

Taller #1
Econometría 06169
Grupo 3

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1. Dos dados son lanzados al mismo tiempo sobre una mesa con superficie nivelada; un dado es de color azul y el otro de color rojo. Definamos:

- X el número en la cara superior del dado azul después de lanzado,
- Y el número en la cara superior del dado rojo después de lanzado ***multiplicado por 3***,
- Z la suma del número en la cara superior de cada uno de los dos dados después de ser lanzados,
- $W = XZ$.

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1 $E(X)$ $E(Y)$ $E(Z)$ $E(W)$

1.2 $Var(X)$ $Var(Y)$ $Var(Z)$ $Var(W)$

1.3. ¿Son W y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

2. Considere las siguientes matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.1 Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)

$$A^T A \quad (A)^{-1} \quad A \cdot B \quad A^T y \quad y^T y$$

2.2 Calcule (muestre todo su trabajo)

$$\left| A^T A \right| \quad |A|$$

3. Pruebe que $Cov(X, Y) \equiv E(XY) - E(X)E(Y)$

4. Pruebe que $Var(aX) \equiv a^2 \cdot Var(X)$

Respuestas Sugeridas al Taller #1
Econometría 06169
Grupo 3

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1. Dos dados son lanzados al mismo tiempo sobre una mesa con superficie nivelada; un dado es de color azul y el otro de color rojo. Definamos:

- X el número en la cara superior del dado azul después de lanzado,
- Y el número en la cara superior del dado rojo después de lanzado **multiplicado por 3**,
- Z la suma del número en la cara superior de cada uno de los dos dados después de ser lanzados,
- $W = XZ$.

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1

Sean D_A y D_R variables aleatorias que toma el valor que aparezca en la cara superior del dado azul y rojo después de lanzado, respectivamente. Así, los posibles valores de D_A son

(1, 2, 3, 4, 5, 6), cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Recuerden que

$$E(D_A) = \sum_{i=1}^n d_{Ai} \cdot P(d_{Ai}). \text{Entonces, } E(D_A) = \frac{7}{2} \text{ (En el archivo de PowerPoint de la}$$

presentación #1, empleado en clase, está el detalle de este cálculo). Similarmente, $E(D_R) = \frac{7}{2}$.

Entonces,

a. Como $X = D_A$, tenemos que $E(X) = E(D_A) = \frac{7}{2}$

b. Ahora note que $Y = 3D_R$. Entonces $E(Y) = E(3D_R) = 3 \cdot E(D_R) = 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$

c. Por definición tenemos que $Z = D_A + D_R$ (o si quieren $Z = X + \frac{1}{3}Y$). Luego

$$E(Z) = E(D_A + D_R) = E(D_A) + E(D_R) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{14}{2} = 7. \text{ O alternativamente podrían}$$

encontrar este valor de la siguiente manera:

$$E(Z) = E\left(X + \frac{Y}{3}\right) = E(X) + \frac{1}{3}E(Y) = \frac{7}{2} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{21}{2}\right) = \frac{14}{2} = 7$$

d. Note que $W = X \cdot Z = X \cdot (D_A + D_R) = D_A \cdot (D_A + D_R) = (D_A)^2 + D_A \cdot D_R$. De esta forma,
 $E(W) = E\left[(D_A)^2 + D_A \cdot D_R\right] = E\left[(D_A)^2\right] + E(D_A \cdot D_R)$. Así pues necesitamos calcular $E\left[(D_A)^2\right]$ y $E(D_A \cdot D_R)$. En clase vimos que $E\left[(D_A)^2\right] = \frac{91}{6}$ (ver presentación #1). Además, es bastante intuitivo reconocer que D_A y D_R son variables aleatorias independientes, luego $E(D_A \cdot D_R) = E(D_A)E(D_R)$. La prueba de esto se presenta al final en el Apéndice 1.

Ahora bien, ya tenemos todos los elementos para encontrar $E(W)$. Es decir,

$$E(W) = E\left[(D_A)^2\right] + E(D_A \cdot D_R) = \frac{91}{6} + \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}\right) = \frac{329}{12}.$$

1.2 Var(X) Var(Y) Var(Z) Var(W)

a. $Var(X) = Var(D_A) = \frac{35}{12}$. (En el archivo de PowerPoint de la presentación #1, empleado en clase, está el detalle de este cálculo)

b. $Var(Y) = Var(3D_R) = 3^2 \cdot Var(D_R) = 9 \cdot \frac{35}{12} = \frac{105}{4}$

c. Como $Z = D_A + D_R$, entonces

$Var(Z) = Var(D_A + D_R) = Var(D_A) + Var(D_R) + 2 \cdot Cov(D_A, D_R)$. Como D_A y D_R son variables aleatorias independientes entonces $Cov(D_A, D_R) = 0$. Por lo tanto,

$$Var(Z) = Var(D_A) + Var(D_R) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = 2 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

d. Ahora note que $Var(W) = E(W^2) - (E(W))^2$. Ya encontramos que $E(W) = \frac{329}{12}$, sólo nos

falta encontrar $E(W^2)$. Hagamos este cálculo, pero primero tenemos que identificar a que

es igual W^2 . $W^2 = \left[(D_A)^2 + D_A \cdot D_R\right]^2 = (D_A)^4 + 2 \cdot \left[(D_A)^3 \cdot D_R\right] + (D_R)^2 \cdot (D_A)^2$. Luego,

$E(W^2) = E\left[(D_A)^4\right] + 2 \cdot E\left[(D_A)^3 \cdot D_R\right] + E\left[(D_R)^2 \cdot (D_A)^2\right]$. Como D_A y D_R son variables aleatorias independientes, luego $E(D_A \cdot D_R) = E(D_A)E(D_R)$. De igual forma

$$E\left[(D_A)^3 \cdot D_R\right] = E\left[(D_A)^3\right]E(D_R) \text{ y } E\left[(D_R)^2 \cdot (D_A)^2\right] = E\left[(D_R)^2\right]E\left[(D_A)^2\right].$$

Entonces necesitamos conocer las siguientes cantidades para encontrar la varianza de W :

- $E[(D_A)^4]$
- $E[(D_A)^3]$
- $E[(D_R)^2]$ y $E[(D_A)^2]$
- $E(D_R)$

De estas cantidades conocemos las dos últimas, las otras las necesitamos calcular.

Cálculo de $E[(D_A)^3]$.

Los posibles valores de $(D_A)^3$ son $(1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Siguiendo la definición,

$$E[(D_A)^3] = \sum_{i=1}^n (d_{Ai})^3 \cdot P[(d_{Ai})^3] = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^n (d_{Ai})^3 \right] = \frac{1}{6} \cdot 441 = \frac{147}{2}$$

Cálculo de $E[(D_A)^4]$.

Los posibles valores de $(D_A)^4$ son $(1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Siguiendo la definición,

$$E[(D_A)^4] = \sum_{i=1}^n (d_{Ai})^4 \cdot P[(d_{Ai})^4] = \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^n (d_{Ai})^4 \right] = \frac{1}{6} \cdot 2275 = \frac{2275}{6}$$

Regresando a nuestro problema, tenemos que:

- $E[(D_A)^4] = \frac{2275}{6}$
- $E[(D_A)^3] = \frac{147}{2}$
- $E[(D_R)^2] = \frac{91}{6}$ (ver presentación #1)
- $E(D_R) = \frac{7}{2}$

Ahora si tenemos todas las piezas para encontrar $E(W^2)$, Recuerden que

$E(W^2) = E[(D_A)^4] + 2 \cdot E[(D_A)^3]E(D_R) + E[(D_R)^2]E[(D_A)^2]$. Así, tenemos que

$$E(W^2) = \frac{2275}{6} + 2 \cdot \frac{147}{2} \cdot \frac{7}{2} + \frac{91}{6} \cdot \frac{91}{6} = \frac{2275}{6} + \frac{1029}{2} + \frac{8281}{36} = \frac{40453}{36}$$

Finalmente, podemos encontrar la $\text{Var}(W)$.

$$\text{Var}(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = \frac{40453}{36} - \left(\frac{329}{12}\right)^2 = \frac{40453}{36} - \frac{108241}{144} = \frac{17857}{48} = 372.021$$

Nota: Como ven, este ejercicio era relativamente facil. Lo que intentaba con este ejercicio era que aplicaran las propiedades de la varianza y de la esperanza matemática. No era mi intención que ustedes gastarán mucho tiempo encontrando directamente el valor esperado de Z y mucho menos el de W.

1.3. ¿Son W y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

Noten que W y Y son independientes si y solamente si $E(WY) = E(W) \cdot E(Y)$ (*).
Veamos a que es igual la parte derecha de la ecuación (*).

$$E(W) \cdot E(Y) = \left[E\left[(D_A)^2\right] + E(D_A \cdot D_R) \right] \cdot E(3D_R)$$

$$E(W) \cdot E(Y) = \left[E\left[(D_A)^2\right] + E(D_A \cdot D_R) \right] \cdot 3 \cdot E(D_R)$$

$$E(W) \cdot E(Y) = 3 \cdot \left[E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A \cdot D_R) \cdot E(D_R) \right]$$

Por independencia de D_A y D_R tenemos

$$E(W) \cdot E(Y) = 3 \cdot \left[E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot E(D_R) \cdot E(D_R) \right]$$

$$E(W) \cdot E(Y) = 3 \cdot \left[E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot (E(D_R))^2 \right] \quad (**)$$

Ahora veamos a que es igual el lado izquierdo de la ecuacion (*).

$$E(WY) = E\left[\left[(D_A)^2 + (D_A \cdot D_R)\right] \cdot (3 \cdot D_R)\right]$$

$$E(WY) = 3 \cdot E\left[D_R \cdot (D_A)^2 + D_R \cdot (D_A \cdot D_R)\right]$$

$$E(WY) = 3 \cdot \left[E\left[D_R \cdot (D_A)^2\right] + E\left[D_A \cdot (D_R)^2\right] \right]$$

Por independencia de D_A y D_R tenemos

$$E(WY) = 3 \cdot \left[E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot E\left[(D_R)^2\right] \right] \quad (**)$$

Ahora si podemos comparar la parte derecha e izquierda de la ecuación (*):

$$E(WY) \stackrel{?}{=} E(W) \cdot E(Y)$$

$$3 \cdot \left[E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot E\left[(D_R)^2\right] \right] \quad ? \quad 3 \cdot \left[E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot (E(D_R))^2 \right]$$

$$E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot E\left[(D_R)^2\right] \quad ? \quad E\left[(D_A)^2\right] \cdot E(D_R) + E(D_A) \cdot (E(D_R))^2$$

$$E(D_A) \cdot E\left[(D_R)^2\right] \quad ? \quad E(D_A) \cdot (E(D_R))^2$$

$$E\left[(D_R)^2\right] \neq E(D_R)^2$$

Como ven, en este caso $E(WY) \neq E(W) \cdot E(Y)$ y por tanto W y Y no son independientes

2. Considere las siguientes matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \quad y \quad y := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d.

2.1 Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)

$$A^T A$$

$$A \cdot B$$

$$A^T y$$

$$y^T y$$

a)

b)

c)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 15 \\ 10 & 38 & 53 \\ 15 & 53 & 77 \end{pmatrix}$$

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 52 & 33 \\ 67 & 43 \\ 87 & 57 \end{pmatrix}$$

d)

e)

$$A^T y = \begin{pmatrix} 10 \\ 38 \\ 53 \end{pmatrix}$$

$$y^T y = (38)$$

2.2 Calcule (muestre todo su trabajo)

$$\left| A^T A \right| = 1 \quad \left| A \right| = -1$$

3. Pruebe que $Cov(X, Y) \equiv E(XY) - E(X)E(Y)$

Por definición tenemos que

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(XY) - XE(Y) - E(X)Y + E(X) \cdot E(Y)]$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X \cdot E(Y)) - E(E(X) \cdot Y) + E(E(X) \cdot E(Y))$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(Y) \cdot E(X) - E(X) \cdot E(Y) + E(X) \cdot E(Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(Y) \cdot E(X)$$

Q.E.D

4. Pruebe que $\text{Var}(aX) \equiv a^2 \cdot \text{Var}(X)$

Por definición tenemos que

$$\text{Var}(a \cdot X) = E[(a \cdot X)^2] - (E(a \cdot X))^2$$

$$\text{Var}(a \cdot X) = E(a^2 \cdot X^2) - (a \cdot E(X))^2$$

$$\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot E(X^2) - a^2 \cdot E(X)^2$$

$$\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot (E(X^2) - E(X)^2)$$

$$\text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

Q.E.D

Apéndice 1. Prueba de la independencia de D_A y D_R

De acuerdo con la definición de independencia, tenemos que D_A y D_R son independientes si y solamente si $E(D_A \cdot D_R) = E(D_A) E(D_R)$. Como vimos anteriormente, $E(D_A) = E(D_R) = \frac{7}{2}$, luego $E(D_A) \cdot E(D_R) = \frac{49}{4}$. Ahora debemos calcular a que es igual $E(D_A \cdot D_R)$. Noten que existen 18 diferentes valores para el producto $D_A \cdot D_R$ de 36 posibles combinaciones. Los posibles valores de $D_A \cdot D_R$ y sus respectivas probabilidades se reportan en la siguiente tabla.

Tabla 1.
Posibles Valores de $D_A \cdot D_R$ y
sus Respectivas Probabilidades

$D_A \cdot D_R$	$P(D_A \cdot D_R)$
1	1/36
2	2/36
3	2/36
4	3/36
5	2/36
6	4/36
8	2/36
9	1/36
10	2/36
12	4/36
15	2/36
16	1/36
18	2/36
20	2/36
24	2/36
25	1/36
30	2/36
36	1/36

Siguiendo la definición de valor esperado, tenemos

$$E(D_A \cdot D_R) = \sum_{i=1}^n (d_A \cdot d_R)_i \cdot P[(d_A \cdot d_R)_i] = \frac{441}{36} = \frac{49}{4}$$

Entonces tenemos que

$$E(D_A \cdot D_R) = E(D_A) E(D_R)$$

$$\frac{49}{4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}$$

Luego el valor esperado del producto de D_A y D_R es igual al producto del valor esperado de cada una de las dos variables aleatorias. Por lo tanto D_A y D_R son independientes.

Q.E.D