

Taller #2
Econometría 06169
Grupo 1

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1) Demuestre que $s^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}}}{n-k}$ es equivalente a $s^2 = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y}}{n-k}$

2.

a) Estime por MCO el siguiente modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador. Es decir de estimadores para β_1 , β_2 , β_3 y σ^2 .

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Contraste la hipótesis nula $H_0: \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

c) Construya un intervalo de confianza del 95% para β_2 .

d) Contraste la hipótesis nula $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

e) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

3. ¿Cuáles de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $y_i = \alpha \cdot (L_i)^\beta \cdot (K_i)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i$ b) $U_t = \alpha \left(\frac{w_t}{p_t} \right)^\beta + \varepsilon_t$

Donde ε_i y ε_t representan términos de error aleatorio.

4. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \ln(X_{2i}) + \beta_3 \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la línea de regresión.

Respuestas Sugeridas
Taller #2
Econometría 06169
Grupo 1

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1) Demuestre que $s^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}}}{n-k}$ es equivalente a $s^2 = \frac{y^T y - \hat{\mathbf{b}}^T X^T y}{n-k}$

$$s^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{e}}}{n-k} = \frac{(y - \hat{y})^T (y - \hat{y})}{n-k} = \frac{(y^T - \hat{y}^T)(y - \hat{y})}{n-k} = \frac{(y^T - (X\hat{\mathbf{b}})^T)(y - (X\hat{\mathbf{b}}))}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{(y^T - (\hat{\mathbf{b}}^T X^T))(y - (X\hat{\mathbf{b}}))}{n-k} = \frac{y^T y - (\hat{\mathbf{b}}^T X^T)y - y^T (X\hat{\mathbf{b}}) + (\hat{\mathbf{b}}^T X^T)(X\hat{\mathbf{b}})}{n-k}$$

Nosotros sabemos que $\hat{\mathbf{b}} = (X^T X)^{-1} X^T y$ entonces tenemos que

$$s^2 = \frac{y^T y - (\hat{\mathbf{b}}^T X^T)y - y^T (X\hat{\mathbf{b}}) + \left(\left((X^T X)^{-1} X^T y \right)^T X^T \right) (X\hat{\mathbf{b}})}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - (\hat{\mathbf{b}}^T X^T)y - y^T (X\hat{\mathbf{b}}) + \left(y^T X (X^T X)^{-1} X^T \right) (X\hat{\mathbf{b}})}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - (\hat{\mathbf{b}}^T X^T)y - y^T (X\hat{\mathbf{b}}) + \left(y^T X (X^T X)^{-1} X^T X \hat{\mathbf{b}} \right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - (\hat{\mathbf{b}}^T X^T)y - y^T (X\hat{\mathbf{b}}) + (y^T X \hat{\mathbf{b}})}{n-k} = \frac{y^T y - \hat{\mathbf{b}}^T X^T y}{n-k}$$

Q.E.D.

2.

a) Estime por MCO el siguiente modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador. Es decir de estimadores para β_1 , β_2 , β_3 y σ^2 .

$$y := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Note que

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 25 \\ 15 & 55 & 81 \\ 25 & 81 & 129 \end{pmatrix} \quad (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad X^T y = \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que encontrar el estimador para σ^2 .

$$s^2 = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T \cdot X^T y}{n - k}$$

En este caso tenemos que $k := 3$, $n := 5$ y $y^T y = (111)$. Así,

$$s^2 = \frac{111 - \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix}}{5 - 3} = \frac{7}{2}$$

Además tenemos que la matriz de varianzas y covarianzas esta dada por

$$\widehat{Var(\hat{\mathbf{b}})} = s^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \frac{7}{5} \begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1869}{50} & \frac{63}{10} & -\frac{56}{5} \\ \frac{63}{10} & \frac{7}{5} & -\frac{21}{10} \\ -\frac{56}{5} & -\frac{21}{10} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

b) Contraste la hipótesis nula $H_0: \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

Queremos probar la siguiente hipótesis nula $H_0: \beta_3 = 0$, versus la hipótesis alterna $H_A: \beta_3 \neq 0$.

Como vimos en clase el t calculado es dado por la siguiente formula: $t_c = \frac{\hat{\beta}_3}{s(\hat{\beta}_3)}$. En este caso

tenemos

$$t_c = \frac{-1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{-1}{7} \cdot \sqrt{14} = -0.535$$

Nota: En el examen yo les daría el valor de esta operación. Es decir les diría $\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = 0.535$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = 0.535$ o $\frac{1}{7} \cdot \sqrt{14} = 0.535$.

Este t_c lo tenemos que comparar con el $t_{0.025, 2} = 4.303$ de la tabla (Aquí ustedes podían escoger cualquier nivel de significancia y la decisión sería la misma $t_{0.005, 2} = 9.925$ y $t_{0.05, 2} = 2.92$). Note que $|t_c| = 0.535 < t_{0.025, 2} = 4.303$, por lo tanto no hay suficiente evidencia para decir que el coeficiente asociado con el regresor X_3 no es igual a cero. En otras palabras, podemos decir con un 95% de confianza que X_3 no ayuda a explicar la variabilidad en la variable dependiente.

c) Construya un intervalo de confianza del 95% para β_2 .

Un intervalo de confianza del 95% para β_2 esta dado por

$$\left(2 - t_{0.025, 2} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}}, 2 + t_{0.025, 2} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} \right)$$

$$\left(2 - 4.303 \cdot \sqrt{\frac{7}{5}}, 2 + 4.303 \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} \right)$$

Nota: Si no tenían calculadora, la linea anterior era suficiente.

$$(-3.091, 7.091)$$

d) Contraste la hipótesis nula $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

e) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

3. ¿Cuáles de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

$$\text{a) } y_i = \alpha \cdot (L_i)^\beta \cdot (K_i)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i \qquad \text{b) } U_t = \alpha \left(\frac{w_t}{p_t} \right)^\beta + \varepsilon_t$$

Donde ε_i y ε_t representan términos de error aleatorio.

a) Claramente el modelo $y_i = \alpha \cdot (L_i)^\beta \cdot (K_i)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i$ es no lineal, pero se puede linealizar fácilmente aplicando logaritmo natural a ambos lados de la ecuación. Es decir,

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha \cdot (L_i)^\beta \cdot (K_i)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i \\ \ln(y_i) &= \ln[\alpha \cdot (L_i)^\beta \cdot (K_i)^{1-\beta} \cdot \varepsilon_i] \\ \ln(y_i) &= \ln(\alpha) + \ln[(L_i)^\beta] + \ln[(K_i)^{1-\beta}] + \ln(\varepsilon_i) \\ \ln(y_i) &= \ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(L_i) + (1 - \beta) \cdot \ln(K_i) + \ln(\varepsilon_i) \end{aligned}$$

Ahora podemos redefinir las siguientes regresores y coeficientes: $W_i = \ln(y_i)$, $X_2 = \ln(L_i)$, $X_3 = \ln(K_i)$, $\psi_i = \ln(\varepsilon_i)$, $\beta_1 = \ln(\alpha)$, $\beta_2 = \beta$ y $\beta_3 = 1 - \beta$. Así podemos expresar el modelo original de la siguiente manera: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2i} + \beta_3 \cdot X_{3i} + \psi_i$. Luego podemos emplear modelos lineales.

b) Si intentamos "linealizar" el modelo $U_t = \alpha \left(\frac{w_t}{p_t} \right)^\beta + \varepsilon_t$, vamos a encontrar que no es posible.

Por ejemplo si intentamos usar la técnica empleada en la parte a) de esta pregunta,

encontraremos $\ln(U_t) = \ln \left(\alpha \left(\frac{w_t}{p_t} \right)^\beta + \varepsilon_t \right)$ y no podemos continuar simplificando esta expresión

Así este modelo no se puede linealizar y por tanto no podemos emplear las técnicas aprendidas para estimar modelos lineales.

4. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la línea de regresión.

Note que el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$ es equivalente al siguiente modelo no lineal $Y_i = \beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i$, donde $u_i = e^{\varepsilon_i}$ y $\beta = e^{\beta_1}$. Además sabemos que la elasticidad

asociada con X_2 esta dada por: $\eta_{(X_2)} = \frac{\Delta \% \text{en } Y}{\Delta \% \text{en } X_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}} Y_i \right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i}$. En este caso

$$\frac{d}{dX_{2i}} Y_i = \beta_2 \cdot \beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2-1} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i = \beta_2 \cdot \frac{\beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i}{X_{2i}} = \beta_2 \cdot \frac{Y_i}{X_{2i}}$$

Entonces, tenemos que

$$\eta_{(X_2)} = \frac{\Delta \% \text{en } Y}{\Delta \% \text{en } X_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}} Y_i \right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i} = \left(\beta_2 \cdot \frac{Y_i}{X_{2i}} \right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i} = \beta_2$$

De igual forma podemos mostrar que $\eta_{(X_3)} = \beta_3$.