EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL. 25 de noviembre de 2008

NOMBRE:____ CÓDIGO:________________

PROFESOR:____ GRUPO:______________

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **116** puntos. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. Sea $T:\ \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^2}$ una transformación lineal definida por : $T(x, y, z, w) = (x + z,\ y + w)$.

   (a) (6 puntos) Encuentre la matriz de T referida a las bases canónicas

   (b) (10 puntos) Encuentre una base para el núcleo de T y una base para la imagen de T

   (c) (4 puntos) ¿T es inyectiva? ¿T es sobreyectiva?

   (d) (4 puntos) ¿(1,3,-1,2) pertenece al núcleo de T? ¿(2,4) pertenece a la imagen de T?

2. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -4 & -7 & 4 \\ -8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

   (a) (8 puntos) Compruebe que los valores propios de A son $\lambda = -9$, de multiplicidad 2, y $\lambda = 9$

   (b) (18 puntos) Determine la matriz ortogonal P y la matriz diagonal D tales que $PD = AP$

3. (20 puntos) Considere el plano π que pasa por el punto (3,4,5) y contiene a la recta L_1 de ecuaciones paramétricas $x = 2t + 1,\ y = 4t + 7,\ z = -3t + 1$. Determine el punto de intersección del plano π con la recta L_2 que pasa por el origen y es perpendicular a π.

4. (36 puntos) Escoja seis de los siguientes enunciados y analice si son ciertos o falsos, justificando claramente su respuesta

   (a) El producto de matrices ortogonales de $n \times n$ es una matriz ortogonal.

   (b) Si λ es un valor propio de A, entonces λ^2 es un valor propio de A^2.

(c) La función $T: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ definida por $T(x, y) = x$ es una transformación lineal.

(d) Si A es una matriz de 3×4 y su rango es 2, entonces el espacio solución del sistema $Ax = 0$ tiene dimensión uno.

(e) Todo conjunto ortogonal de n vectores en $\mathbf{R}^n$ es una base para $\mathbf{R}^n$.

(f) A y A^T tienen el mismo polinomio característico.

(g) Si A es una matriz de $n \times n$ entonces el determinante de A es el propducto de todos sus valores propios.

(h) Sean λ_1 y λ_2 valores propios de una matriz A, con vectores propios asociados x_1 y x_2, respectivamente; si $\lambda_1 = \lambda_2$ entonces x_1 y x_2 son linealmente independientes.

5. (10 puntos) Elija uno (solamente uno) de los siguientes ejercicios

(a) Determine una forma cuadrática equivalente a $g(\mathbf{x}) = 3x^2 + 4y^2 - 8xz - 3z^2$

(b) Halle el vector de estado estacionario de la matriz de transición $T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$