos 1 a 3.

	VARIABLE DEPENDIENTE: P_t Estadísticos t entre paréntesis		
	Ecuación 1 Niveles MCO	Ecuación 2 Niveles MCO	Ecuación 3 Niveles MCO
constante	-1832783,11 (-2,53) **	-1832783,11 (-2,53) **	-1832783,11 (-2,53) **
L_t	2999,48206 *** (6,42) ***		
K_t	0,25526 (14,44) ***		0,25526 (14,44) ***
ML_t		299,94821 (6,42) ***	299,94821 (6,42) ***
MK_t		0,02553 (14,44) ***	
R^2 F # de Obs.	0,99630 (1.218,62) *** 12	0,9963 (1.218,62) *** 12	0,9963 (1.218,62) *** 12

(*) nivel de significancia: 10%
(**) nivel de significancia: 5%
(***) nivel de significancia: 1%
MCO: Mínimos Cuadrados Ordinarios

Tabla 3. Estimaciones de los modelos 4 a 6.

	VARIABLE DEPENDIENTE: MP_t Estadísticos t entre paréntesis		
	Ecuación 4	Ecuación 5	Ecuación 6
	Niveles MCO	Niveles MCO	Niveles MCO
constante	-18327831,1 (6,42) ***		
Mconstante $_t$		-183278311 -2,525 **	-18327831,1 (-2,53) **
L_t	29994,82063 *** (6,42) ***		
K_t	2,55262 ** (14,44) ***		
ML_t		2999,48206 (6,42) ***	2999,48206 (6,42) ***
MK_t		0,25526 (14,44) ***	0,25526 (14,44) ***
R^2	0,9963	0,9963	0,9963
F	(1.218,62) ***	(1.218,62) ***	(1.218,62) ***
# de Obs.	12	12	12

(*) nivel de significancia: 10%
(**) nivel de significancia: 5%
(***) nivel de significancia: 1%
MCO: Mínimos Cuadrados Ordinarios

b) Elabore una conclusión en torno al efecto que tiene el cambio de escala en las variables sobre los estimadores MCO (incluyendo el intercepto.

En términos generales , una vez elaborado el literal anterior se puede deducir que:

- Si se cambian las escalas de las variables independientes, los valores de sus coeficientes corresponderán a los originales multiplicados por el inverso multiplicativo del cambio en la escala.
- Si se cambia solo la escala de la variable dependiente, los coeficientes estimados se incrementan por el factor de la escala.
- Si se cambian las escalas de todas las variables, incluido el intercepto, los coeficientes estimados no varían.

3. Ahora analicemos el efecto que produce los cambios de origen en las variables (cuando se le resta o suma la misma cantidad a todas las observaciones de una variable) sobre los estimadores MCO, Para eso tenga en cuenta los siguientes casos:

$$P_t = \alpha_0 + \alpha_1 L_t + \alpha_2 K_t + \varepsilon_t \quad (7)$$
$$P_t = \beta_0 + \beta_1 RL_t + \beta_2 RK_t + \varepsilon_t \quad (8)$$
$$P_t = \gamma_0 + \gamma_1 RL_t + \gamma_2 K_t + \varepsilon_t \quad (9)$$
$$RP_t = \delta_0 + \delta_1 L_t + \delta_2 K_t + \varepsilon_t \quad (10)$$
$$RP_t = \theta_0 + \theta_1 RL_t + \theta_2 RK_t + \varepsilon_t \quad (11)$$
$$RP_t = \phi_0 \left(R \cdot 1\right) + \phi_1 RL_t + \phi_2 RK_t + \varepsilon_t \quad (12)$$

Donde una R que precede a la variable original representa que a dicha variable se la sustraen 500 unidades.

a) Estime los coeficientes de los 6 modelos anteriores (del (7) al (12)) y repórtelos en una tabla.

Los resultados se reportan en la Tabla 4 y 5.

Tabla 4. Estimaciones de los modelos 8 y 9

	VARIABLE DEPENDIENTE: P_t Estadísticos t entre paréntesis	
	Ecuación 8	Ecuación 9
	Niveles MCO	Niveles MCO
constante	-332914.451 (-0.67)	-333,042.0816 (6.42) ***
K_t		0.2553 (14.44) ***
RL_t	2999.48 (6.42) ***	2999.48 (6.42) ***
RK_t	0.26 (14.44) ***	
R^2	0.99630	0.99630
F	(1,218.62) ***	(1,218.62) ***
# de Obs.	12	12

(*) nivel de significancia: 10%
(**) nivel de significancia: 5%
(***) nivel de significancia: 1%
MCO: Mínimos Cuadrados Ordinarios

Tabla 5. Estimaciones de los modelos 10 a 12

	VARIABLE DEPENDIENTE: RP_t Estadísticos t entre paréntesis		
	Ecuación 10 Niveles MCO	Ecuación 11 Niveles MCO	Ecuación 12 Niveles MCO
constante	-1833283.11 (6.42) ***	-333414.451 (-0.67)	
Rconstante $_t$			666.8289 (0.67)
L_t	2999.48206 (6.42) ***		
K_t	0.25526 (14.44) ***		
RL_t		2999.48206 (6.42) ***	2999.48206 (6.42) ***
RK_t		0.25526 (14.44) ***	0.25526 (14.44) ***
R^2	0.9963	0.9963	0.9963
F	(1,218.62) ***	(1,218.62) ***	(1,218.62) ***
# de Obs.	12	12	

(*) nivel de significancia: 10%
(**) nivel de significancia: 5%
(***) nivel de significancia: 1%
MCO: Mínimos Cuadrados Ordinarios

b) Elabore una conclusión en torno al efecto que tiene el cambio de origen en las variables sobre los estimadores MCO (incluyendo el intercepto).

Una vez elaborado el literal anterior se puede deducir que el único estimador que varia, como consecuencia de un cambio en el origen, es el intercepto. Adicionalmente, se debe apreciar que

- si se modifican solo las variables explicativas, el nuevo intercepto corresponderá al antiguo intercepto menos el producto entre el cambio en el origen y la suma de los nuevos coeficientes asociados a alas variables explicatorios

-1832783+500*(2999,82+0,255262)=-332914,4

- Si se modifica solamente una variable independiente, el intercepto corresponderá al antiguo intercepto menos el producto entre el origen y el coeficiente asociado a la variable modificada

-1832783+500*2999,82=-333042,1

- Si se modifica sólo la variable dependiente, el intercepto corresponderá al antiguo intercepto mas el cambio en el origen.

-1832783-500=-1832283

- Si se modifican tanto las variables independientes como la dependiente, el intercepto sigue la siguiente forma

-1832783-500+500*(2999,82+0,255262)=-333414,4

- Si se modifícale origen de todas las variables y adicionalmente se modifica el intercepto, el nuevo intercepto corresponderá a

[-1832783-500+500*(2999,82+0,255262)]/-500=-668,1652

4. Regresemos al modelo lineal, es decir al modelo (1). Ahora responda:
   a) ¿Cuál es la elasticidad de la producción con respecto al capital? Explique su respuesta.

Dado que la elasticidad media está dada por $E_j = \hat{\beta}_j \frac{\overline{X}_j}{\overline{y}}$, entonces en este caso:

$$E_j = \hat{\beta}_j \frac{\overline{X}_j}{\overline{y}} = 0.25526 \frac{10022763{,}5}{6387141{,}25} = 0.4006$$

entonces podemos decir que cerca a la media de la variable un cambio del 1% en el capital provocará un aumento del 0.40% en el producto.

   b) ¿Cuál de las dos variables, K o L, tienen una mayor influencia sobre la producción? Explique su respuesta.

Para comparar el impacto de las dos variables, será necesario calcular los respectivos coeficientes estandarizados. Es decir, $\hat{\beta}_j^E = \hat{\beta}_j \frac{s_{X_j}}{s_y}$. En este caso tenemos que:

$$\hat{\beta}_L^E = \hat{\beta}_L \frac{s_L}{s_y} = 0.3132$$

$$\hat{\beta}_K^E = \hat{\beta}_L \frac{s_K}{s_y} = 0.7046$$

Dado que el coeficiente estandarizado asociado al capital es mayor que el asociado al trabajo, tenemos que el capital es el factor que más influencia tiene sobre la producción.

5. Ahora, suponga que deseamos determinar la producción promedio para 1997 cuando se esperaba que el capital fuera de 21 millones de dólares (el capital así como la producción originalmente estaba medida en dólares) y 2121 unidades de trabajo (el trabajo estaba medido en unidades de trabajo)
   a) Encuentre el valor esperado para la producción. Comente su resultado.

Recordando que $\hat{y}_p = x_p^T \hat{\beta}$ entonces se tiene que

$$\hat{y}_{1997} = \begin{bmatrix} 1 & 2121 & 21000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{-1832783.1134} \\ 2999.4821 \\ 0.2553 \end{bmatrix} = 9.8896\text{e+006}=9889600$$

La producción promedio para 1997 cuando se esperaba que el capital sea de 21 millones de dólares y 2121 unidades de trabajo es de 9,889,600 (Noten que las unidades del producto no estaban definidas!)

b) Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la producción esperada. Comente su resultado.

Conociendo la expresión $\hat{y}_p \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-k} \sqrt{s^2 \left[x_p^T \left(X^T X \right)^{-1} x_p \right]}$, entonces se tiene que

$$9889600 \pm 2.262157158\sqrt{1.1317\text{e+005}}$$
$$= \left(9.6336\text{e+006}, 1.0146\text{e+007}\right) = \left(9633600, 10146000\right)$$

Un intervalo de confianza del 95% para la producción esperada de 1997 cuando se esperaba que el capital sea de 21 millones de dólares y 2121 unidades de trabajo sera de 9,633,600 a 10,146,000 (Noten que las unidades del producto no estaban definidas!).