Taller #2
Econometría 06169
Grupo 5

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1) Demuestre que $s^2 = \dfrac{\hat{e}^T\hat{e}}{n-k}$ es equivalente a $s^2 = \dfrac{y^T y - \hat{b}^T X^T y}{n-k}$

2.
a) Estime por MCO el el siguiente model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador. Es decir de estimadores para β_1, β_2, β_3 y σ^2.

$$y := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_1 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

c) Construya un intevalo de confianza del 95% para $\beta_2 + \beta_3$.

d) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_1 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

e) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

3. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $Q_i = e^{\alpha}\cdot\left[\left[(1-\delta)(L_i)^{-\varphi} + \delta\cdot(K_i)^{-\varphi}\right]^{-\frac{\beta}{\varphi}}\cdot\varepsilon_i\right]$ b) $U_t = \alpha\left(\dfrac{w_t}{p_t}\right)^{\beta} + \varepsilon_t$

Donde ε_t representa un término de error aleatorio.

4. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2\cdot\ln(X_{2i}) + \beta_3\cdot\ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

Respuestas Sugeridas
Taller #2
Econometría 06169
Grupo 5

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1) Demuestre que $s^2 = \frac{\hat{e}^T\hat{e}}{n-k}$ es equivalente a $s^2 = \frac{y^T y - \hat{b}^T X^T y}{n-k}$

$$s^2 = \frac{\hat{e}^T\hat{e}}{n-k} = \frac{(y-\hat{y})^T (y-\hat{y})}{n-k} = \frac{\left(y^T - \hat{y}^T\right)(y-\hat{y})}{n-k} = \frac{\left(y^T - \left(X\hat{b}\right)^T\right)\left(y - \left(X\hat{b}\right)\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{\left(y^T - \left(\hat{b}^T X^T\right)\right)\left(y - \left(X\hat{b}\right)\right)}{n-k} = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T\left(X\hat{b}\right) + \left(\hat{b}^T X^T\right)\left(X\hat{b}\right)}{n-k}$$

Nosotros sabemos que $\hat{b} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$ entonces tenemos que

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T\left(X\hat{b}\right) + \left(\left(\left(X^T X\right)^{-1} X^T y\right)^T X^T\right)\left(X\hat{b}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T\left(X\hat{b}\right) + \left(y^T X\left(X^T X\right)^{-1} X^T\right)\left(X\hat{b}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T\left(X\hat{b}\right) + \left(y^T X\left(X^T X\right)^{-1} X^T X\hat{b}\right)}{n-k}$$

$$s^2 = \frac{y^T y - \left(\hat{b}^T X^T\right) y - y^T\left(X\hat{b}\right) + \left(y^T X\hat{b}\right)}{n-k} = \frac{y^T y - \hat{b}^T X^T y}{n-k}$$ **Q.E.D.**

2.

a) Estime por MCO el el siguiente model $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$ usando las siguientes observaciones recogidas por un investigador. Es decir de estimadores para β_1, β_2, β_3 y σ^2.

$$y := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Note que

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 25 \\ 15 & 55 & 81 \\ 25 & 81 & 129 \end{pmatrix} \qquad \left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad X^T y = \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que encontrar el estimador para σ^2.

$$s^2 = \frac{y^T y - \beta hat^T \cdot X^T y}{n - k}$$

En este caso tenemos que $k := 3$, $n := 5$ y $y^T y = (111)$. Asi,

$$s^2 = \frac{111 - \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 77 \\ 113 \end{pmatrix}}{5 - 3} = \frac{7}{5}$$

Además tenemos que la matriz de varianzas y covarianzas estimada esta dada por

$$\widehat{Var}\left(\hat{b}\right) = s^2\left(X^T X\right)^{-1} = \frac{7}{5}\cdot\begin{pmatrix} \frac{267}{10} & \frac{9}{2} & -8 \\ \frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -8 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1869}{50} & \frac{63}{10} & \frac{-56}{5} \\ \frac{63}{10} & \frac{7}{5} & \frac{-21}{10} \\ \frac{-56}{5} & \frac{-21}{10} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

b) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_1 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

Queremos provar la siguiente hipótesis nula $H_o: \beta_1 = 0$, versus la hipótesis alterna $H_A: \beta_1 \neq 0$.

Como vimos en clase el t calculado es dado por la siguiente formula: $t_c = \frac{\text{βhat}_1}{s_{(\text{βhat}_1)}}$. En este caso tenemos

$$t_c = \frac{\frac{16}{5}}{\sqrt{\frac{1869}{50}}} = \frac{16}{1869}\cdot\sqrt{3738} = 0.523$$

Nota: En el examen yo les daría el valor de esta operación. Es decir les diría $\frac{\frac{16}{5}}{\sqrt{\frac{1869}{50}}} = 0.523$ o $\frac{16}{1869}\cdot\sqrt{3738}$.

Este t_c lo tenemos que comparar con el $t_{0.025,\,2} = 4.303$ de la tabla (Aquí ustedes podían escoger cualquier nivel de significancia y la decisión sería la misma $t_{0.005,\,2} = 9.925$ y $t_{0.05,\,2} = 2.92$). Note que $\left|t_c\right| = 0.523 < t_{0.025,\,2} = 4.303$, por lo tanto no hay suficiente evidencia para decir que el intercepto no es igual a cero. En otras palabras, podemos decir con un 95% de confianza que el intercepto es cero.

c) Construya un intevalo de confianza del 95% para $\beta_2 + \beta_3$.

En este caso, un intevalo de de confianza del 95% para $\beta_2 + \beta_3$ viene dado por

$$\left(\hat{b}_2 + \hat{b}_3\right) \pm t_{\frac{a}{2},2}\, s_{\hat{b}_2+\hat{b}_3}$$

Note que

$$Var\left(\hat{b}_2 + \hat{b}_3\right) = Var\left(\hat{b}_2\right) + Var\left(\hat{b}_3\right) + 2Cov\left(\hat{b}_3, \hat{b}_2\right)$$

Por lo tanto tenemos que

$$s_{\hat{b}_3+\hat{b}_2} = \sqrt{s^2_{\hat{b}_3} + s^2_{\hat{b}_2} + 2s_{\hat{b}_3,\hat{b}_2}}$$

$$\sqrt{\frac{7}{5} + \frac{7}{2} + 2\cdot\left(\frac{-21}{10}\right)} = \sqrt{\frac{7}{5} + \frac{7}{2} - \frac{21}{5}} = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{14}{5}} = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{1}{10}\cdot\sqrt{70}$$

Un intervalo de confianza del 95% para $\beta_2 + \beta_3$ esta dado por

$$\left[(2-1) - t_{0.025,2}\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot\sqrt{70}\right), (2-1) + t_{0.025,2}\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot\sqrt{70}\right)\right]$$

$$\left[1 - 4.303\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot\sqrt{70}\right), 1 + 4.303\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot\sqrt{70}\right)\right]$$

Nota: Si no tenían calculadora, la linea anterior era suficiente.

$$(-2.6, 4.6)$$

d) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_1 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

e) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

3. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $$Q_i = e^{\alpha}\cdot\left[\left[(1-\delta)(L_i)^{-\varphi} + \delta\cdot(K_i)^{-\varphi}\right]^{-\frac{\beta}{\varphi}}\cdot\varepsilon_i\right]$$

b) $$U_t = \alpha\left(\frac{w_t}{p_t}\right)^{\beta} + \varepsilon_t$$

Donde ε_t representa un término de error aleatorio.

a) El modelo $Q_i = e^{\alpha}\cdot\left[\left[(1-\delta)(L_i)^{-\varphi} + \delta\cdot(K_i)^{-\varphi}\right]^{-\frac{\beta}{\varphi}}\cdot\varepsilon_i\right]$ es no lineal; pero, ¿se puede linealizar?Vemos, apliquemos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación. Es decir,

$$Q_i = e^{\alpha}\cdot\left[\left[(1-\delta)(L_i)^{-\varphi} + \delta\cdot(K_i)^{-\varphi}\right]^{-\frac{\beta}{\varphi}}\cdot\varepsilon_i\right]$$

$$\ln(Q_i) = \ln\left[e^{\alpha}\cdot\left[\left[(1-\delta)(L_i)^{-\varphi} + \delta\cdot(K_i)^{-\varphi}\right]^{-\frac{\beta}{\varphi}}\cdot\varepsilon_i\right]\right]$$

$$\ln(Q_i) = \alpha + \ln\left[\left[(1-\delta)(L_i)^{-\varphi} + \delta\cdot(K_i)^{-\varphi}\right]^{-\frac{\beta}{\varphi}}\right] + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln(Q_i) = \alpha + \left(\frac{-\beta}{\varphi}\right)\cdot\ln\cdot\left[(1-\delta)\cdot(L_i)^{-\varphi} + \delta\cdot(K_i)^{-\varphi}\right] + \ln(\varepsilon_i)$$

Ahora note que este modelo no es lineal, pues no todos los parámetros entran de forma lineal. Así es modelo no es "linealizable" y por tanto no podemos emplear las técnica de regresión lineal.

b) Si intentamos "linealizar" el modelo $U_t = \alpha\left(\frac{w_t}{p_t}\right)^{\beta} + \varepsilon_t$, vamos a encontrar que no es posible.

Por ejemplo si intentamos usar el logaritmo natural, encontraremos $\ln(U_t) = \ln\left(\alpha\left(\frac{w_t}{p_t}\right)^{\beta} + \varepsilon_t\right)$ y no podemos continuar simplificando esta expresión. Así este modelo no se puede linealizar y por tanto no podemos emplear las tecnicas aprendidas para estimar modelos lineales.

4. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2\cdot\ln(X_{2i}) + \beta_3\cdot\ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

Note que el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2\cdot\ln(X_{2i}) + \beta_3\cdot\ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$ es equivalente al siguiente modelo no lineal $Y_i = \beta\cdot(X_{2i})^{\beta_2}\cdot(X_{3i})^{\beta_3}\cdot u_i$, donde $u_i = e^{\varepsilon_i}$ y $\beta = e^{\beta_1}$. Además sabemos que la elasticidad asociada con X_2 esta dada por: $\eta_{(X_2)} = \frac{\Delta\%\mathrm{en}Y}{\Delta\%\mathrm{en}X_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}}Y_i\right)\cdot\frac{X_{2i}}{Y_i}$. En este caso

$$\frac{d}{dX_{2i}}Y_i = \beta_2\cdot\beta_1\cdot\left(X_{2i}\right)^{\beta_2-1}\cdot\left(X_{3i}\right)^{\beta_3}\cdot u_i = \beta_2\cdot\frac{\beta_1\cdot\left(X_{2i}\right)^{\beta_2}\cdot\left(X_{3i}\right)^{\beta_3}\cdot u_i}{X_{2i}} = \beta_2\cdot\frac{Y_i}{X_{2i}}$$

Entonces, tenemos que

$$\eta_{\left(X_2\right)} = \frac{\Delta\%enY}{\Delta\%enX_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}}Y_i\right)\cdot\frac{X_{2i}}{Y_i} = \left(\beta_2\cdot\frac{Y_i}{X_{2i}}\right)\cdot\frac{X_{2i}}{Y_i} = \beta_2$$

De igual forma podemos mostrar que $\eta_{\left(X_3\right)} = \beta_3$.