Taller #1

Econometría 06216
Repaso

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitor: Manuel Serna Cortés

Notas:
- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado físicamente el próximo 4 de agosto en los primeros 10 minutos de la clase. (no se recibirán talleres después de esa hora y fecha límite)

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. Resuelva los siguientes puntos con la información dada en cada literal. (escriba **todo** su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado)

   a) Muestre que $Var[aX+bY]=a^2Var[X]+b^2Var[Y]+2abCov[X,Y]$

   b) Muestre que $Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]$

   c) Suponga que X, Y y Z son variables aleatorias. Encuentre $E[XZ], E[XY], \sigma_Y, Cov(X,Z)$ y $Var(2X+3Y-4)$ a partir de los siguientes datos (muestre el procedimiento que utiliza para llegar a la respuesta y reporte resultados de forma fraccionaria)

   $\sigma_x^2=56$

   $\rho_{XZ}=19/50$

   $\rho_{XY}=0$

   $E(X)^2=26$

   $Y=[23 \quad 45 \quad 83 \quad 12 \quad 95 \quad 56 \quad 17 \quad 72 \quad 63 \quad 33]$

   $Z=[1 \quad 29 \quad 5 \quad 17 \quad 21 \quad 7 \quad 26 \quad 13 \quad 12 \quad 9]$

2. Diga si las igualdades presentadas a continuación son verdaderas o falsas. Justifique en todos los casos. (Escriba **todo** su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado)

   a) Para resolver éste punto, tenga en cuenta que a,b,c y d son una variables no estocásticas, X es una variable estocástica y Z es el doble de la anterior variable estocástica
   $Cov(aX+b,cZ+d)=abVar(X)$

   b) Se cumple que:.
   $$Var[X^2]=\sum_{i=1}^{n}(X^2-E(X^2))^2$$
   si X es una variable que no sigue ninguna distribución de probabilidad.

3. Los miembros de la misión internacional de cierta universidad a la República Popular China fueron sorprendidos por una tormenta eléctrica y quedaron atrapados en el aeropuerto de Shangai, entonces en medio del aburrimiento general uno de los integrantes se inventó un juego en donde

además de lanzar dos dados, uno negro y otro blanco, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que continúe la tormenta eléctrica (según la institución meteorológica local existe una probabilidad de 1/5 de que continúe). Entonces se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar, mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado negro es	Remuneración (miles de pesos)
1	4
2	2
3	11
4	7
5	14
6	21

Si Cara Superior del dado blanco	Remuneración (miles de pesos)
1	3
2	2
3	-8
4	-35
5	-10
6	-17

Si	Remuneración (miles de pesos)
Continúa la tormenta	12
No continúa la tormenta	8

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado negro, blanco y el estado del clima respectivamente.

A partir de la Información anterior responda las siguientes preguntas:

a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z.

b. Sea $W=X+Y+Z$, calcule el valor esperado de W.

c. Calcule la Varianza de X

d. Sea $F=X+Y$, calcule $Cov[W,F]$

e. ¿Son F^2 y F (estadísticamente) independientes?

Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}16 & 2 & 3 & 13\\ 5 & 11 & 10 & 8\\ 9 & 7 & 6 & 12\\ 4 & 14 & 15 & 1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}15\\ 2\\ 23\\ 44\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7 & 2\\ 5 & 10 & 3 & 7\\ 7 & 1 & 4 & 3\\ 2 & 9 & 3 & 3\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}4 & 10 & 18 & 6\\ 8 & 2 & 6 & 16\\ 12 & 8 & 24 & 18\\ 6 & 14 & 18 & 18\end{bmatrix}$$

4. Encuentre (muestre todo el procedimiento)
$AB,\ A^T B^T,\ (C^T C)B^T,\ (B^T B + A)$

5. Continuando con el ejercicio anterior encuentre
$B^{-1},\ D^{-1},\ 2D + A^T,\ AB + (C^T C)D, ran(BD)$

6. Continuando con el ejercicio 4
$D^{-1}B,\ A^{-1}D,\ \det(A^{-1}),\ ran(A),\quad (B^T D^T)^{-1}$

Taller #1

Econometría 06216

Respuestas sugeridas

Repaso

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitor: Manuel Serna Cortés

Notas:
- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado físicamente el próximo 4 de agosto en los primeros 10 minutos de la clase. (no se recibirán talleres después de esa hora y fecha límite)

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. Resuelva los siguientes puntos con la información dada en cada literal. (escriba **todo** su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado)

a) Muestre que $Var[aX+bY]=a^2Var[X]+b^2Var[Y]+2abCov[X,Y]$

Respuesta sugerida:

$$Var[aX+bY]=E\left[\left((aX+bY)-E(aX+bY)\right)^2\right]$$
$$=E\left[\left((aX+bY)-aE(X)-bE(Y)\right)^2\right]$$
$$=E\left[\left(aX+bY-a\mu_X-b\mu_Y\right)^2\right]$$
$$=E\left[\left(aX-a\mu_X+bY-b\mu_Y\right)^2\right]$$
$$=E\left[\left(a(X-\mu_X)+b(Y-\mu_Y)\right)^2\right]$$
$$=E\left[a^2(X-\mu_X)^2+b^2(Y-\mu_Y)^2+2ab(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$
$$=E\left[a^2(X-\mu_X)^2\right]+E\left[b^2(Y-\mu_Y)^2\right]+E\left[2ab(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$
$$=a^2E\left[(X-\mu_X)^2\right]+b^2E\left[(Y-\mu_Y)^2\right]+2abE\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$
$$=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)$$

b) Muestre que $Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]$

Respuesta sugerida:

$$Cov[X,Y]=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$=E[XY-X\mu_Y-\mu_XY+\mu_X\mu_Y]$$
$$=E[XY]-E[X\mu_Y]-E[\mu_XY]+E[\mu_X\mu_Y]$$
$$=E[XY]-\mu_YE[X]-\mu_XE[Y]+\mu_X\mu_Y$$
$$=E[XY]-\mu_Y\mu_X-\mu_X\mu_Y+\mu_X\mu_Y$$
$$=E[XY]-2\mu_X\mu_Y+\mu_X\mu_Y$$
$$=E[XY]-\mu_X\mu_Y$$
$$=E[XY]-E[X]E[Y]$$

c) Suponga que X, Y y Z son variables aleatorias. Encuentre $E[XZ], E[XY], \sigma_Y, Cov(X,Z)\ y\ Var(2X+3Y-4)$ a partir de los siguientes datos (muestre el procedimiento que utiliza para llegar a la respuesta y reporte resultados de forma fraccionaria)

$$\sigma_x^2=56$$
$$\rho_{XZ}=19/50$$
$$\rho_{XY}=0$$
$$E(X)^2=26$$

$$Y=[23 \quad 45 \quad 83 \quad 12 \quad 95 \quad 56 \quad 17 \quad 72 \quad 63 \quad 33]$$
$$Z=[1 \quad 29 \quad 5 \quad 17 \quad 21 \quad 7 \quad 26 \quad 13 \quad 12 \quad 9]$$

Respuesta sugerida:

$$E[Y]=499/10$$
$$Var(Y)=40174/49$$
$$E[Z]=14$$
$$Var(Z)=84$$

$$Cov(X,Z)=\rho_{XZ}\sigma_X\sigma_Y=19/50*\sqrt{56}*\sqrt{84}=22909/879$$
$$E[XZ]=Cov(XZ)+E[X]E[Z]=22909/879\ +(\sqrt{26})*(14)=12376/127$$
$$E[XY]=E[X]E[Y] \quad pues \quad Cov(X,Y)=0\ y\ \rho_{XY}=0$$
$$E[XY]=\sqrt{26}*499/10=\ 8651/34$$
$$\sigma_Y=5469/191$$
$$Var(2X+3Y-4)=4Var(X)+9Var(Y)+2*2*3*Cov(X,Y)$$
$$pero\ como\ Cov(X,Y)=0$$
$$Var(2X+3Y-4)=4*56+9*40174/49=\ 76029/10$$

2. Diga si las igualdades presentadas a continuación son verdaderas o falsas. Justifique en todos los casos. (Escriba **todo** su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado)

   a) Para resolver éste punto, tenga en cuenta que a,b,c y d son una variables no estocásticas, X es una variable estocástica y Z es el doble de la anterior variable estocástica
   $Cov(aX+b,cZ+d)=abVar(X)$

   La afirmación es falsa porque:

$$Cov(aX+b,cZ+d)=Cov(aX+b,2cX+d)$$
$$=E\left[(aX+b)(2cX+d)\right]-E\left[aX+b\right]E\left[2cX+d\right]$$
$$=E\left[2acX^2+adX+2cbX+bd)\right]-\left[(aE\left[X\right]+b)(2cE\left[X\right]+d)\right]$$
$$=E\left[2acX^2+adX+2cbX+bd\right]-\left[2acE\left[X\right]^2+adE\left[X\right]+2cb\left[X\right]+bd\right]$$
$$=2acE\left[X^2\right]+adE\left[X\right]+2cbE\left[X\right]+bd-2acE\left[X\right]^2-adE\left[X\right]-2cb\left[X\right]-bd$$
$$=2ac\left[E\left[X^2\right]-E\left[X\right]^2\right]$$
$$=2acVar(X)$$

   b) Se cumple que:.

$$Var\left[X^2\right]=\sum_{i=1}^{n}(X^2-E(X^2))^2$$

   si X es una variable que no sigue ninguna distribución de probabilidad.
   La afirmación es verdadera.
   Dado que si X es una variable determinística, tenemos que $Var(X)=0$, por lo tanto $Var\left[X^2\right]=0$

   por otro lado

$$\sum_{i=1}^{n}(X^2-E(X^2))^2=\sum_{i=1}^{n}(X^2-X^2)^2=\sum_{i=1}^{n}(0)^2=\sum_{i=1}^{n}0=n0=0$$

3. Los miembros de la misión internacional de cierta universidad a la República Popular China fueron sorprendidos por una tormenta eléctrica y quedaron atrapados en el aeropuerto de Shangai, entonces en medio del aburrimiento general uno de los integrantes se inventó un juego en donde además de lanzar dos dados, uno negro y otro blanco, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que continúe la tormenta eléctrica (según la institución meteorológica local existe una probabilidad de 1/5 de que continúe). Entonces se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar, mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado negro es	Remuneración (miles de pesos)
1	4
2	2
3	11
4	7
5	14
6	21

Si Cara Superior del dado blanco	Remuneración (miles de pesos)
1	3
2	2
3	-8
4	-35
5	-10
6	-17

Si	Remuneración (miles de pesos)
Continúa la tormenta	12
No continúa la tormenta	8

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado negro, blanco y el estado del clima respectivamente.

A partir de la Información anterior responda las siguientes preguntas:

a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z.

Siguiendo la definición del valor esperado de una variable aleatoria discreta, se obtiene:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}X_i\cdot P(X_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{59}{6}=9.8\overline{3}$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}Y_i\cdot P(Y_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\frac{-65}{6}=-10.8\overline{3}$$

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n}Z_i\cdot P(Z_i)=\frac{1}{5}12+\frac{4}{5}8=2.4+6.4=8.8$$

b. Sea $W=X+Y+Z$, calcule el valor esperado de W.

De acuerdo con las propiedades del valor esperado se obtiene:

$$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

Por lo tanto: $E(W)=9.83-10.83+8.8=7.8$

c. Calcule la Varianza de X.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var[A]=E\left[A^2\right]-\left[E\left[A\right]\right]^2$, se obtiene:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{827}{6}-\frac{3481}{36}=\frac{4962-3481}{36}=\frac{1481}{36}=41.1389$$

d. Sea $F=X+Y$, calcule $Cov[W,F]$

Empleando la definición de la covarianza tenemos:

$$Cov[W,F]=E[WF]-E[W]\cdot E[F]$$
$$Cov[W,F]=E\left[(X+Y+Z)(X+Y)\right]-E\left[X+Y+Z\right]\cdot E\left[X+Y\right]$$
$$Cov[W,F]=E\left[X^2+2XY+Y^2+XZ+YZ\right]-E\left[X+Y+Z\right]\cdot E\left[X+Y\right]$$
$$Cov[W,F]=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)+E(XZ)+E(YZ)-E\left[X+Y+Z\right]\cdot E\left[X+Y\right]$$

Resolviendo se obtiene que
$$Cov\left[W,F\right]=137.833+2*(-106.5278)+281.833+86.5+(-95.3)-(7.8)*(-1)$$
$$Cov\left[W,F\right]=-205.6111$$

e. ¿Son F^2 y F (estadísticamente) independientes?

F^2 y F son independientes si y sólo si $E(F^2F)=E(F^2)\cdot E(F)$. Así, se debe probar esta condición. Primero calculemos el lado izquierdo, es decir:

$$E(F^2F)=E\left[\left(X+Y\right)^2\cdot\left(X+Y\right)\right]$$
$$E(F^2F)=E\left[(X+Y)(X^2+2XY+Y^2)\right]$$
$$E(F^2F)=E\left[X^3+2X^2Y+XY^2+X^2Y+2XY^2+Y^3\right]$$
$$E(F^2F)=E\left[X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3\right]$$
$$E(F^2F)=E\left[X^3\right]+3E\left[X^2Y\right]+3E\left[XY^2\right]+E\left[Y^3\right]$$
$$E\left(F^2F\right)=2291.8333-4479.5833+8314.0833-8210.8333=-2084.5$$

Ahora veamos a que es igual el lado derecho:

$$E(F^2)\cdot E(F)=E\left[\left(X+Y\right)^2\right]\cdot E(X+Y)$$
$$E(F^2)\cdot E(F)=E\left[X^2+2XY+Y^2\right]\cdot E(X+Y)$$
$$E(F^2)\cdot E(F)=\left[E\left[X^2\right]+2E\left[XY\right]+E\left[Y^2\right]\right]E(X+Y)$$
$$E\left(F^2\right)E\left(F\right)=\text{-206,6111}$$

Por lo tanto, $E(F^2F)\neq E(F^2)\cdot E(F)$ y se concluye que F^2 y F no son independientes.

Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}16 & 2 & 3 & 13\\ 5 & 11 & 10 & 8\\ 9 & 7 & 6 & 12\\ 4 & 14 & 15 & 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}15\\ 2\\ 23\\ 44\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7 & 2\\ 5 & 10 & 3 & 7\\ 7 & 1 & 4 & 3\\ 2 & 9 & 3 & 3\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}4 & 10 & 18 & 6\\ 8 & 2 & 6 & 16\\ 12 & 8 & 24 & 18\\ 6 & 14 & 18 & 18\end{bmatrix}$$

4. Encuentre (muestre todo el procedimiento)
$AB, A^TB^T, (C^TC)B^T, (B^TB+A)$
Respuesta:

$$AB=\begin{bmatrix}105 & 220 & 169 & 94\\ 156 & 217 & 132 & 141\\ 128 & 229 & 144 & 121\\ 189 & 184 & 133 & 154\end{bmatrix}$$

$$A^TB^T=\begin{bmatrix}144 & 185 & 165 & 116\\ 138 & 239 & 95 & 166\\ 131 & 238 & 100 & 159\\ 165 & 188 & 150 & 137\end{bmatrix}$$

$$(C^TC)B^T=\begin{bmatrix}8082 & 13470 & 18858 & 5388\\ 13470 & 26940 & 2694 & 24246\\ 18858 & 8082 & 10776 & 8082\\ 5388 & 18858 & 8082 & 8082\end{bmatrix}$$

$$B^TB+A=\begin{bmatrix}103 & 92 & 73 & 81\\ 95 & 218 & 106 & 118\\ 79 & 103 & 89 & 68\\ 72 & 124 & 71 & 72\end{bmatrix}$$

5. Continuando con el ejercicio anterior encuentre
$B^{-1}, D^{-1}, 2D+A^T, AB+(C^TC)D, ran(BD)$
Respuesta:

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}-129/631 & -117/631 & 177/631 & 182/631\\ -61/631 & -70/631 & 25/631 & 179/631\\ 157/631 & 25/631 & -54/631 & -109/631\\ 112/631 & 263/631 & -139/631 & -339/631\end{bmatrix}$$

$$2D+A^T=\begin{bmatrix}24 & 25 & 45 & 16\\ 18 & 15 & 19 & 46\\ 27 & 26 & 54 & 51\\ 25 & 36 & 48 & 37\end{bmatrix}$$

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}23/17 & 39/34 & -27/34 & -23/34\\ 57/68 & 45/68 & -39/68 & -5/17\\ -35/68 & -33/68 & 79/204 & 11/51\\ -10/17 & -7/17 & 11/34 & 5/17\end{bmatrix}$$

$$AB+(C^TC)D=\begin{bmatrix}10881 & 27160 & 48661 & 16258\\ 21708 & 5605 & 16296 & 43245\\ 32456 & 21781 & 64800 & 48613\\ 16353 & 37900 & 48625 & 48646\end{bmatrix}$$

$$ran(BD)=4$$

6. Continuando con el ejercicio 4
$D^{-1}B, A^{-1}D, \det(A^{-1}), ran(A), \quad (B^TD^T)^{-1}$

$$D^{-1}B=\begin{bmatrix}49/17 & 193/17 & 131/17 & 215/34\\ 83/68 & 127/17 & 159/34 & 63/17\\ -169/204 & -260/51 & -146/51 & -89/34\\ -33/34 & -139/34 & -54/17 & -75/34\end{bmatrix}$$

$A^{-1}D$ no se puede calcular, pues A es una matriz simétrica.
Det(A^{-1})=0

Ran(A)=3

$$(B^T D^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -805/1079 & -3514/8549 & 1081/2097 & 1023/1004 \\ -3369/5504 & -419/1308 & 1031/2430 & 621/769 \\ 593/1260 & 1145/4626 & -275/889 & -2003/3134 \\ 1423/4208 & 555/2921 & -81/325 & -839/1872 \end{bmatrix}$$