

Taller #1
Econometría 06216
Repaso

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitor: Manuel Serna Cortés

Notas:

- o Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- o Este taller es para ser entregado físicamente en los primeros 10 minutos de la clase. (no se recibirán talleres después de esa hora y fecha límite)

INSTRUCCIONES:

- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. Resuelva los siguientes puntos con la información dada en cada literal. (escriba **todo** su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado)

- a) Muestre que $Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n}$, siendo Y una variable discreta
- b) Muestre que $Var[X^2] = A(Var(X)) \quad \forall a \neq 1$ si $Cov(X, X) = 0$ donde A es una variable determinística y X una variable estocástica
- c) Suponga que X, Y y Z son variables aleatorias. Encuentre $E[XZ], E[XY], \sigma_Y, Cov(X, Z)$ y $Var(5X + 3Y + 8)$ a partir de los siguientes datos (muestre el procedimiento que utiliza para llegar a la respuesta y reporte los resultados de forma fraccionaria)
- $\sigma_x^2 = 86441/90$
 $\rho_{xz} = 0$
 $\rho_{xy} = 439/573$
 $E(X)^2 = 62167/29$
- $Y = [81 \ 96 \ 130 \ 155 \ 55 \ 79 \ 56 \ 22 \ 111 \ 71]$
 $Z = [19 \ 24 \ 42 \ 5 \ 91 \ 95 \ 50 \ 49 \ 34 \ 91]$

2. Un estudiante que está indeciso sobre cancelar o no econometría, pregunta a 40 de los estudiantes que vieron inferencia estadística con él y ya culminaron econometría, ¿cuál fue su nota en ésta materia? Los resultados son los siguientes: Un 20% le dice que sacó 2.0. Notas de 1.9, 2.4, 3.7 y 4.1 fueron obtenidas (cada una de estas notas) por un 5% de los estudiantes entrevistados. Por otro lado, notas de 2.8, 3 y 4.2, fueron obtenidas cada una por 10% de los estudiantes. Y las notas de 2.3 y 3.9, fueron obtenidas cada una de estas por 15% de los estudiantes.

La nota del estudiante indeciso para el curso de inferencia estadística coincidió con la de aquellos que terminaron el curso de econometría con una nota de 1.9, 2.3, 3 y 4.1: Es importante anotar que ningún estudiante con una nota en el curso de inferencia similar a la del estudiante indeciso sacó en econometría una nota diferente a las 4 anteriormente mencionadas. Él considera que la información que tiene es suficiente para tomar su decisión y aconsejar a sus compañeros. De acuerdo con esta información, y según sus cálculos, ¿Debería cancelar? ¿Debería aconsejar a los otros para que cancelen? ¿Qué supuesto está haciendo usted en su cálculo? (**Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros**)

3. 25 estudiantes de economía (de los cuales 10 eran mujeres) se reunieron para pasar un grato viernes (después de terminar su taller de econometría!!!). Para comenzar, se decidió escoger un "voluntario" de

manera aleatoria y se propuso jugar con un dado y una moneda y, dependiendo del resultado que se obtuviera, el voluntario recibiría una remuneración. Los jugadores se iban a acomodar de manera aleatoria en un círculo, pero antes de comenzar el juego, uno de ellos propuso incluir la posibilidad de tener en cuenta el género del compañero sentado al lado derecho del jugador como una variable relevante al momento de escoger la remuneración. Las siguientes son las tablas de remuneraciones:

Si cara superior del dado es	Remuneración (miles de pesos)
1	3
2	-5
3	8
4	-10
5	13
6	-15

Si cara superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	7
Sello	10

Si la persona sentada a la derecha es	Remuneración (miles de pesos)
Mujer	5
Hombre	3

Sea X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado, la moneda y el género del compañero del lado derecho, respectivamente. (**Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros**)

- i) A partir de la información proporcionada:
- Calcule el valor esperado de X, Y y Z .
 - Calcule la varianza de X, Y y Z .
- ii) Sean V y W variables aleatorias tales que $V = X - Y$ y $W = YZ$.
- Calcule $Var(V)$
 - Calcule $Cov(3 + V, -2Z)$
 - Hallar la $Var(W)$

- iii) A partir de la información proporcionada responda las siguientes preguntas:
- ¿Son W y X variables estadísticamente independientes?
 - ¿Son V y V^2 variables estadísticamente independientes?

Dadas las siguientes matrices (**Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros**):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 23 \\ 4 \\ 15 \\ 44 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 9 & 1 \\ 6 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 18 & 6 \\ 8 & 2 & 6 & 16 \\ 12 & 8 & 24 & 18 \\ 6 & 14 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

4. Encuentre (muestre todo el procedimiento) $AB, A^T B^T, (C^T C) B^T, (B^T B + A)$

5. Continuando con el ejercicio anterior encuentre
 $B^{-1}, D^{-1}, 2D + A^T, AB + (C^T C)D, \text{ran}(BD)$
6. Continuando con el ejercicio 4
 $D^{-1}B, A^{-1}D, \det(A^{-1}), \text{ran}(A), (B^T D^T)^{-1}$

Taller #1
Econometría 06216
Respuestas sugeridas
Repaso

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitor: Manuel Serna Cortés

Notas:

- o Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- o Este taller es para ser entregado físicamente en los primeros 10 minutos de la clase. (no se recibirán talleres después de esa hora y fecha límite)

INSTRUCCIONES:

- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. Resuelva los siguientes puntos con la información dada en cada literal. (escriba **todo** su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado)

a) Muestre que $Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n}$, siendo Y una variable discreta

Respuesta Sugerida

Dado que la media de Y es $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$, se tiene que:

$$Var(\bar{Y}) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n Var(Y_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>1}^n Cov(Y_i, Y_j)\right)$$

$$\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sigma^2 + 2(0)\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2$$

b) Muestre que $Var[X^2] = A(Var(X)) \quad \forall a \neq 1$ si $Cov(X, X) = 0$ donde A es una variable determinística y X una variable estocástica

Respuesta sugerida:

$$Cov(X, X) = E[(X - E(X)) \cdot (X - E(X))] = E[(X - E(X))^2] = Var(X) = 0$$

Si $Var(X) = 0$, entonces X es una constante, por lo tanto: $Var[X^2] = 0$

entonces

$$AVar(X) = A(0) = 0 = Var(X^2)$$

- c) Suponga que X, Y y Z son variables aleatorias. Encuentre $E[XZ]$, $E[XY]$, σ_y , $Cov(X, Z)$ y $Var(5X + 3Y + 8)$ a partir de los siguientes datos (muestre el procedimiento que utiliza para llegar a la respuesta y reporte los resultados de forma fraccionaria)

$$\sigma_x^2 = 86441/90$$

$$\rho_{xz} = 0$$

$$\rho_{xy} = 439/573$$

$$E(X)^2 = 62167/29$$

$$Y = [81 \ 96 \ 130 \ 155 \ 55 \ 79 \ 56 \ 22 \ 111 \ 71]$$

$$Z = [19 \ 24 \ 42 \ 5 \ 91 \ 95 \ 50 \ 49 \ 34 \ 91]$$

Respuesta sugerida:

$$E[Y] = 428/5$$

$$\sigma_y = 6510/167$$

$$E[Z] = 50$$

$$Var(Z) = 9370/9$$

$$Cov(X, Z) = \rho_{xz} \sigma_x \sigma_z = 0 * \sigma_x \sigma_z = 0$$

$$E[XZ] = Cov(XZ) + E[X]E[Z] = 0 + (463/10) * 50 = 2315$$

$$E[XY] = Cov(XY) + E[X]E[Y] = \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y + E[X]E[Y] = 41651/45 + (463/10) * (428/5) = 34222/7$$

$$Var(5X + 3Y + 8) = 25Var(X) + 9Var(Y) + 2 * 5 * 3 * Cov(X, Y)$$

$$pero\ como\ Cov(X, Y) = 41651/45$$

$$Var(5X + 3Y + 8) = 25 * (86441/90) + 9 * (7598/5) + 30 * (41651/45) = 523641/8$$

2. Un estudiante que está indeciso sobre cancelar o no econometría, pregunta a 40 de los estudiantes que vieron inferencia estadística con él y ya culminaron econometría, ¿cuál fue su nota en ésta materia? Los resultados son los siguientes: Un 20% le dice que sacó 2.0. Notas de 1.9, 2.4, 3.7 y 4.1 fueron obtenidas (cada una de estas notas) por un 5% de los estudiantes entrevistados. Por otro lado, notas de 2.8, 3 y 4.2, fueron obtenidas cada una por 10% de los estudiantes. Y las notas de 2.3 y 3.9, fueron obtenidas cada una de estas por 15% de los estudiantes.

La nota del estudiante indeciso para el curso de inferencia estadística coincidió con la de aquellos que terminaron el curso de econometría con una nota de 1.9, 2.3, 3 y 4.1: Es importante anotar que ningún estudiante con una nota en el curso de inferencia similar a la del estudiante indeciso sacó en econometría una nota diferente a las 4 anteriormente mencionadas. Él considera que la información que tiene es suficiente para tomar su decisión y aconsejar a sus compañeros. De acuerdo con esta información, y según sus cálculos, ¿Debería cancelar? ¿Debería aconsejar a los otros para que cancelen? ¿Qué supuesto está haciendo usted en su cálculo? (**Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros**)

Respuesta sugerida

$$E(n_c) = 5\%(1.9 + 2.4 + 3.7 + 4.1) + 10\%(2.8 + 3 + 4.2) + 15\%(2.3 + 3.9) + 20\% * 2 = 2.935 = \frac{587}{200}$$

$$Var(n_c) = E[(n_c - E(n_c))^2] = 0.7022 = 710/1011$$

$$IC_{95\%} = E(n_c) \pm z_{0.05/2} \sqrt{\frac{S}{n}}$$

$$IC_{95\%} = 2.935 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.7022}{40}} = [2.6753, 3.1946] = [1343/502 \quad 2773/868]$$

No debería aconsejar que cancelaran porque el intervalo de confianza contiene al tres.

$$E(n_i) = \frac{1}{7} * 1.9 + \frac{3}{7} * 2.3 + \frac{2}{7} * 3.0 + \frac{1}{7} * 4.1 = 2.7 = 27/10$$

$$Var(n_i) = E[(n_i - E(n_i))^2] = 0.4657 = 163/350$$

$$IC_{95\%} = E(n_i) \pm z_{0.05/2} \sqrt{\frac{S}{n}}$$

$$IC_{95\%} = 2.7 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.4657}{14}} = [2.3425, 3.0574] = [1614/689 \quad 266/87]$$

No debería cancelar porque el intervalo de confianza contiene al 3.

El supuesto más importante es que no hay diferencias significativas en el rendimiento de los estudiantes, es decir que existe cierta homogeneidad entre la capacidad de los estudiantes. Adicionalmente, la variable grupo no es significativa para este análisis, implicando que la calificación no depende del grupo en el que se encuentra el estudiante.

3. 25 estudiantes de economía (de los cuales 10 eran mujeres) se reunieron para pasar un grato viernes (después de terminar su taller de econometría!!!). Para comenzar, se decidió escoger un "voluntario" de manera aleatoria y se propuso jugar con un dado y una moneda y, dependiendo del resultado que se obtuviera, el voluntario recibiría una remuneración. Los jugadores se iban a acomodar de manera aleatoria en un círculo, pero antes de comenzar el juego, uno de ellos propuso incluir la posibilidad de tener en cuenta el género del compañero sentado al lado derecho del jugador como una variable relevante al momento de escoger la remuneración. Las siguientes son las tablas de remuneraciones:

Si cara superior del dado es	Remuneración (miles de pesos)
1	3
2	-5
3	8
4	-10
5	13
6	-15

Si cara superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	7
Sello	10

Si la persona sentada a la derecha es	Remuneración (miles de pesos)
Mujer	5
Hombre	3

Sea X , Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado, la moneda y el género del compañero del lado derecho, respectivamente. **(Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros)**

- i) A partir de la información proporcionada:

- a. Calcule el valor esperado de X , Y y Z .

Se espera que el jugador, en promedio, deba pagar mil pesos por el resultado del dado y gane 8500 y 3800 pesos por el resultado de la moneda y el género del compañero del lado derecho, respectivamente.

- b. Calcule la varianza de X , Y y Z .

De acuerdo a la definición de varianza de una variable aleatoria discreta, se tiene que:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{296}{3} - 1 = \frac{293}{3} = 97,67$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{149}{2} - \frac{289}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{77}{5} - \frac{361}{25} = \frac{24}{25} = 0,96$$

- ii) Sean V y W variables aleatorias tales que $V = X - Y$ y $W = YZ$.

- a. Calcule $Var(V)$

Teniendo en cuenta las propiedades de la varianza y conociendo que X y Y son variables aleatorias independientes se tiene que:

$$Var[V] = Var[X - Y] = Var(X) + Var(Y) = \frac{293}{3} + \frac{9}{4} = \frac{1199}{12} = 99,92$$

- b. Calcule $Cov(3+V, -2Z)$

De acuerdo a las propiedades de la covarianza se tiene que la anterior expresión es igual a $-2Cov(V, Z)$, pero teniendo en cuenta que las variables X y Y son independientes de la variable Z , dado que el género del compañero sentado a la derecha de cada jugador no depende del resultado del dado o de la moneda, se tiene que:

$$-2Cov(V, Z) = -2\{E(VZ) - E(V)E(Z)\} = 0$$

- c. Hallar la $Var(W)$

$$Var(W) = E(W^2) - (E(W))^2 = [E(Y^2)E(Z^2)] - [E(Y)E(Z)]^2 = \frac{11473}{10} - \left(\frac{323}{10}\right)^2 = 104,01$$

- iii) A partir de la información proporcionada responda las siguientes preguntas:

- a. ¿Son W y X variables estadísticamente independientes?

Aunque es sencillo demostrar que W y X son independientes, intuitivamente se puede saber que lo son ya que las tres variables no se encuentran relacionadas entre si.

- b. ¿Son V y V^2 variables estadísticamente independientes?

Si V y V^2 son independientes se debe cumplir que $E(VV^2) = E(V)E(V^2)$; por lo tanto se debe demostrar si esta igualdad se cumple o no. Primero, se puede calcular la parte izquierda de la igualdad:

$$E(VV^2) = E\{(X - Y)^3\}$$

$$E(VV^2) = E(X^3) - 3E(X^2)E(Y) + 3E(X)E(Y^2) - E(Y^3)$$

$$E(VV^2) = -3705$$

El lado derecho de la igualdad es

$$E(V)E(V^2) = E\{(X - Y)^2\} * E(X - Y)$$

$$E(V)E(V^2) = \{E(X^2) - 2E(X)E(Y) + E(Y^2)\} * \{E(X) - E(Y)\}$$

$$E(V)E(V^2) = \frac{1141}{2} * \left(-\frac{19}{2}\right) = 1806,58$$

Dado que la igualdad no se cumple se puede concluir que V y V^2 no son independientes.

Dadas las siguientes matrices **(Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros)**:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 19 \\ 8 & 12 & 20 & 11 & \\ 24 & 2 & 5 & 12 & \\ 7 & 12 & 15 & 1 & \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 23 \\ 4 \\ 15 \\ 44 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 9 & 1 \\ 6 & 15 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 18 & 6 \\ 8 & 2 & 6 & 16 \\ 12 & 8 & 24 & 18 \\ 6 & 14 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

4. Encuentre (muestre todo el procedimiento)

$AB, A^T B^T, (C^T C)B^T, (B^T B + A)$

Respuesta:

$$AB = \begin{bmatrix} 249 & 312 & 239 & 96 \\ 329 & 331 & 242 & 178 \\ 280 & 239 & 273 & 76 \\ 251 & 232 & 188 & 147 \end{bmatrix}$$

$$A^T B^T = \begin{bmatrix} 415 & 399 & 302 & 194 \\ 110 & 320 & 78 & 148 \\ 148 & 461 & 83 & 223 \\ 305 & 336 & 225 & 182 \end{bmatrix}$$

$$(C^T C)B^T = \begin{bmatrix} 21648 & 16236 & 21648 & 8118 \\ 10824 & 40590 & 2706 & 24354 \\ 24354 & 10824 & 13530 & 5412 \\ 2706 & 24354 & 5412 & 5412 \end{bmatrix}$$

$$B^T B + A = \begin{bmatrix} 193 & 161 & 143 & 103 \\ 165 & 335 & 139 & 170 \\ 166 & 121 & 131 & 71 \\ 91 & 171 & 74 & 91 \end{bmatrix}$$

5. Continuando con el ejercicio anterior encuentre

$B^{-1}, D^{-1}, 2D + A^T, AB + (C^T C)D, \text{ran}(BD)$

Respuesta:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -233/1488 & -125/1488 & 413/1488 & 133/744 \\ -5/1488 & -41/1488 & -55/1488 & 121/744 \\ 125/496 & 33/496 & -113/496 & -49/248 \\ -1/496 & 91/496 & -11/496 & -75/248 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 23/17 & 39/34 & -27/34 & -23/34 \\ 57/68 & 45/68 & -39/68 & -5/17 \\ -35/68 & -33/68 & 79/204 & 11/51 \\ -10/17 & -7/17 & 11/34 & 5/17 \end{bmatrix}$$

$$2D + A^T = \begin{bmatrix} 28 & 28 & 60 & 19 \\ 20 & 16 & 14 & 44 \\ 25 & 36 & 53 & 51 \\ 31 & 39 & 48 & 37 \end{bmatrix}$$

$$AB + (C^T C)D = \begin{bmatrix} 11073 & 27372 & 48947 & 16332 \\ 21977 & 5743 & 16478 & 43474 \\ 32752 & 21887 & 65217 & 48784 \\ 16487 & 38116 & 48896 & 48855 \end{bmatrix}$$

$\text{ran}(BD) = 4$

6. Continuando con el ejercicio 4

$D^{-1}B, A^{-1}D, \det(A^{-1}), \text{ran}(A), (B^T D^T)^{-1}$

$$D^{-1}B = \begin{bmatrix} 317/34 & 535/34 & 389/34 & 297/34 \\ 177/34 & 171/17 & 229/34 & 86/17 \\ -335/102 & -715/102 & -143/34 & -125/34 \\ -63/17 & -189/34 & -161/34 & -52/17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}D = \begin{bmatrix} 459/890 & 709/978 & 781/521 & 675/724 \\ -1117/1576 & 2925/1258 & 1463/856 & -95/5919 \\ 481/649 & -2426/1987 & -221/275 & 1337/1621 \\ -313/1409 & -1189/1796 & -1808/1907 & -827/1172 \end{bmatrix}$$

$\det(A^{-1}) = -1/28162$

$\text{Ran}(A) = 4$

$$(B^T D^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1112/2097 & -348/3337 & 317/503 & 1435/4216 \\ -632/1425 & -278/3909 & 556/1059 & 1058/4159 \\ 524/1551 & 295/5196 & -1527/3911 & -397/1890 \\ 430/1769 & 158/3145 & -3006/10111 & -253/1729 \end{bmatrix}$$