UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL . **21 de mayo de 2013**

NOMBRE: ______________________ CÓDIGO: ____________

PROFESOR: ______________________ GRUPO: ____________

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) (10 puntos) Halle los valores propios de A.

   (b) (8 puntos) Halle los vectores propios de A.

   (c) (12 puntos) Encuentre una matriz ortogonal $\mathbf{P}$ y una matriz diagonal $\mathbf{D}$ tales que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} A\, \mathbf{P}$.

2. Sea $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ una transformación lineal definida por

$$L(x, y, z) = (x - y + 2z,\ y + 4z,\ x + 6z,\ 3x - 3y + 6z).$$

   (a) (4 puntos) Encuentre la matriz de la transformación lineal L referida a las bases canónicas de $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^4$ respectivamente.

   (b) (6 puntos) Encuentre una base para el núcleo de L.

   (c) (6 puntos) Encuentre una base para la imagen de L.

   (d) (2 puntos) Determine si el vector (3,2, 1/2) pertenece al núcleo de L.

   (e) (2 puntos) Determine si el vector (1,5,6,-3) pertenece a la Imagen de L.

   (f) (4 puntos) ¿L es inyectiva? ¿L es sobreyectiva? Justifique sus respuestas.

   (g) (2 puntos) Verifique que $dim\ (R^3) = Nulidad\,(L) + Rango\,(L)$.

3. **Seleccione** entre los literales (a) y (b), y responda **solamente uno**:

   (a) Considere los puntos $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(2, 9)$.

      i. (2 puntos) Ubique los puntos en el plano xy.

      ii. (8 puntos) Determine la recta de mínimos cuadrados que mejor ajusta a los puntos dados.

      iii. (2 puntos) Grafique la recta de mínimos cuadrados en el mismo plano del literal i.

      iv. (2 puntos) Aproxime la imagen para $x = \frac{3}{2}$.

(b) Considere la forma cuadrática $g(x,y) = 3x^2 - 8xy - 4y^2 = 4$.

i. (8 puntos) Encuentre una forma cuadrática $h(x', y')$ equivalente a la forma cuadrática dada.

ii. (3 puntos) Identifique la sección cónica $h(x', y') = 4$.

iii. (3 puntos) Dibuje la sección cónica $h(x', y') = 4$, resaltando los nuevos ejes x' y y'.

4. (30 puntos) Determine el valor de verdad de las proposiciones siguientes. Justifique su respuesta en cada caso:

(a) Todo conjunto de tres vectores en $\mathbf{R}^3$ genera a $\mathbf{R}^3$.

(b) El conjunto $W = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^3$.

(c) La transformación lineal $L : \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$ definida por $L\left(at^2 + bt + c\right) = 2at + b$ es inyectiva.

(d) Debido a que $\mathbf{R^n}$ contiene un número infinito de vectores, decimos que es de dimensión infinita.

(e) La forma escalonada reducida por filas de una matriz no invertible tiene una fila de ceros.