Taller #1
Econometría I 06169

Repaso

Profesor: Julio César Alonso

Notas:

- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 9 de agosto.

INSTRUCCIONES:

- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. En una reunión un poco aburrida de profesores de estadística se decidió volver un poco interesante la tertulia inventándose un juego. El juego consistía en lanzar dos dados, uno azul y uno rojo, s sobre una superficie plana al mismo tiempo que una moneda de 500 pesos es lanzada al aire. Además, se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado azul es	Remuneración (miles de pesos)
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14
6	17

Si Cara Superior del dado rojo es	Remuneración (miles de pesos)
1	-2
2	5
3	-6
4	-20
5	-12
6	-15

Si Cara Superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	10
Sello	5

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado azul, rojo y la moneda, respectivamente.

a. Calcule el valor esperado de X.
b. Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W.

2. Continuando con el ejercicio anterior,

a. Calcule la varianza de X.
b. Calcule la varianza de W.
c. Sea $F = X + Y$, calcule $Cov[W, F]$
d. ¿Son W^2 y W (estadísticamente) independientes?

3. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 10 \\ 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 10 & 10 \\ 3 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

Encuentre (muestre todo el procedimiento):

a) AB, CB, AJ y JA
b) $A^T A$ y $B^T B$
c) $tr(A)$ y $ran(A)$
d) $tr(J)$ y $ran(J)$

4. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre

a) $\det(CB)$
b) $A+J$, $B+C$
c) A^{-1} y $\left[B^T B\right]^{-1}$

5. Un investigador es contratado para determinar el efecto del precio y el ingreso en las ventas de libros en la Ciudad de Cali. Para esto se cuenta con una encuesta, la cual recogió información sobre el número de libros que demandaba el individuo i (Q_i) dado el posible precio p_i (medido en pesos) y el ingreso del individuo i (I_i) (medido en miles de pesos). Para esto el investigador emplea la siguiente función de demanda:

$$Q_i = \gamma_1 + \gamma_2 p_i + \gamma_3 I_i^2 + \varepsilon_i \qquad (1)$$

Además se cuenta con la siguiente información:

$\sum_{i=1}^{200} p_i = 200$, $\sum_{i=1}^{200} Q_i = 200$ $\sum_{i=1}^{200} I_i^2 = 100$, $\sum_{i=1}^{200} I_i^2 = 100$, $\sum_{i=1}^{200} Q_i I_i^2 = 100$ $\sum_{i=1}^{200} p_i^2 = 400$, $\sum_{i=1}^{200} p_i I_i^2 = 800$ y $\sum_{i=1}^{200} I_i^4 = 500$, $\sum_{i=1}^{200} Q_i p_i = 100$ y $\sum_{i=1}^{200} Q_i^2 = 2158.75$

Responda las siguientes preguntas:

a) Arme la matriz $X^T X$.
b) Encuentre el valor estimado de γ_1, γ_2, γ_3 y σ^2.
c) Interprete el significado de los valores estimados de γ_1, γ_2 y γ_3. (Demuestre formalmente que su interpretación es correcta)

6. Continuando con el ejercicio anterior,

a) ¿Tiene el ingreso un efecto real sobre la venta de libros? (Haga todas las pruebas estadísticas pertinentes)
b) Construya la tabla ANOVA.
c) ¿Son todas las variables conjuntamente significativas?
d) ¿Qué tan bueno es el modelo estimado? (Comente y haga los cálculos necesarios)

Taller #1

Respuestas Sugeridas
Econometría I 06169

Repaso

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Carlos I. Patiño
Ana María Lotero

<u>Notas:</u>
- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 9 de agosto.

<u>INSTRUCCIONES:</u>
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. En una reunión un poco aburrida de profesores de estadística se decidió volver un poco interesante la tertulia inventándose un juego. El juego consistía en lanzar dos dados, uno azul y uno rojo, s sobre una superficie plana al mismo tiempo que una moneda de 500 pesos es lanzada al aire. Además, se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado azul es	Remuneración (miles de pesos)
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14
6	17

Si Cara Superior del dado rojo es	Remuneración (miles de pesos)
1	-2
2	5
3	-6
4	-20
5	-12
6	-15

Si Cara Superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	10
Sello	5

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado azul, rojo y la moneda, respectivamente.

a. Calcule el valor esperado de X.

Siguiendo la definición del valor esperado de una variable aleatoria discreta, tenemos que:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i \times P(X_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{19}{2}=9.5$$

b. Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W.

De acuerdo con las propiedades del valor esperado tenemos que:

$$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

Por lo tanto: $E(W)=9.50-8.33+7.5=\frac{26}{3}=8.67$

2. Continuando con el ejercicio anterior,

a. Calcule la varianza de X.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var[A]=E\left[A^2\right]-\left[E[A]\right]^2$, tenemos que:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{233}{2}-\frac{361}{4}=\frac{105}{4}=26.25$$

b. Calcule la varianza de W.

Empleando las propiedades de la varianza tenemos que: $Var(W)=Var(X+Y+Z)=Var(X)+Var(Y)+Var(Z)$, por lo tanto:

$$Var(W)=\frac{105}{4}+\frac{626}{9}+\frac{25}{4}=102.06$$

c. Sea $F = X + Y$, calcule $Cov[W, F]$

Empleando la definición de la covarianza obtenemos:

$$Cov[W,F]=E[WF]-E[W]\cdot E[F]$$
$$Cov[W,F]=E\left[(X+Y+Z)(X+Y)\right]-E[X+Y+Z]\cdot E[X+Y]$$

Resolviendo se obtiene que $Cov[W,F]=95.81$

d. ¿Son W^2 y W (estadísticamente) independientes?

W^2 y W son independientes si y sólo si $E(W^2W)=E(W^2)\cdot E(W)$. Así, debemos probar si esto es cierto. Primero calculemos el lado izquierdo, es decir:

$$E(W^2W) = E\left[\left(X+Y+Z\right)^2 \cdot \left(X+Y+Z\right)\right]$$
$$E(W^2W) = E\left[\left(X^2+Y^2+Z^2+2XY+2XZ+2YZ\right)\cdot\left(X+Y+Z\right)\right]$$
$$E(W^2W) = \frac{10265}{3} = 3421.67$$

Ahora veamos a que es igual el lado derecho:

$$E(W^2)\cdot E(W) = E\left[\left(X+Y+Z\right)^2\right]\cdot E(X+Y+Z)$$
$$E(W^2)\cdot E(W) = \left[E\left(X^2\right)+E\left(Y^2\right)+E\left(Z^2\right)+2E\left(XY\right)+2E\left(XZ\right)+2E\left(YZ\right)\right]\cdot\left[E\left(W\right)\right]$$
$$E(W^2)\cdot E\left(W\right) = \frac{13819}{9} = 1535.44$$

Por lo tanto, $E(W^2W) \neq E(W^2)\cdot E(W)$ y se concluye que W^2 y W no son independientes.

3. Dadas las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}1&4&6\\5&2&10\\1&9&8\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2\\6\\10\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}4&8&2\end{bmatrix}\quad J=\begin{bmatrix}1&2&6\\5&10&10\\3&4&12\end{bmatrix}$$

Encuentre (muestre todo el procedimiento):

a) AB, CB, AJ y JA

$$AB=\begin{bmatrix}86\\122\\136\end{bmatrix}\quad CB=76\quad AJ=\begin{bmatrix}39&66&118\\45&70&170\\70&124&192\end{bmatrix}\quad JA=\begin{bmatrix}17&62&74\\65&130&210\\35&128&154\end{bmatrix}$$

b) A^TA y B^TB

$$A^TA=\begin{bmatrix}27&23&64\\23&101&116\\64&116&200\end{bmatrix}\quad B^TB=140$$

c) $tr(A)$ y $ran\left(A\right)$

$tr(A)=1+2+8=11$

$ran\left(A\right)=3$, pues el $ran\left(A\right)$ es igual al número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn, existen n valores propios). Además $|A|\neq 0$, es decir que A tiene rango completo, es decir $ran\left(A\right)=3$.

d) $tr(J)$ y $ran\left(J\right)$

$tr(J)=1+10+12=23$

$ran\left(J\right)=3$

4. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre

a) $\det\left(CB\right)$

$$\det\left(CB\right)=76$$

b) $A+J$, $B+C$

$$A+J=\begin{bmatrix}2&6&12\\10&12&20\\4&13&20\end{bmatrix}$$

$B+C$ no es conformable.

c) A^{-1} y $\left[B^TB\right]^{-1}$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1.1563&0.3438&0.4375\\-0.4688&0.0313&0.3125\\0.6719&-0.0781&-0.2813\end{bmatrix}\quad \left[B^TB\right]^{-1}=\frac{1}{140}=0.0071$$

5. Un investigador es contratado para determinar el efecto del precio y el ingreso en las ventas de libros en la Ciudad de Cali. Para esto se cuenta con una encuesta, la cual recogió información sobre el número de libros que demandaba el individuo i (Q_i) dado el posible precio p_i (medido en pesos) y el ingreso del individuo i (I_i) (medido en miles de pesos). Para esto el investigador emplea la siguiente función de demanda:

$$Q_i=\gamma_1+\gamma_2 p_i+\gamma_3 I_i^2+\varepsilon_i \qquad (1)$$

Además se cuenta con la siguiente información:

$\sum_{i=1}^{200} p_i=200$, $\sum_{i=1}^{200} Q_i=200$ $\sum_{i=1}^{200} I_i^2=100$, $\sum_{i=1}^{200} Q_iI_i^2=100$ $\sum_{i=1}^{200} p_i^2=400$, $\sum_{i=1}^{200} p_iI_i^2=800$ y $\sum_{i=1}^{200} I_i^4=500$, $\sum_{i=1}^{200} Q_ip_i=100$ y $\sum_{i=1}^{200} Q_i^2=2158.75$

Responda las siguientes preguntas:

a) Arme la matriz $X^T X$.

Recuerden que:

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ki} \\ & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{ki} \\ & & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 & \ddots & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{ki} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz $X^T X$ es:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 200 & 200 & 100 \\ 200 & 400 & 800 \\ 100 & 800 & 500 \end{bmatrix}$$

b) Encuentre el valor estimado de γ_1, γ_2, γ_3 y σ^2.

Inicialmente se debe construir la matriz $X^T y$. La estructura de esta matriz es:

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{ki} \end{bmatrix}$$

Recuerden que $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$ y $s^2 = \frac{SSE}{n-k} = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n-k}$. Antes de continuar, es importante anotar que:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Se obtiene que:

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \frac{1}{1000} \begin{bmatrix} 11/2 & 1/4 & -3/2 \\ 1/4 & -9/8 & 7/4 \\ -3/2 & 7/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el vector de parámetros estimados es el siguiente: $\hat{\gamma} = \begin{bmatrix} 39/40 \\ 9/8 \\ -7/40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.975 \\ 0.1125 \\ -0.175 \end{bmatrix}$

Para estimar σ^2 recuerden que:

$$s^2 = \frac{y^T y - \gamma^T X^T y}{n-k}$$

En este caso $y^T y = \sum_{i=1}^{200} Q_i^2 = 2158.75$, por lo tanto:

$$s^2 = \frac{2158.75 - \begin{bmatrix} \frac{39}{40} & \frac{9}{80} & -\frac{7}{40} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}}{200-3} = \frac{2158.75 - \frac{755}{4}}{197} = \frac{1970}{197} = 10$$

$$\hat{\sigma}^2 = 10$$

Y la matriz de varianza y covarianza es:

$$s^2 \left(X^T X\right)^{-1} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{9}{8} & \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) Interprete el significado de los valores estimados de γ_1, γ_2 y γ_3. (Demuestre formalmente que su interpretación es correcta)

$\hat{\gamma}_1 = 0.975$: El número de unidades demandadas cuando el precio y el ingreso son cero es de 0.975.

Derivando la cantidad demandada de libros con respecto al precio se obtiene $\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = \gamma_2$, Así, γ_2 corresponde a las unidades en que cambiarán las unidades demandadas Q_i, dado un aumento de una unidad en p_i. Por lo tanto $\hat{\gamma}_2 = 0.1125$ implica que un aumento de un peso en el precio de los libros genera un aumento de 0.1125 unidades en la demanda de libros. Lo anterior no es congruente con la teoría económica.

Para encontrar el significado de γ_3, será necesario derivar (1) con respecto a I_i. En otras palabras, $\frac{\partial Q_i}{\partial I_i} = 2\gamma_3 I_i$. Lo anterior implica que el cambio en la demanda generado por el cambio en el ingreso no es constante (depende del nivel de ingreso en el que se encuentre). Por lo tanto $\hat{\gamma}_3 = -0.175$ implica que un incremento de 1000 pesos en el nivel de ingreso genera un cambio de $-0.35 I_i$ en la demanda de libros.

6. Continuando con el ejercicio anterior,
   a) ¿Tiene el ingreso un efecto real sobre la venta de libros? (Haga todas las pruebas estadísticas pertinentes)

Para responder esta pregunta se debe probar la $H_0: \gamma_3 = 0$ versus la $H_A: \gamma_3 \neq 0$, por lo tanto el estadístico relevante es

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_i - c}{s_{\hat{\beta}_i}}$$

En este caso:

$$t_c = \frac{-7/40 - 0}{\sqrt{1/200}} = -2.47$$

Este t_c se compara con el de la tabla con n-k grados de libertad, en este caso $t_{\frac{0.01}{2},197} = 2.601$. Note que $|t_c|$ es menor que el valor crítico, por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis nula. Es decir, el ingreso no tiene un efecto real sobre la venta de libros a un nivel de confianza del 99%.

b) Construya la tabla ANOVA.

La tabla ANOVA está dada por:

Fuente de variación	SS	G de L	MS
Regresión	$SSR = \hat{\beta}^T X^T y - n\bar{Y}^2$	k-1	$\frac{SSR}{k-1}$
Error (Residuos)	$SSE = y^T y - \hat{\beta}^T X^T y$	n-k	$\frac{SSE}{n-k}$
Total	$y^T y - n\bar{y}^2$	n-1	

En este caso, k=3, n=200, $y^T y = \sum_{i=1}^{200} Q_i^2 = 2158.75$, $\hat{\gamma}^T X^T y = 188.75$ y $\bar{y} = 1$. Por lo tanto, la tabla Anova es:

Fuente de variación	SS	G de L	MS
Regresión	SSR = -11.25	3-1=2	-5,625
Error (Residuos)	SSE = 1970	200-3=197	10
Total	1958,75	200-1=199	

Noten que el SSR es negativo, lo cual es imposible pues es una suma de cuadrados. Este resultado pone de manifiesto una inconsistencia en la información presentada. Por tanto las partes restantes de este punto carecen de validez. Al igual que las estimaciones realizadas anteriormente.

c) ¿Son todas las variables conjuntamente significativas?

Nota: a continuación se presenta el desarrollo de este punto pero los resultados carecen de validez. Se desea contrastar la hipótesis nula $H_0: \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ versus la hipótesis alterna no H_0, esto se puede realizar empleando la información de la tabla ANOVA. Así,

$$F_c = \frac{MSR}{MSE} = \frac{-5.625}{10} = -0.5625$$ (NOTA el estadístico F no puede ser negativo)

Este $F_{calculado}$ se compara con el correspondiente F de la tabla, En este caso $F_{0.05,(2,197)} = 3.042$ y $F_{0.01,(2,197)} = 4.715$. De esta forma, como tenemos que $F_{calculado} < F_{0.05,(2,197)}$ y $F_{calculado} < F_{0.01,(2,197)}$, no se puede rechazar la hipótesis nula a los niveles de significancia del 5% y 1%. Es decir, las variables no son conjuntamente significativas.

d) ¿Qué tan bueno es el modelo estimado? (Comente y haga los cálculos necesarios)

Nota: a continuación se presenta el desarrollo de este punto pero los resultados carecen de validez.

Una forma de realizar esto es empleando el R^2. Sabemos que: $R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{-11.25}{1970} = -0.0057$. El R^2 es muy cercano a cero por lo tanto el modelo estimado no es muy bueno.