



**ÁLGEBRA Y FUNCIONES.**  
**SUPLETORIO DEL EXAMEN FINAL . 24 de mayo de 2008**

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

PROFESOR: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

**NOTA:** i) El valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **120** puntos. **SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.**

ii) En este examen **no se permite el uso de calculadora.** Aquellas respuestas que involucren raíces o logaritmos deben quedar indicadas en la forma más simplificada posible.

1. (15 puntos)

(a) Resuelva la ecuación  $\frac{5x}{x-2} + \frac{3}{x} + 2 = \frac{-6}{x^2-2x}$

(b) Resuelva la desigualdad:  $\frac{2}{3} < \frac{1}{x-2} \leq 1$  y exprese la solución en forma de intervalo.

(c) Resuelva la ecuación logarítmica  $2 \ln x - \ln 2 = \ln(3x - 4)$

2. (10 puntos) Encuentre un polinomio  $p(x)$  de grado 5 y coeficiente principal 3, que satisfaga las siguientes condiciones:  $p(1-i) = 0$ ,  $p(-2i) = 0$  y  $p(0) = 0$

3. (16 puntos)

(a) Identifique la cónica representada por la ecuación  $4x^2 - 16x + 9y^2 + 36y = -16$ . Haga un bosquejo gráfico de la cónica.

(b) Muestre gráficamente que el siguiente sistema de ecuaciones tiene dos soluciones. Luego resuelva el sistema para identificar claramente dichas soluciones

$$\begin{cases} y^2 - 4x^2 = 16 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

4. (20 puntos) Considere las funciones:  $f(x) = 2 - \frac{\ln x}{\ln 3}$  y  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-10}}$

(a) Pruebe que la función  $f$  es **invertible** y halle una fórmula explícita para  $f^{-1}(x)$ . Verifique su respuesta usando la **composición** de funciones.

(b) Halle el dominio y el rango de la función  $g$ .

5. (15 puntos)

- (a) Encuentre las soluciones en el intervalo  $[0, \pi)$  de la ecuación  $-2\text{sen}^2x - 3\cos x + 3 = 0$
- (b) Trace la gráfica de la función  $y = -\frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{3})$  en un período.

6. (24 puntos)

- (a) Encuentre dos números reales cuya diferencia sea 40 y su producto sea mínimo
- (b) Si  $N(t) = 2000e^{\frac{1}{10}\ln(\frac{2}{4})t}$  corresponde a la cantidad de material radiactivo de una sustancia al cabo de  $t$  días, ¿cuál es la vida media de esta sustancia?
- (c) Un atleta empieza a correr desde un punto P, a una velocidad constante de una milla cada 8 minutos en la dirección  $S40^\circ E$  durante 24 minutos y luego toma la dirección  $N20^\circ E$ , a la misma velocidad, durante los siguientes 16 minutos, al cabo de los cuales llega al punto Q. Calcule la distancia entre los puntos P y Q.

7. (20 puntos) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y justifique su decisión

- (a) La ecuación de la circunferencia tangente a ambos ejes coordenados, centro en el segundo cuadrante y radio 4 es  $x^2 + 8x + y^2 - 8y + 16 = 0$
- (b) La gráfica de la ecuación  $y = x^3$  sólo tiene simetría respecto al origen
- (c) Si  $\text{sen}^{-1}x = \alpha$  entonces  $\text{sen}(2\text{sen}^{-1}x) = 2x\sqrt{1-x^2}$
- (d) La gráfica de la función  $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$  tiene exactamente dos asíntotas verticales.
- (e)  $(5i + 3i^3)^2 = 4$