UNIVERSIDAD ICESI
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

**EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL.** 23 de noviembre de 2010

NOMBRE:______________________ CÓDIGO:__________

PROFESOR:______________________ GRUPO:__________

1. .

   (a) Sea $\pi$ el plano que contiene los puntos $P(1,1,1)$, $Q(2,3,4)$ y $R(-5,3,2)$, y sea $L$ la recta que contiene el punto $A(-1,0,1)$ y es ortogonal al plano $\pi$.

      i. (4 puntos) Escriba la ecuación del plano $\pi$.

      ii. (3 puntos) Escriba la ecuación de la recta $L$.

      iii. (3 puntos) Encuentre el punto de intersección entre el plano $\pi$ y la recta $L$.

   (b) (8 puntos) Encuentre la ecuación de la recta que resulta de la intersección de los planos

$$\pi_1 : 2x + 3y - 2z = -4 \quad \text{y} \quad \pi_2 : x - y + 2z = -3.$$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) (4 puntos) Encuentre el polinomio característico de $A$.

   (b) (10 puntos) Encuentre los vectores propios de $A$ asociados a cada valor propio $\lambda$ (del ítem anterior se tiene que los valores propios de $A$ son: $\lambda = -3$ de multiplicidad 2 y $\lambda = 6$).

   (c) (8 puntos) Encuentre una matriz ortogonal $\mathbf{P}$ y una matriz diagonal $\mathbf{D}$ tales que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} A\,\mathbf{P}$.

3. Sea $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ una transformación lineal tal que : $L(1,1,1) = (3,0,2,-1)$, $L(1,1,0) = (0,1,-2,2)$ y $L(1,0,0) = (3,1,0,1)$.

   (a) (7 puntos) Calcule $L(a,b,c)$.

   (b) (5 puntos) Encuentre la matriz de la transformación lineal $L$ referida a las bases canónicas.

   (c) (7 puntos) Encuentre una base para el núcleo de $L$ y una base para la imagen de $L$ .

   (d) (4 puntos) ¿$L$ es inyectiva? ¿$L$ es sobreyectiva? Justifique su respuesta.

   (e) (2 puntos) ¿(1,2,3) pertenece al Núcleo de $L$? Justifique su respuesta.

4. (10 puntos) Seleccione y responda una (solo una) de las siguientes preguntas:

   (a) Determine la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos $(4,3), (5,2)$ y $(7,3)$.

   (b) Identifique la cónica y encuentre una forma cuadrática $h(x,y)$ equivalente a la forma cuadrática $g(x,y) = 4x^2 - 6xy - 2y^2$.

5. (25 puntos) Analice cinco (solamente cinco) de los enunciados siguientes y determine si son ciertos (haga una demostración) o falsos (de un contraejemplo) .

(a) Si $A, B, C$ y $D$ son matrices $3 \times 3$ tales que $|A| = \frac{1}{2}$, $|B| = -3$, $|C| = 6$ y $B^T D A^{-1} = 2C$, entonces $|D| = 8$ .

(b) Si $\beta = \{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbf{R}^2$ y $A \in M_{2\times 2}$ es invertible, entonces $\zeta = \{Av_1, Av_2\}$ es una base de $\mathbf{R}^2$.

(c) Si $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ una transformación lineal, entonces $rango(L) > dim(\mathbf{R}^n)$.

(d) Dos vectores cualesquiera de $\mathbf{R}^3$ generan siempre un plano.

(e) Si $A$ es una matriz de $2 \times 2$ invertible, entonces $A$ es diagonalizable.

(f) La función $T : \mathbf{M_{2\times 2}} \to \mathbf{P_3}$ tal que $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b+1)x + cx^3$, es una transformación lineal.

(g) El conjunto $\beta = \{1 + x,\ x + x^2,\ x^2 + x^3,\ 1 - x^3\}$ es una base de $\mathbf{P}_3$.