UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL

SUPLETORIO EXAMEN FINAL

NOMBRE:______________________________ CÓDIGO:____________

PROFESOR:______________________________ GRUPO:____________

1. Considere la transformación lineal $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow P_3$ definida por

$$L(a,b,c,d) = (a+b+c)t^3 + (a+b-c)t + 2a - b$$

   a) (4 ptos) Encuentre una base para la $imagen(L)$. Justifique su elección.
   b) (4 ptos) Calcule el $rango(L)$ y la $nulidad(L)$.
   c) (4 ptos) ¿Es L una transformación lineal uno a uno? ¿Es L una transformación lineal sobre? Justifique su respuesta.
   d) (6 ptos) Determine si el vector $(1,1,-1,-1) \in Nucleo(L)$. Determine si el vector $4t^3 - 10t^2 - 2t + 1 \in Imagen(L)$. Justifique su respuesta.
   e) (8 ptos) Encuentre una matriz que represente a la transformación lineal L con respecto a las bases $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y $T = \{t^3, t^2+1, t-1, 1\}$ de $\mathbb{R}^4$ y de P_3 respectivamente.

2. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) (2 ptos) ¿Es A una matriz singular o no singular? Justifique su respuesta.
   b) (12 ptos) Diagonalice ortogonalmente la matriz A. Escriba la matriz diagonal D y la matriz ortogonal P, tales que $D = P^T AP$.

3. (18 ptos) Considere los siguientes puntos $P(1,0,1)$, $Q(-1,-1,-1)$ y $R(0,1,1)$.

   a) Encuentre la ecuación del plano π_1 que contiene al punto P, y a la recta ℓ_1 que pasa por los puntos Q y R .
   b) Verifique que el punto $(-1,0,2)$ no pertenece ni a la recta ℓ_1 ni al plano π_1. Encuentre la ecuación de una recta ℓ_2 paralela al plano π_1 que pase por el punto $(1,0,1)$.
   c) Calcule la distancia entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2.

4. (12 ptos)

   a) Sea A una matriz 5×7, ¿cúal es el máximo valor para el $rango(A)$?. ¿Pueden las columnas de A formar un conjunto linealmente independiente? Explique.

b) Construya un isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y P_2.

c) Suponga que B es una matriz 6×6, tal que los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 tienen multiplicidad algebráica uno, dos y tres respectivamente. ¿Cuál debe ser la multiplicidad geométrica asociada al espacio propio de cada valor propio para que B sea diagonalizable?¿Puede ser B diagonalizable ortogonalmente?

5. (20 puntos)

a) Demuestre que si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tiene dos soluciones distintas, entonces tiene infinitas soluciones.

b) Sean W_1y W_2 subespacios de un espacio vectorial V con $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Sea $W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2,\ \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2\}$. Suponga que $W_1 + W_2 = V$ muestre que todo vector de V se puede escribir de manera única como $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$.

c) Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$ tal que AA^T es no singular, entonces $rango(A) = m$.

d) Sea A una matriz $n \times n$. Demuestre que A es singular si y sólo si $\lambda = 0$ es un valor propio de A.

6. (8 puntos) Elija y resuelva uno y sólo uno de los siguientes items.

a) Argumente por qué la matriz $T = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix}$ puede considerarse una matriz de transición regular de un proceso de Markov y encuentre el vector de estado estacionario para dicha matriz T.

b) Determine una forma cuadrática h equivalente a la forma cuadrática $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$.