Taller #2
Econometría 06169
Grupo 3

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1) Demuestre que $s^2 = \dfrac{\hat{e}^T\hat{e}}{n-k}$ es equivalente a $s^2 = \dfrac{y^T y - \hat{b}^T X^T y}{n-k}$

2.
a) Estime por MCO el el siguiente model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador. Es decir de estimadores para β_1, β_2, β_3 y σ^2.

$$y := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

c) Construya un intevalo de confianza del 95% para β_2.

d) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

e) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

3. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $y_i = \left[\alpha \cdot (L_i)^{\beta} \cdot (K_i)^{1-\beta}\right] + \varepsilon_i$

b) $U_t = \alpha\left(\dfrac{w_t \cdot \varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$

Donde ε_i y ε_t representan términos de error aleatorio.

4. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

Respuestas Sugeridas
Taller #2
Econometría 06169
Grupo 3

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1) Demuestre que $s^2 = \frac{\hat{e}^T \hat{e}}{n-k}$ es equivalente a $s^2 = \frac{y^T y - \hat{b}^T X^T y}{n-k}$

$$s^2 = \frac{\hat{e}^T \hat{e}}{n-k} = \frac{(y-\hat{y})^T (y-\hat{y})}{n-k} = \frac{\left(y^T - \hat{y}^T\right)(y-\hat{y})}{n-k} = \frac{\left(y^T - \left(X\hat{b}\right)^T\right)\left(y-\left(X\hat{b}\right)\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{\left(y^T - \left(\hat{b}^T X^T\right)\right)\left(y-\left(X\hat{b}\right)\right)}{n-k} = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{b}\right) + \left(\hat{b}^T X^T\right)\left(X\hat{b}\right)}{n-k}$$

Nosotros sabemos que $\hat{b} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$ entonces tenemos que

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{b}\right) + \left(\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T y\right)^T X^T\right)\left(X\hat{b}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{b}\right) + \left(y^T X \left(X^T X\right)^{-1} X^T\right)\left(X\hat{b}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{b}\right) + \left(y^T X \left(X^T X\right)^{-1} X^T X \hat{b}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T \left(X\hat{b}\right) + \left(y^T X \hat{b}\right)}{n-k} = \frac{y^T y - \hat{b}^T X^T y}{n-k}$$ **Q.E.D.**

2.

a) Estime por MCO el el siguiente model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador. Es decir de estimadores para β_1, β_2, β_3 y σ^2.

$$y := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Note que

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 25 \\ 15 & 55 & 81 \\ 25 & 81 & 129 \end{pmatrix} \qquad \left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad X^T y = \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que encontrar el estimador para σ^2.

$$s^2 = \frac{y^T y - \beta hat^T \cdot X^T y}{n - k}$$

En este caso tenemos que $k := 3$, $n := 5$ y $y^T y = (111)$. Asi,

$$s^2 = \frac{111 - \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix}}{5 - 3} = \frac{7}{5}$$

Además tenemos que la matriz de varianzas y covarianzas estimada esta dada por

$$\widehat{Var}\left(\hat{b}\right) = s^2\left(X^T X\right)^{-1} = \frac{7}{5}\cdot\begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1869}{50} & \frac{63}{10} & \frac{-56}{5} \\ \frac{63}{10} & \frac{7}{5} & \frac{-21}{10} \\ \frac{-56}{5} & \frac{-21}{10} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

b) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

Queremos provar la siguiente hipótesis nula $H_o: \beta_3 = 0$, versus la hipótesis alterna $H_A: \beta_3 \neq 0$.

Como vimos en clase el t calculado es dado por la siguiente formula: $t_c = \dfrac{\beta hat_3}{s\left(\beta hat_3\right)}$. En este caso tenemos

$$t_c = \frac{-1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{-1}{7}\cdot\sqrt{14} = -0.535$$

Nota: En el examen yo les daría el valor de esta operación. Es decir les diría $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = 0.535$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = 0.535$ o $\dfrac{1}{7}\cdot\sqrt{14} = 0.535$.

Este t_c lo tenemos que comparar con el $t_{0.025,2} = 4.303$ de la tabla (Aquí ustedes podían escoger cualquier nivel de significancia y la decisión sería la misma $t_{0.005,2} = 9.925$ y $t_{0.05,2} = 2.92$). Note que $\left|t_c\right| = 0.535 < t_{0.025,2} = 4.303$, por lo tanto no hay suficiente evidencia para decir que el coeficiente asociado con el regresor X_3 no es igual a cero. En otras palabras, podemos decir con un 95% de confianza que X_3 no ayuda ha explicar la variabilidad en la variable dependiente.

c) Construya un intevalo de confianza del 95% para β_2.

Un intervalo de confianza del 95% para β_2 esta dado por

$$\left(2 - t_{0.025,2}\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}, 2 + t_{0.025,2}\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$$

$$\left(2 - 4.303\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}, 2 + 4.303\cdot\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$$

Nota: Si no tenían calculadora, la linea anterior era suficiente.

$$(-3.091, 7.091)$$

d) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

e) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

3. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $$y_i = \left[\alpha\cdot\left(L_i\right)^{\beta}\cdot\left(K_i\right)^{1-\beta}\right] + \varepsilon_i$$

b) $$U_t = \alpha\left(\frac{w_t\cdot\varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$$

Donde ε_i y ε_t representan términos de error aleatorio.

a) Claramente el modelo $y_i = \left[\alpha\cdot\left(L_i\right)^{\beta}\cdot\left(K_i\right)^{1-\beta}\right] + \varepsilon_i$ es no lineal; pero, ¿se puede linealizar? La respuesta es no, si aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación tendremos,

$$y_i = \left[\alpha\cdot\left(L_i\right)^{\beta}\cdot\left(K_i\right)^{1-\beta}\right] + \varepsilon_i$$
$$\ln\left(y_i\right) = \ln\left[\left[\alpha\cdot\left(L_i\right)^{\beta}\cdot\left(K_i\right)^{1-\beta}\right] + \varepsilon_i\right]$$

y no podemos continuar simplificando esta expresión. Claramente, no existe alguna forma de manipular algebraicamente esta expresión de tal forma que obtengamos un modelo lineal. Por tanto no podemos emplear métodos lineales para estimar este modelo.

b) Claramente el modelo $U_t = \alpha\left(\frac{w_t \cdot \varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$ es no lineal, pero se puede linealizar facilmente aplicando logaritmo natural a ambos lados de la ecuación. Es decir,

$$U_t = \alpha\left(\frac{w_t \cdot \varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$$

$$\ln(U_t) = \ln\left[\alpha \cdot (w_t)^{\beta} \cdot (p_t)^{-\beta} \cdot (\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$

$$\ln(U_t) = \ln(\alpha) + \ln\left[(w_t)^{\beta}\right] + \ln\left[(p_t)^{-\beta}\right] + \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$

$$\ln(U_t) = \ln(\alpha) + \beta \cdot \ln(w_t) - \beta \cdot \ln(p_t) + \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$

Ahora podemos redefinir las siguientes regresores y coeficientes: $Y_t = \ln(U_t)$, $X_{2t} = \ln(w_t)$, $X_{3t} = \ln(p_t)$, $\psi_t = \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$, $\beta_1 = \ln(\alpha)$, $\beta_2 = \beta$ y $\beta_3 = -\beta$. Así podemos expresar el modelo original de la siguiente manera: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2i} + \beta_3 \cdot X_{3i} + \psi_i$. Luego podemos emplear modelos lineales.

4. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

Note que el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$ es equivalente al siguiente modelo no lineal $Y_i = \beta \cdot (X_{2i})^{\beta_2} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i$, donde $u_i = e^{\varepsilon_i}$ y $\beta = e^{\beta_1}$. Además sabemos que la elasticidad asociada con X_2 esta dada por: $\eta_{(X_2)} = \frac{\Delta\%\text{en}Y}{\Delta\%\text{en}X_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}} Y_i\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i}$. En este caso

$$\frac{d}{dX_{2i}} Y_i = \beta_2 \cdot \beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2 - 1} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i = \beta_2 \cdot \frac{\beta_1 \cdot (X_{2i})^{\beta_2} \cdot (X_{3i})^{\beta_3} \cdot u_i}{X_{2i}} = \beta_2 \cdot \frac{Y_i}{X_{2i}}$$

Entonces, tenemos que

$$\eta_{(X_2)} = \frac{\Delta\%\text{en}Y}{\Delta\%\text{en}X_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}} Y_i\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i} = \left(\beta_2 \cdot \frac{Y_i}{X_{2i}}\right) \cdot \frac{X_{2i}}{Y_i} = \beta_2$$

De igual forma podemos mostrar que $\eta_{(X_3)} = \beta_3$.