



ALGEBRA LINEAL
SUPLETORIO EXAMEN FINAL

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

PROFESOR: _____ GRUPO: _____

1. Considere la transformación lineal $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow P_3$ definida por

$$L(a, b, c, d) = (a + b + c)t^3 + (a + b - c)t + 2a - b$$

- a) (4 pts) Encuentre una base para la *imagen*(L). Justifique su elección.
- b) (4 pts) Calcule el *rango*(L) y la *nulidad*(L).
- c) (4 pts) ¿Es L una transformación lineal uno a uno? ¿Es L una transformación lineal sobre? Justifique su respuesta.
- d) (6 pts) Determine si el vector $(1, 1, -1, -1) \in \text{Nucleo}(L)$. Determine si el vector $4t^3 - 10t^2 - 2t + 1 \in \text{Imagen}(L)$. Justifique su respuesta.
- e) (8 pts) Encuentre una matriz que represente a la transformación lineal L con respecto a

las bases $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y $T = \{t^3, t^2 + 1, t - 1, 1\}$ de \mathbb{R}^4 y de P_3 respectivamente.

2. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) (2 pts) ¿Es A una matriz singular o no singular? Justifique su respuesta.
- b) (12 pts) Diagonalice ortogonalmente la matriz A . Escriba la matriz diagonal D y la matriz ortogonal P , tales que $D = P^T A P$.

3. (18 pts) Considere los siguientes puntos $P(1, 0, 1)$, $Q(-1, -1, -1)$ y $R(0, 1, 1)$.

- a) Encuentre la ecuación del plano π_1 que contiene al punto P , y a la recta ℓ_1 que pasa por los puntos Q y R .
- b) Verifique que el punto $(-1, 0, 2)$ no pertenece ni a la recta ℓ_1 ni al plano π_1 . Encuentre la ecuación de una recta ℓ_2 paralela al plano π_1 que pase por el punto $(1, 0, 1)$.
- c) Calcule la distancia entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2 .

4. (12 pts)

- a) Sea A una matriz 5×7 , ¿cuál es el máximo valor para el *rango*(A)?. ¿Pueden las columnas de A formar un conjunto linealmente independiente? Explique.

- b) Construya un isomorfismo entre \mathbb{R}^3 y P_2 .
- c) Suponga que B es una matriz 6×6 , tal que los valores propios λ_1 , λ_2 y λ_3 tienen multiplicidad algebraica uno, dos y tres respectivamente. ¿Cuál debe ser la multiplicidad geométrica asociada al espacio propio de cada valor propio para que B sea diagonalizable? ¿Puede ser B diagonalizable ortogonalmente?

5. (20 puntos)

- a) Demuestre que si el sistema $Ax = b$, $b \neq 0$ tiene dos soluciones distintas, entonces tiene infinitas soluciones.
- b) Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V con $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Sea $W_1 + W_2 = \{v \in V : v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Suponga que $W_1 + W_2 = V$ muestre que todo vector de V se puede escribir de manera única como $v = w_1 + w_2$.
- c) Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$ tal que AA^T es no singular, entonces $\text{rango}(A) = m$.
- d) Sea A una matriz $n \times n$. Demuestre que A es singular si y sólo si $\lambda = 0$ es un valor propio de A .

6. (8 puntos) Elija y resuelva uno y sólo uno de los siguientes items.

- a) Argumente por qué la matriz $T = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$ puede considerarse una matriz de transición regular de un proceso de Markov y encuentre el vector de estado estacionario para dicha matriz T .
- b) Determine una forma cuadrática h equivalente a la forma cuadrática $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$.